



ADAM JONKISZ

ZAGADNIENIA LOGIKI FORMALNEJ I OGÓLNEJ TEORII MNOGOŚCI

WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIwersytetu Ignatianum w Krakowie

**ZAGADNIENIA
LOGIKI FORMALNEJ
I OGÓLNEJ
TEORII MNOGOŚCI**

ADAM JONKISZ



ZAGADNIENIA LOGIKI FORMALNEJ I OGÓLNEJ TEORII MNOGOŚCI

WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIwersytetu Ignatianum w Krakowie

KRAKÓW 2024

© Uniwersytet Ignatianum w Krakowie, 2024

Publikacja sfinansowana z subwencji Ministra Edukacji i Nauki
przeznaczonej na utrzymanie i rozwój potencjału dydaktycznego i badawczego
Uniwersytetu Ignatianum w Krakowie w 2023 roku

Recenzenci

Dr hab. Marek Lechniak, prof. KUL
Prof. dr hab. Jan Woleński

Redakcja

Dariusz Piskulak

Projekt okładki i stron tytułowych
PHOTO DESIGN – Lesław Sławiński

Opracowanie typograficzne i łamanie
Piotr Druciarek

ISBN 978-83-7614-613-3

Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Ignatianum w Krakowie
ul. Kopernika 26 • 31-501 Kraków
tel. 12 39 99 620
wydawnictwo@ignatianum.edu.pl
<https://wydawnictwo.ignatianum.edu.pl>

Dystrybucja:

Wydawnictwo WAM
Dział Handlowy
tel. 12 62 93 254-255 • faks 12 62 93 496
handel@wydawnictwowam.pl

Księgarnia Wysyłkowa
tel. 12 62 93 260
<https://wydawnictwowam.pl>

Mojej Kochanej Żonie Ilonie

SPIS TREŚCI

Uwagi wstępne	11
Podziękowania	14
Rozdział I: Klasyczny rachunek zdań (KRZ)	17
1. Język KRZ	17
1.1 Charakterystyka syntaktyczna	18
1.1.1 Słownik KRZ	18
1.1.2 Składnia i wyrażenia/formuły KRZ	19
1.2 Własności semantyczne spójników prawdziwościowych	23
1.2.1 Pojęcie funkcji prawdziwościowej i wartościowania	23
1.2.2 Matrycowe definicje spójników prawdziwościowych	25
1.2.3 Związki definicyjne między funktorami prawdziwościami	29
2. Tautologie/prawa KRZ	43
2.1 Sprawdzanie tautologiczności	43
2.2 Wybrane tautologie/prawa KRZ	45
3. Założeniowy system KRZ	47
3.1 Reguły pierwotne systemu	47
3.2 Tezy i reguły wtórne	51
3.2.1 Pojęcie reguły wtórnej	52
3.2.2 Wybrane tezy/reguły wtórne	52
4. Aksjomatyczne systemy KRZ	78
4.1 Uwagi ogólne	78
4.2 System Hilberta i Bernaysa	79
4.3 System Łukasiewicza	83

Rozdział II: Nieklasyczne rachunki zdań	87
1. Logika wielowartościowa	89
2. Logika modalna	94
3. Logika deontyczna	98
4. Logika intuicjonistyczna i logiki pośrednie	103
Rozdział III: Rachunek predykatów	109
1. Uwagi ogólne	109
2. Klasyczny rachunek predykatów	114
2.1 Węższy rachunek predykatów (WRP)	114
2.1.1 Słownik, składnia i formuły WRP	114
2.1.2 Założeniowy system WRP	118
2.1.2.1 Reguły i definicje wyjściowe	119
2.1.2.2 Tezy WRP	123
2.2 WRP z identyecznością	135
3. Teoria wynikania zdań kategorycznych	142
3.1 Podstawowe prawa wynikania	143
3.2 Sprawdzanie poprawności logicznej wnioskowań ze zdaniemi kategorycznymi	150
3.2.1 Tradycyjne metody sylogistyki	151
3.2.1.1 Niezawodne tryby wnioskowania	151
3.2.1.2 Dyrektywy (warunki) dla przesłanek i wniosku	153
3.2.2 Udoskonalona metoda Venna	157
3.3 Interpretacja zdań kategorycznych w WRP	165
Rozdział IV: Ogólna teoria mnogości	171
1. Rachunek zbiorów	171
1.1 Podstawowe pojęcia rachunku zbiorów	172
1.2 Relacje zakresowe między zbiorami	174
1.3 Działania na zbiorach	182
1.4 Zbiory wyznaczone przez funkcje zdaniowe	190
1.5 Rachunek zbiorów a teoria wynikania zdań kategorycznych	193
2. Teoria relacji	196
2.1 Iloczyn kartezjański zbiorów	196
2.2 Relacje i działania na relacjach	199
2.3 Rodzaje relacji	207
2.3.1 Funkcje i ciągi	208

2.3.2	Relacje zwrotne, spójne, symetryczne, asymetryczne, przechodnie	216
2.3.3	Relacje równościowe	217
2.3.4	Relacje porządkujące i zbiory uporządkowane	220
2.3.5	Izomorfizm relacji	225
3.	Teoria liczb kardynalnych	229
3.1	Równoliczność zbiorów, pojęcia mocy zbioru i liczby kardynalnej	229
3.2	Rodzaje zbiorów ze względu na licznosc	235
3.2.1	Zbiory skończone i nieskończone	235
3.2.2	Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne	238
3.3	Relacje w zbiorze liczb kardynalnych	249
3.3.1	Równosci (działania na liczbach kardynalnych)	249
3.3.2	Nierównosci	261
4.	Antynomie teorii mnogości	268
4.1	Antynomie klasycznej teorii zbiorów	271
4.2	Usuwanie antynomii	271
4.2.1	Teoria typów logicznych	271
4.2.2	Aksjomatyzacja teorii mnogości	272
	Zakończenie	279
	Bibliografia	285
	Definicje, twierdzenia, schematy	291
	Indeks pojęć i nazwisk	323

UWAGI WSTĘPNE

Książka ta jest drugą spośród trzech składających się na opracowanie wybranych zagadnień z logiki. Sformułowane tu uwagi są ograniczone do dotyczących niniejszej książki, choć niektóre są związłym przypomnieniem uwag ogólnych¹.

1. Zagadnienia podjęte w rozważaniach są wybrane z logiki formalnej i ogólnej teorii mnogości. Podział na te dwa źródła zagadnień jest wskazany już w tytule książki i widoczny w jej strukturze, choć jest uzasadnione, względami nie tylko historycznymi i praktycznymi, by co najmniej pewne wyniki teorii mnogości – na przykład rachunek zbiorów i relacji, teorię liczb kardynalnych – włączyć do logiki formalnej. W tak rozumianej logice formalnej są nie tylko zawsze w niej umieszczane rachunki logiczne – rachunki zdań klasyczne i nieklasyczne oraz rachunki predykatów – lecz także zagadnienia tzw. ogólnej teorii mnogości i uzyskane w tym zakresie wyniki. Choć w rozumianej szerzej logice formalnej mieszczą się także wszystkie zagadnienia podjęte w tej książce, to jest w niej zastosowany wskazany tytułem podział, zgodny z przyjętym w publikacjach oddzieleniem logiki formalnej (rozumianej wąsko) od teorii mnogości².

¹ Odsyłając do obszernych uwag dotyczących całego opracowania, sformułowanych w: A. Jonkisz, *Zagadnienia semiotyki logicznej i ogólnej metodologii nauk*, Kraków 2023, warto tu powtórzyć, że jego rdzeniem był podręcznik logiki napisany z myślą o studiujących i uprawiających filozofię.

² Na oddzielanie teorii mnogości od logiki wskazują często tytuły opracowań, np.: J. Śłupecki, L. Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, Warszawa 1963; J. Śłupecki, K. Hałkowska, K. Piróg-Rzepecka, *Logika i teoria mnogości*, Warszawa 1978; L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, Lublin 1991.

1.1 W zakresie logiki formalnej są uwzględnione rachunki zdań i rachunki predykatów. Najobszerniej jest omawiany klasyczny rachunek zdań (KRZ), w książce są bowiem uwzględnione różne metody budowania systemów KRZ, a zwłaszcza stosowana w niniejszym ujęciu metoda założeniowa; spośród rachunków zdań nieklasycznych zostały wybrane rachunki logiki wielowartościowej, modalnej (rozumianej wąsko), deontycznej oraz logika intuicjonistyczna i tzw. logiki pośrednie.

Również charakterystyka rachunków predykatów jest skupiona na rachunkach klasycznych – ponownie z naciskiem na system założeniowy. Teoria wynikania zdań kategorycznych jest najpierw omówiona odrębnie, w sposób przyjęty w sylogistyce, uzupełniony o nowsze metody, po czym teoria ta jest zinterpretowana w rachunku predykatów.

1.2 W rozdziale poświęconym teorii mnogości są omówione zagadnienia zwykle umieszczane w jej części zwanej ogólną: podstawowe pojęcia rachunku zbiorów (relacje między zbiorami, działania na zbiorach, zbiory wyznaczone przez funkcje zdaniowe) i zagadnienia z tym rachunkiem związane (rachunek zbiorów a teoria zdań kategorycznych); podstawowe wyniki teorii relacji (rodzaje relacji, relacje porządkujące zbiory, izomorfizm relacji); wybrane zagadnienia teorii liczb kardynalnych (pojęcie liczby kardynalnej, rodzaje zbiorów ze względu na liczebność – a zwłaszcza kategorie zbiorów nieskończonych – arytmetyka liczb kardynalnych)³; ponadto są w tym rozdziale uwzględnione zagadnienia związane z antynomiami tzw. klasycznej teorii mnogości oraz ze sposobami ich usuwania.

1.3 Tytułem usprawiedliwienia powtórzę tu sformułowaną już uwagę dotyczącą każdego szerszego opracowania wyników logiki, a więc także mojego, którego częścią jest niniejsza książka. Otóż w zakresie praw i uznanych metod logiki trudno o jakieś nowe ujęcie, zwłaszcza gdy zamiarem źródłowym, przejawiającym się i w tej książce, było podręcznikowe opracowanie wybranych zagadnień z logiki adresowane do filozofów. Oryginalności można się doszukiwać jedynie w doborze i układzie zagadnień, sposobie ich prezentacji i uzupełniających główne rozważania przykładach i uwagach. Dlatego wyniki prezentowane w niniejszej książce, poświęconej zagadnieniom logiki formalnej i ogólnej teorii mnogości,

³ Zagadnienia te są umieszczone w ogólnej teorii mnogości m.in. w L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt.

sformułowane w niej definicje, twierdzenia i dowody są, co nieuniknione, wzorowane na znanych opracowaniach, tj. zgodne pod względem wyników i zbliżone w sposobie ich przedstawienia⁴. Nie są jednak ich kompilacją, ponieważ różnią się nie tylko układem definicji i twierdzeń, lecz także ich sformułowaniami zapisanymi w jednolitej notacji (symbolice), komentarzami i przykładami, a często także sposobem uzasadniania twierdzeń (sposobem dowodzenia). Są także w książce merytorycznie nowe propozycje, jak algorytmiczna metoda, uzupełniająca znaną metodę wyszukiwania zależności definicyjnych między funktorami prawdziwościowymi; uproszczone metody sprawdzania poprawności logicznej wnioskowań ze zdaniem kategorycznymi.

W opracowaniach wyników logiki formalnej mniej jest także miejsca na odnoszenie się do innych prezentacji tych wyników, zwłaszcza krytyczne – dlatego odesłania do innych prac są nieliczne i zwykle nie są komentujące.

2. Zamieszczane w tekście odsyłacze do wyników przedstawionych w innych miejscach całego opracowania zagadnień z logiki wskazują najpierw – znakami *, ** i *** – na główne jego części, a następnie cyframi rzymskimi na rozdział danej części, po czym – cyframi arabskimi – na podrozdziały i ich paragrafy⁵.

2.1 Definicje (**D**), twierdzenia (**T**) i wnioski (**W**) – także aksjomaty (**A**), twierdzenia pomocnicze (**L**), metatezy (**MT**) – są numerowane odrębnie w każdym podrozdziale, zwykle kolejnymi liczbami (**D1**, **D2**, **D3**; ..., **T1**, **T2**, ...), są jednak także dodatkowe wskaźniki, np. **D1.1**, **D1.2**; **D6.a**,

⁴ Przyjęty w niniejszej książce dobór i układ zagadnień, a także sposób rozwijania rachunków logicznych jest wzorowany na opracowaniu L. Borkowskiego, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt. W wielu fragmentach korzystałem także z: A. Grzegorzczak, *Zarys logiki matematycznej*, Warszawa 1981; T. Batóg, *Podstawy logiki*, Poznań 2003; K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości. Wraz ze wstępem do opisowej teorii mnogości*, Warszawa 1978.

⁵ Zgodnie z tą umową symbolem * jest oznaczana pierwsza część całego opracowania, czyli: A. Jonkisz, *Zagadnienia semiotyki logicznej i ogólnej metodologii nauk*, dz. cyt.; znak ** będzie używany w odesłaniach do wyników zawartych w niniejszej książce, a *** w odsyłaczach informuje, że bieżące analizy są rozwinięte i uściśnione w części trzeciej, pt. *Zagadnienia syntaktyki i semantyki systemów dedukcyjnych* (w druku). Wyniki i ustalenia wskazywane w odesłaniach do innych części całego opracowania nie są niezbędne w lekturze niniejszej książki.

D6.b; T35.a, T35.b, T35.c; D6.a1, D6.a2; A1_{HB}, A2_{HB}, A3_{HB}; T1_{HB}, T2_{HB} – stosowane, gdy oznaczone w ten sposób wyniki są powiązane, jak na przykład definicje tego samego lub zbliżonych pojęć, grupa pokrewnych twierdzeń lub wniosków, aksjomaty lub tezy jednego systemu. Częściej stosowane (nie tylko w tym opracowaniu) definicje i twierdzenia oraz reguły wnioskowania (dołączania nowych wierszy do dowodu) będą oprócz oznaczeń wskazujących na ich miejsce w rozważaniach oznaczane także skrótami, które łatwiej jest skojarzyć z treścią definicji lub twierdzenia, np. **RO** wskazuje na regułę odrywania, **O \wedge** na regułę opuszczania kwantyfikatora dużego, **df \subset** na definicję relacji zawierania się zbiorów.

2.2 Odesłania, w dowodach lub uwagach, do oznaczanych symbolicznie wyników (definicji, twierdzeń, lematów, wniosków itp.) są zorganizowane następująco:

(i) wyniki, dla których wprowadzono symbol niezależny od ich miejsca w rozważaniach, są oznaczane danym symbolem (np. **df \subset**);

(ii) pozostałe wyniki:

– gdy wskazywany wynik został osiągnięty w bieżącym podrozdziale, jest oznaczany tylko swoim symbolem, np. **D3** to trzecia definicja, a **T2.1** to twierdzenie 2.1 aktualnego podrozdziału;

– gdy wynik pochodzi z innego podrozdziału, wtedy jego oznaczenie symboliczne jest poprzedzone skrótem (zapisanym drukiem zwykłym) wskazującym odpowiedni fragment opracowania, np. *RI.3: **D1.a** to definicja **1.a** w trzecim podrozdziale rozdziału pierwszego części pierwszej całego opracowania); **RIII.2: **T15** to piętnaste twierdzenie drugiego podrozdziału trzeciego rozdziału części drugiej (czyli niniejszej książki) itp. Takie same skróty wskazujące na miejsce w rozważaniach są również stosowane do wyników nienumerowanych;

(iii) znak ■ wskazuje, o ile to potrzebne, na zakończenie dowodu.

Podziękowania

Pragnę podziękować wszystkim osobom, które pomogły w opublikowaniu tej książki. Przede wszystkim Recenzentom za trafne uwagi. Uwzględniając je, usunąłem błędy dostrzeżone w tekście przesłanym do oceny, poprawiłem wiele sformułowań, a także uzupełniłem wcześniejszą wersję książki o nowe wyniki lub zagadnienia (m.in. logika

intuicjonistyczna, logiki pośrednie, antynomie teorii mnogości, informacji historyczne).

Książka ta nie mogłaby się ukazać bez wsparcia osób, które zdecydowały o przyznaniu środków na moje badania realizowane w Akademii Ignatianum w Krakowie (obecnie Uniwersytet Ignatianum) oraz bez pomocy pracowników Wydawnictwa, dzięki którym wyniki tych badań zostały opublikowane w niniejszej postaci.

Szczególnie podziękowania i wyrazy wdzięczności kieruję do dr Jolanty Koszteyn za pomoc w korekcie i formatowaniu wersji tekstu przekazanych do recenzji oraz do opracowania wydawniczego.

ROZDZIAŁ I

KLASYCZNY RACHUNEK ZDAŃ (KRZ)

Rozważania tego rozdziału dotyczą języka oraz metod budowania KRZ. Gdy mowa o KRZ, wtedy są przyjmowane charakterystyki logiki zwanej klasyczną, tj. logiki dwuwartościowej i ekstensjonalnej (zob. *RIII.1, *RV.4). W opisie języka KRZ, po ustaleniach co do słownika i składni, nacisk jest położony na semantyczne własności prawdziwościowych spójników KRZ, a zwłaszcza na związki definicyjne między spójnikami. W charakterystyce metod budowania jest uwzględniona, oparta na pojęciu tautologii, metoda rozstrzygania (tautologiczności formuł KRZ), a następnie metody dedukcyjne, czyli oparte na dowodzeniu: metoda założeniowa – obrona jako podstawowa nie tylko w budowaniu systemu KRZ, lecz w całym prezentowanym tu ujęciu logiki formalnej – oraz metoda aksjomatyczna¹.

1. Język KRZ

Jak wiadomo z ogólnych ustaleń dotyczących języka (*RI.1), reguły słownika i składni wyznaczają zbiór poprawnie zbudowanych wyrażeń dowolnego języka – także języków takich jak KRZ, tj. symbolicznych języków

¹ W tytule niniejszego rozdziału mowa – jak w innych prezentacjach logiki klasycznej – o klasycznym rachunku zdań, choć – uwzględniając różnorodność metod budowania, na którą nakłada się wielość symbolicznych języków, w których formuły systemu mogą być zapisane – ściślej jest mówić nie o rachunku, lecz o klasycznych rachunkach zdań. Monograficzne opracowanie KRZ jest w: W.A. Pogorzelski, *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii*, Warszawa 1975.

sztucznych. Dlatego w opisie języka KRZ jest najpierw określony jego słownik, tj. przyjęty w tych analizach symboliczny zapis wyrażeń elementarnych, oraz są uściślone reguły poprawnego budowania wyrażeń złożonych z wyrażeń podstawowych. Te wstępne, syntaktyczne ustalenia są następnie zastosowane w charakterystyce semantycznej terminów specyficznych KRZ, tj. używanych w nim spójników prawdziwościowych. Charakterystyka ta oprócz standardowych (matrycowych) definicji tych terminów zawiera także obszernie omówienie zależności definicyjnych między nimi, a zwłaszcza propozycję metody ustalania tych związków.

1.1 Charakterystyka syntaktyczna

Określenie słownika – uzupełnione umowami co do symboli używanych w metajęzyku – oraz reguł składniowych KRZ są podstawowe dla uściślenia pojęcia wyrażenia KRZ, czyli poprawnie zbudowanej jego formuły.

1.1.1 Słownik KRZ

Do słownika KRZ należą trzy rodzaje symboli:

- > symbole zdań: $p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots$. Symbole te to zmienne zdaniowe (reprezentują zdania), a przy tym – by dało się budować dowolnie długie formuły – przyjmujemy, że słownik KRZ zawiera nieskończoną liczbę takich zmiennych, które mogą być uzupełniane dowolnymi indeksami – traktowanymi jako część zmiennej (nie jako odrębny symbol)²;
- > symbole prawdziwościowych spójników, czyli stałych właściwych (specyficznych) dla KRZ. Należą do nich między innymi znaki: negacji (\sim), koniunkcji (\wedge), alternatywy zwykłej (\vee), alternatywy rozłącznej (\vee), implikacji (\Rightarrow), równoważności (\Leftrightarrow), binegacji (\Downarrow) (zob. *RV.4.2);
- > symbole pomocnicze, tj. nawiasy: $()$, $[\]$, $\{ \}$, ... – są używane, by zapisywane formuły były składniowo jednoznaczne.

² Mówiąc dokładniej, budowane są wyrażenia skończenie długie, lecz zakładamy, że mogą być budowane wyrażenia o dowolnej przeliczalnej liczbie symboli (o zbiorach przeliczalnych mowa w **RIV.3.2.2).

Jak wiadomo, metajęzyk jest używany do opisu języka (*RII.3). W symbolicznym słowniku metajęzyka KRZ będą używane:

- > cudzysłowowe nazwy jednostkowe wyrażeń KRZ, np.: „ p ” oznacza zmienną nazwową p ; „ $(p \Rightarrow q) \wedge p$ ” to jednostkowa nazwa formuły $(p \Rightarrow q) \wedge p$;
- > zmienne nazwowe: $\Phi, \Psi, \dots, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ – reprezentujące nazwy wyrażeń zdaniowych KRZ;
- > quasi-cudzysłowowe nazwy ogólne wyrażeń złożonych: np. $\lceil \sim \Phi \Rightarrow \Psi \rceil$ jest ogólną nazwą oznaczającą każdą formułę KRZ, której spójnikiem głównym jest implikacja, poprzednikiem implikacji jest negacja, a następnikiem jest dowolna formuła zdaniowa; w zakresie metajęzykowej nazwy $\lceil \Phi_1 \wedge \Phi_2 \rceil$ jest każda koniunkcja KRZ itd. Używanie metajęzykowych, quasi-cudzysłowowych nazw ogólnych jest szczególnie przydatne w metajęzykowych dowodach twierdzeń dotyczących dowolnych wyrażeń KRZ lub wyrażeń o budowie wskazanej nazwą quasi-cudzysłowową.

1.1.2 Składnia i wyrażenia/formuły KRZ

Wyrażenia KRZ, czyli jego funkcje (formuły) zdaniowe, to poprawnie zbudowane ciągi zmiennych zdaniowych i funktorów prawdziwościowych, a w notacji tu przyjętej także nawiasów.

Zwiężle, choć nie całkiem dokładnie, można powiedzieć, że „zbudowane poprawnie” to znaczy:

- (i) wyłącznie z symboli słownika;
- (ii) zgodnie z kategorią użytych w wyrażeniu funktorów;
- (iii) w sposób syntaktycznie jednoznaczny.

Określenie to dobrze wskazuje warunki dla formuł poprawnie zbudowanych. Dla ilustracji warto je zastosować do oceny poprawności takich na przykład wyrażeń (są oddzielone średnikami):

$$p_1; \quad p \sim q; \quad z \sim; \quad \wedge q; \quad p \vee q \Rightarrow r; \quad (p = q) \Leftrightarrow (q = p).$$

Stosując wymagania (i)–(iii), można stwierdzić, pomijając znak cudzysłowu w nazwach tych napisów, że:

- na pewno poprawna jest formuła p_1 , ponieważ: nie ma w niej innych symboli niż dopuszczalne przez reguły słownika, warunek budowania formuł zgodnie z kategorią funktorów jest (pusto) spełniony, bo nie ma w tym napisie symboli funktorów,

- w końcu – napis ten (pojedyncza zmienna zdaniowa) jest syntaktycznie jednoznaczny;
- formuła $p \sim g$ spełnia warunki pierwszy i trzeci, lecz łamie wymaganie drugie, funktor negacji jest bowiem jednoargumentowy;
 - drugi warunek nie jest spełniony także w napisie $z \sim$, bo w przyjętej notacji negacja jest przedzdaniowa (przyzdaniowa), a nie zazdaniowa;
 - warunek ten nie jest także spełniony w ciągu symboli $\wedge q$, bo koniunkcja jest funktorem dwuargumentowym;
 - formuła $p \vee q \Rightarrow r$ spełnia dwa pierwsze warunki, lecz nie spełnia trzeciego, bo może być odczytana jako alternatywa $p \vee (q \Rightarrow r)$ albo jako implikacja $(p \vee q) \Rightarrow r$ – każdy z tych uściślonych napisów jest poprawny;
 - ciąg symboli $(p = q) \Leftrightarrow (q = p)$ układa się w napis spełniający warunki drugi i trzeci, lecz łamie reguły słownika, bo nie ma w słowniku symbolu $=$.

Dla ujednocznienia składniowego napisów złożonych można przyjąć umowy co do siły wiązania funktorów, np. że funktory $\sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ są ułożone według malejącej siły wiązania argumentów – zgodnie z tą umową formuła $p \vee q \Rightarrow r$ jest składniowo określona, czyli jest implikacją. W niniejszej prezentacji klasycznego rachunku zdań KRZ i kolejnych rachunków zakładających KRZ będzie jednak stosowana notacja wsparta na posługiwaniu się nawiasami, z jednym tylko wyjątkiem, dotyczącym negacji pojedynczej zmiennej, negacji takiej negacji itd.: zamiast $\sim(p)$, $\sim(\sim(p))$ będą stosowane prostsze napisy $\sim p$, $\sim\sim p$ itd. – także gdy negacja jest częścią bardziej złożonych formuł, np. $\sim p \vee q^3$.

³ Jednoznaczność składniową osiąga się także w prosty sposób w zaproponowanej przez J. Łukasiewicza notacji beznawiasowej, zwanej polską. Na przykład alternatywa $p \vee (q \Rightarrow r)$ jest zapisywana jako $ApCpr$, implikacja $(p \vee q) \Rightarrow r$ to $CApqr$, a w napisach tych A oraz C to symbole funktora alternatywy i implikacji (dla uproszczenia napisów też są zapisywane kursywą, choć to stałe KRZ), po których są zapisywane ich argumenty. Notacja beznawiasowa jest zgodna z zapisami stosowanymi w analizie kategoryjnej wyrażeń (*RV.3), ma także inne istotne przewagi (zob. J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, Warszawa 1985, s. 93–96), ponieważ jednak nawiasowa ułatwia uchwycenie struktury formuł zwykle analizowanych w logice i jej zastosowaniach, dlatego dziś jest w podręcznikach stosowana niemalże wyłącznie (beznawiasowa jest np. w: T. Czeżowski, *Logika. Podręcznik dla studiujących nauki filozoficzne*, Warszawa 1968 oraz L. Gumański, *Wprowadzenie w logikę współczesną*, Warszawa 1990).

Uściśleniem wyżej sformułowanych warunków (i)–(iii) jest definicja, w której są zastosowane ustalenia co do słownika metajęzyka KRZ:

D1 Wyrażeniami (formułami) KRZ są wszystkie i tylko:

- (i) pojedyncze zmienne zdaniowe;
- (ii) wyrażenia otrzymane z dowolnej formuły KRZ przez poprzedzenie tej formuły znakiem negacji, tzn. jeżeli Φ jest formułą KRZ, to również $\sim(\Phi)$ jest formułą KRZ;
- (iii) wyrażenia otrzymane z dowolnych dwóch formuł KRZ przez ich połączenie znakiem spójnika prawdziwościowego, tzn. jeśli są formułami Φ oraz Ψ , to są formułami także wyrażenia: $(\Phi) \wedge (\Psi)$, $(\Phi) \vee (\Psi)$, $(\Phi) \underline{\vee} (\Psi)$, $(\Phi) / (\Psi)$, $(\Phi) \Rightarrow (\Psi)$, $(\Phi) \Leftrightarrow (\Psi)$, $(\Phi) \Downarrow (\Psi)$ itd.

Nawiasy w zapisie warunku (iii) są potrzebne, ponieważ bez nich mogłyby być niejednoznaczne składniowo złożone formuły uzyskane w wyniku podstawienia za metajęzykowe zmienne Φ i Ψ złożonych formuł KRZ.

W charakterystyce własności rachunków logicznych są jednak niezbędne definicje wyrażenia logicznego indukcyjne, dają one bowiem podstawę dowodom twierdzeń spełnionych w całym zbiorze, dla którego wprowadza się taką definicję, o ile jest on dobrze uporządkowany (*RVII.1.3). W badaniach metalogicznych znaczy to, że otwierają możliwość dowodzenia twierdzeń dotyczących własności wszystkich wyrażeń – rachunku konkretnego albo dowolnego.

W definicji indukcyjnej wyrażenia (formuły) KRZ jest użyte pojęcie rzędu wyrażenia, zakładające dobre uporządkowanie wyrażeń danego rachunku ze względu na rząd. Zwięźle można stwierdzić, że rząd konkretnego wyrażenia KRZ jest o 1 stopień wyższy od rzędu tego spośród argumentów funktora głównego danego wyrażenia, którego rząd jest najwyższy. Na przykład wyrażenie „ $p \vee \sim p$ ” jest rzędu trzeciego, bo „ $\sim p$ ” jest formułą rzędu drugiego; a formuła „ $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$ ” jest czwartego rzędu, bo następnik tej implikacji, tj. wyrażenie „ $\sim p \Rightarrow q$ ” jest rzędu trzeciego.

D2

- (i) Φ jest wyrażeniem 1. rzędu KRZ *wtw* Φ jest zmienną zdaniową;
- (ii) Φ jest wyrażeniem k -tego rzędu *wtw* istnieją takie wyrażenia Φ_1 i Φ_2 rzędów niższych od k , że Φ jest identyczne z $\lceil \sim \Phi_1 \rceil$ albo z jednym spośród wyrażeń:

$\lceil \Phi_1 \wedge \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \vee \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \underline{\vee} \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \Downarrow \Phi_2 \rceil,$
 $\lceil \Phi_1 / \Phi_2 \rceil$ itd.;

- (iii) Φ jest wyrażeniem KRZ *wtw* istnieje taka liczba naturalna n , że Φ jest wyrażeniem n -tego rzędu KRZ.

Definicja indukcyjna **D2** jest fundamentem dowodzenia twierdzeń dotyczących wyrażeń KRZ – dowody takie są indukcyjne ze względu na rząd wyrażenia. W kolejnych krokach takiego uzasadniania twierdzeń:

- 1) dowodzimy, że twierdzenie T jest prawdziwe dla wyrażeń 1. rzędu, tj. dla zmiennych zdaniowych;
- 2) zakładamy, że Φ jest wyrażeniem KRZ k -tego rzędu. Zgodnie z **D2** istnieją wtedy takie wyrażenia Φ_1 oraz Φ_2 rzędów niższych od k , że $\Phi = \lceil \sim \Phi_1 \rceil$ albo jest identyczne z jednym spośród wyrażeń: $\lceil \Phi_1 \wedge \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \vee \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \underline{\vee} \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \Downarrow \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 / \Phi_2 \rceil$ itd.;
- 3) przyjąwszy – jako założenie indukcyjne – że twierdzenie T jest prawdziwe dla wyrażeń Φ_1 oraz Φ_2 , okazujemy, że z założenia tego wynika prawdziwość T dla wyrażenia Φ , czyli dla $\lceil \sim \Phi_1 \rceil, \lceil \Phi_1 \wedge \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \vee \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \underline{\vee} \Phi_2 \rceil$ itd.). Poniższe proste przykłady ilustrują zastosowanie **D2** w dowodach indukcyjnych twierdzeń, w których mowa o ogólnych własnościach wyrażeń KRZ.

(*) Każde wyrażenie KRZ jest zbudowane ze skończonej liczby symboli.

Dowód:

- 1) Twierdzenie to jest prawdziwe dla wyrażeń KRZ 1. rzędu, tj. dla zmiennych zdaniowych, są one bowiem zbudowane z jednego symbolu – także zmienne indeksowane;
- 2) Jeżeli Φ jest wyrażeniem KRZ k -tego rzędu, to istnieją takie wyrażenia Φ_1 oraz Φ_2 rzędów niższych od k , że $\Phi = \lceil \sim \Phi_1 \rceil$ albo jest identyczne z jednym spośród wyrażeń: $\lceil \Phi_1 \wedge \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \vee \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \underline{\vee} \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \Downarrow \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 / \Phi_2 \rceil, \dots$
- 3) założmy (założenie indukcyjne), że (*) jest spełnione dla Φ_1 oraz Φ_2 . Da się okazać, że (*) jest też wtedy spełnione przez Φ . Niech – zgodnie z założeniem indukcyjnym – Φ_1 jest zbudowane z k symboli, a Φ_2 z m symboli. Wtedy:

jeśli $\Phi = \lceil \sim \Phi_1 \rceil$, to wyrażenie Φ jest zbudowane z $k + 1$ symboli;

jeśli Φ jest identyczne z jednym spośród wyrażeń: $\lceil \Phi_1 \wedge \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \vee \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \underline{\vee} \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 \Downarrow \Phi_2 \rceil, \lceil \Phi_1 / \Phi_2 \rceil, \dots$, to Φ jest zbudowane z $k + m + 1$ symboli.

Ponieważ rząd k jest dowolny (skończony), tj. $k \in \mathcal{N}$, więc dowolne wyrażenie Φ KRZ jest zbudowane ze skończonej liczby symboli.

(**) W każdym wyrażeniu KRZ bez negacji liczba wystąpień symboli zmiennych jest o 1 większa od liczby wystąpień symboli funktorów.

Dowód:

1) Twierdzenie jest prawdziwe dla wyrażeń KRZ 1. rzędu, tj. dla pojedynczych zmiennych zdaniowych, bo w nich liczba wystąpień zmiennych = 1, a liczba wystąpień symboli funktorów = 0;

2) Jeżeli Φ jest wyrażeniem KRZ k -tego rzędu, to istnieją takie wyrażenia Φ_1 oraz Φ_2 rzędów niższych od k , że Φ – jako że jest wyrażeniem bez negacji – jest identyczne z jednym spośród wyrażeń: $\lceil \Phi_1 \wedge \Phi_2 \rceil$, $\lceil \Phi_1 \vee \Phi_2 \rceil$, $\lceil \Phi_1 \underline{\vee} \Phi_2 \rceil$, $\lceil \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \rceil$, $\lceil \Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2 \rceil$, $\lceil \Phi_1 \Downarrow \Phi_2 \rceil$, $\lceil \Phi_1 / \Phi_2 \rceil$, ...

3) założmy (założenie indukcyjne), że (**) jest spełnione dla Φ_1 oraz Φ_2 ; i niech liczba wystąpień symboli funktorów w $\Phi_1 = k$, a w $\Phi_2 = m$, co znaczy, że symboli zmiennych w Φ_1 jest $k + 1$, a w Φ_2 jest $m + 1$.

Da się sprawdzić, że (**) jest też wtedy spełnione przez Φ . Ponieważ mowa w (**) o wyrażeniach bez negacji, więc jeśli Φ jest identyczne z jednym spośród wyrażeń: $\lceil \Phi_1 \wedge \Phi_2 \rceil$, $\lceil \Phi_1 \vee \Phi_2 \rceil$, $\lceil \Phi_1 \underline{\vee} \Phi_2 \rceil$, $\lceil \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \rceil$, $\lceil \Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2 \rceil$, $\lceil \Phi_1 \Downarrow \Phi_2 \rceil$, $\lceil \Phi_1 / \Phi_2 \rceil$, ..., to w wyrażeniu Φ jest $k + m + 1$ symboli funktorów oraz $k + 1 + m + 1$ symboli zmiennych.

Skoro rząd k jest dowolny (skończony), tj. $k \in \mathcal{N}$, więc w dowolnym wyrażeniu KRZ Φ zbudowanym bez negacji jest o jeden więcej symboli zmiennych niż symboli funktorów.

1.2 Własności semantyczne spójników prawdziwościowych

Podstawowe dla ogólnego ujęcia spójników specyficznych dla KRZ jest określenie funktora prawdziwościowego, które warto tu przypomnieć:

*RV.4.1: **D1** Funktor zdaniotwórczy jest prawdziwościowy wtedy i tylko, gdy wartość logiczna każdego zdania, w którym dany funktor jest łącznikiem głównym, zależy wyłącznie od wartości logicznej jego argumentów w danym zdaniu.

1.2.1 Pojęcie funkcji prawdziwościowej i wartościowania

Pojęcie funktora prawdziwościowego wskazuje na sposób definiowania spójników KRZ. Mianowicie w definicji dowolnego funktora prawdziwościowego trzeba jednoznacznie ustalić zależność między wartością

logiczną zdań związanych przez dany funktor, czyli jego argumentów, a wartością logiczną otrzymanego zdania złożonego. Jednoznaczne ustalenia relacji między układem wartości logicznych argumentów a wartością logiczną zdania to zdefiniowanie relacji, która poszczególnym układom wartości dla argumentów przyporządkowuje jedną spośród wartości logicznych. Inaczej mówiąc, chodzi o funkcję, czyli relację jednoznaczną, której dziedziną są układy wartości argumentów spójnika, a przeciwdziedziną, czyli zbiorem wartości funkcji, jest zbiór wartości logicznych. Relacja, która jednoznacznie przyporządkowuje elementy pierwszego z tych zbiorów, czyli uporządkowane w kolejności argumentów układy ich wartości logicznych, elementom zbioru wartości logicznych, jest zwana funkcją prawdziwościową, a ciągi wartości logicznych są nazywane wartościami.

D3.

- a Funkcje n -argumentowe o argumentach ze zbioru wartości logicznych A i wartościach w tym zbiorze to funkcje prawdziwościowe.
- b Wartościowania to nieskończone ciągi wartości logicznych czerpanych ze zbioru A .

W **D3** mowa, dla ogólności ujęcia, o dowolnym zbiorze wartości logicznych A , mimo że w logice klasycznej zbiór ten jest dwuelementowy: $A = \{1, 0\}$ ⁴. Z tych samych względów mowa o funkcjach n -argumentowych, czyli o dowolnej liczbie zmiennych, oraz o nieskończonych ciągach wartości logicznych, choć w zastosowaniach tej definicji do formuł KRZ są rozważane funkcje prawdziwościowe jedno- i dwuargumentowe, a wartościowania są zawężane do tych tylko wyrazów ciągu, które odpowiadają kolejnym zmiennym zdaniowym w danej formule, czyli zwykle do ciągów kilkuelementowych.

W kontekście tego ogólnego ujęcia spójniki prawdziwościowe KRZ są identyfikowane jako określone funkcje prawdziwościowe: funktory jednoargumentowe jako funkcje przyporządkowujące każdemu elementowi z $\{1, 0\}$ odpowiadającą mu wartość z $\{1, 0\}$; spójniki dwuargumentowe jako funkcje wiążące każdą parę uporządkowaną utworzoną z elementów zbioru $\{1, 0\}$ z wartością w zbiorze $\{1, 0\}$; funktory trójargumentowe to funkcje prawdziwościowe, które przypisują wartość z $\{1, 0\}$ każdej uporządkowanej trójce utworzonej z elementów zbioru $\{1, 0\}$ itd.

⁴ Ogólniejsze rozumienie zbioru A jest potrzebne w logikach wielowartościowych.

Na przykład negacja \sim to funkcja prawdziwościowa, której wartością dla 1 jest 0, a dla argumentu 0 wartość 1, co można zapisać, stosując znak \sim również jako symbol funkcji, jako: $\sim(1) = 0$ i $\sim(0) = 1$ albo przedstawić funkcję \sim jako zbiór, w którym jej argumenty są połączone w pary z przyporządkowanymi im przez tę funkcję wartościami:

$$\sim = \{ \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle \}.$$

Koniunkcja \wedge to funkcja prawdziwościowa dwuargumentowa, która ma wartość 1, tylko gdy oba jej argumenty są jedynkami: $\wedge(\langle 1, 1 \rangle) = 1$, $\wedge(\langle 1, 0 \rangle) = 0$, $\wedge(\langle 0, 1 \rangle) = 0$, $\wedge(\langle 0, 0 \rangle) = 0$, czyli funkcja ta jest reprezentowana zbiorem:

$$\wedge = \{ \langle \langle 1, 1 \rangle, 1 \rangle, \langle \langle 1, 0 \rangle, 0 \rangle, \langle \langle 0, 1 \rangle, 0 \rangle, \langle \langle 0, 0 \rangle, 0 \rangle \}.$$

Analogicznie są reprezentowane inne spójniki prawdziwościowe KRZ, można także w tym ujęciu określać spójniki więcej niż dwuargumentowe, a także uogólnić analizy na zbiory wartości logicznych inne niż zbiór $\{1, 0\}$.

Wartościowania ograniczone odpowiednio do liczby zmiennych zdaniowych w danej formule KRZ są dla formuł z jedną zmienną ciągami jednoelementowymi o wyrazach czerpanych z $\{1, 0\}$, dla formuł z dwiema zmiennymi to ciągi dwuwyrzowe, tj. $\langle 1, 1 \rangle$, $\langle 1, 0 \rangle$, $\langle 0, 1 \rangle$ i $\langle 0, 0 \rangle$, gdy zmienne są trzy, wartościowań jest osiem, bo tyle jest ciągów trzywyrzowych, których elementy są brane wyłącznie z $\{1, 0\}$, a przy tym elementy mogą się w ciągu powtarzać i istotna jest ich kolejność – czyli tyle jest trzelementowych wariacji z powtórzeniami tworzonych ze zbioru $\{1, 0\}$: $\langle 1, 1, 1 \rangle$, $\langle 1, 1, 0 \rangle$, $\langle 1, 0, 1 \rangle$, $\langle 0, 1, 1 \rangle$, $\langle 0, 0, 1 \rangle$, $\langle 0, 1, 0 \rangle$, $\langle 1, 0, 0 \rangle$, $\langle 0, 0, 0 \rangle$ itd. (stosując symbole dla zbioru uporządkowanego, można w zapisach pominąć indeks wskazujący na miejsce wyrazu w ciągu).

Korzystając z tych pojęć, można określić funkcję, która przypisuje dowolnej formule KRZ i konkretnemu jej wartościowaniu wartość logiczną ze zbioru $\{1, 0\}$. Funkcja ta, oznaczana zwykle symbolem V , jest określona dla par $\langle \Phi, w_i \rangle$, w których Φ to formuła KRZ, a w_i to i -te spośród wszystkich wartościowań danej funkcji. Dla formuł KRZ $V(\langle \Phi, w_i \rangle) = 1$ albo $V(\langle \Phi, w_i \rangle) = 0$.

1.2.2 Matrycowe definicje spójników prawdziwościowych

Warunki definiujące dany spójnik prawdziwościowy są zwykle prezentowane w tabeli (matrycy), w której są w sposób wyczerpujący i jednoznaczny określone zależności między wartościami logicznymi argumentów

spójnika a wartością logiczną zdania złożonego, w którym dany spójnik jest łącznikiem głównym. Zamierzając do ogólniejszego opisu takiego ujęcia – które trafnie można nazwać klasycznym – warto spojrzeć ponownie (*RV.4.2) na definicje tabelkowe (matrycowe) tych spójników KRZ, które mają odpowiedniki w języku naturalnym.

***RV.4.2: D3.a**

Φ	$\sim\Phi$
1	0
0	1

***RV.4.2: D3.b**

Φ	Ψ	\wedge	\vee	$\underline{\vee}$	\Rightarrow	\Leftrightarrow	\Downarrow
1	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1

W pierwszej części tych tabel są kolumny, w których są wartości logiczne argumentów definiowanego funktora: w definicji negacji, funktora jednoargumentowego, jest jedna taka kolumna, dla spójników dwuargumentowych są dwie itd. W poszczególnych wierszach kolumn tej części tabel są poszczególne wartościowania formuły (funkcji zdaniowej), w której dany spójnik jest funktorem głównym, a w kolumnie, w której nagłówku jest symbol spójnika, jest wskazana wartość logiczna tej formuły dla danego wartościowania – dlatego można tę kolumnę nazwać definiującą dany spójnik, o ile jest ustalona kolejność wartościowań.

Zgodnie z tą tabelą definiującą można powiedzieć, że:

- koniunkcja jest prawdziwa tylko wtedy, gdy oba jej argumenty są prawdziwe (w pozostałych sytuacjach jest fałszywa);
- alternatywa zwykła jest fałszywa tylko wtedy, gdy oba jej składniki są fałszywe (w pozostałych sytuacjach jest prawdziwa); spójnik *lub* jest więc rozumiany w sensie *co najmniej jedno z dwojga ... lub ...*;
- alternatywa rozłączna jest prawdziwa tylko wtedy, gdy prawdziwy jest dokładnie jeden z jej składników: łącznik *albo* jest więc rozumiany w sensie *dokładnie jedno z dwojga ... albo ...*;

- implikacja jest fałszywa, tylko gdy prawdziwy jest jej poprzednik i jednocześnie fałszywy jest następnik;
- równoważność jest prawdziwa tylko dla argumentów o tej samej wartości logicznej;
- binegacja jest prawdziwa, tylko gdy oba jej zdania składowe są fałszywe.

Uogólnienie ustaleń widocznych w powyższych definicjach polega na uwzględnieniu wszystkich możliwych prawdziwościowych funktorów: jednoargumentowych, dwuargumentowych itd. Ponieważ w KRZ zbiór wartości logicznych $A = \{1, 0\}$, liczebność $|A| = 2$, więc:

- > liczba wartościowań = liczbie wierszy w tabelach definiujących = 2^n , gdzie n to liczba argumentów spójnika (zmiennych zdaniowych w formule). Chodzi bowiem o liczbę zestawień n -elementowych, tworzonych w logice dwuwartościowej z dwóch tylko elementów, tj. 1 i 0; zestawień, w których istotna jest kolejność jedynek i zer oraz symbole te mogą się powtarzać dowolną liczbę razy. W kombinatoryce zestawienia takie są zwane wariacjami z powtórzeniami, a wzór określający liczbę takich zestawień to 2^n ;
- > liczba prawdziwościowych funktorów n -argumentowych = liczbie kolumn = 2^w , gdzie w to liczba wartościowań (liczba wierszy). Jest to bowiem liczba sposobów wypełnienia jedynekami i zerami wierszy w kolejnych kolumnach – przy czym również istotna jest kolejność i symbole 1 i 0 mogą się powtarzać, czyli – liczba wariacji z powtórzeniami. Liczba wszystkich możliwych funktorów n -argumentowych jest więc równa 2 do potęgi $w = 2^n$, czyli 2^{2^n} .

Ustalenia zgodne z tymi ogólnymi prawidłowościami są dla spójników jednoargumentowych następujące: liczba wartościowań $w = 2^1 = 2$, liczba spójników prawdziwościowych $2^w = 2^2 = 4$. Oto ich definicje.

D4

Φ	<i>vr</i>	<i>as</i>	\sim	<i>fl</i>
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Opisując „działanie” zdefiniowanych w tej tabeli funkcji prawdziwościowych można stwierdzić, że zdanie poprzedzone funktorem *vr* (skrót od łac. *verum*) jest zawsze prawdziwe, funktor *as* (łac. *assertio*) nie zmienia wartości logicznej swojego argumentu, negacja \sim zmienia na wartość

przeciwną, a wartością funkcji *fl* (łac. *falsum*) jest 0, niezależnie od wartości logicznej jej argumentu.

Natomiast dla spójników dwuargumentowych liczba wartościowań $w = 2^2 = 4$, a spójników prawdziwościowych jest $2^w = 2^4 = 16$. Oto ich definicje.

D5

Φ	Ψ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0
		∨			⇒ /			⇔			⊥ ↓				∧		

Funktory 2, 4, 7, 11, 12 i 15 – dodatkowo oznaczone symbolami użytymi już w *RV.4.2: **D3.a** i *RV.4.2: **D3.b** – mają swoje odpowiedniki w spójnikach języka naturalnego. Odrębnym symbolem jest oznaczony ponadto funktor 5, który będzie nazywany dysjunkcją, jako że termin ten dobrze wskazuje na zaprzeczenie koniunkcji⁵.

W opisie metody ustalania związków definicyjnych między funktorami będą stosowane (w kolejnym paragrafie) pewne umowy terminologiczne dotyczące funktorów określonych w **D5**. Mianowicie funktory 2–5 oraz 12–15, czyli zdefiniowane kolumnami (ciągami) wartości logicznych, w których są trzy jedynki i zero albo odwrotnie, będą nazywane funktorami typu 1/3; funktory od 6 do 11 są kategorii 2/2, a funktory pierwszy i szesnasty – rodzaju 4/0. Funktory o symetrycznych kolumnach definiujących to różniące się tym tylko, że w miejscu 1 w danej kolumnie jest 0 w drugiej, a zamiast 0 jest w drugiej 1 (symetryczne są kolumny 1 i 16, 2 i 12, 3 i 13 itd.).

Liczba wartościowań rośnie bardzo szybko (potęgowo) wraz z liczbą argumentów funktora. W zakresie spójników trójargumentowych

⁵ Spójnik ten jest także nazywany dysjunkcją Sheffera, funktorem Sheffera lub kreską Sheffera – od H. Sheffera, który w 1913 r. wprowadził pojęcie dysjunkcji. Spójnik ten jest jednym z dwóch funktorów (obok binegacji ↓), który wystarcza do zdefiniowania wszystkich pozostałych spójników prawdziwościowych (zob. **T6** w niniejszym podrozdziale) oraz został użyty jako jedyny termin pierwotny w opartym na jednym aksjomacie systemie KRZ (zob. **RI.4.3).

liczba wartościowań $w = 2^3 = 8$, liczba spójników prawdziwościowych to $2^w = 2^8 = 256$ – itd. Utrudnia to nie tylko definiowanie spójników więcej niż dwuargumentowych, lecz także stosowanie pełnej metody zero-jedynkowej (*RIX.1.2.2) do sprawdzania wartości logicznej formuł z większą liczbą zmiennych. Może być w tym przydatna prosta metoda wypisywania wartościowań. Otóż, by w sposób systematyczny wyczerpać możliwe wartościowania formuły o n zmiennych zdaniowych $p_i, 1 \leq i \leq n$, należy w kolumnie i pod daną zmienną wpisać na przemian 2^{i-1} razy jedynkę i 2^{i-1} razy zero – aż do wyczerpania liczby wierszy. Na przykład dla formuły z trzema zmiennymi p_1, p_2, p_3 uzyskuje się następujący ciąg wartościowań poszczególnych zmiennych, a tym samym ciąg wierszy w części tabeli wskazującej na wartościowania (w ostatnim wierszu są wzory na liczbę powtórzeń jedynek i zer):

p_1	p_2	p_3
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	1
1	1	0
0	1	0
1	0	0
0	0	0
$2^{1-1} = 2^0 = 1 \times$	$2^{2-1} = 2^1 = 2 \times$	$2^{3-1} = 2^2 = 4 \times$

Tę ogólną metodę da się zastosować także do spójników jedno- i dwuargumentowych (zmieni się – w porównaniu z powyższymi tabelami – kolejność wartościowań w wierszach), a także do formuł z dowolną liczbą zmiennych.

1.2.3 Związki definicyjne między funktorami prawdziwościowymi

Tytuł paragrafu ma wskazywać, że rozważania są ogólniejsze, choć ich wyniki, a zwłaszcza zaproponowana w nich metoda ustalania związków definicyjnych, są wykorzystywane przede wszystkim w zakresie spójników KRZ.

Najprostsze związki definicyjne są do znalezienia bezpośrednio w tabelach **D4** i **D5**. Chodzi o definicje uzyskane wyłącznie w wyniku użycia negacji. Zależności takie podpadają pod schemat, w którym F_1, F_2, \dots, F_{16} to symboliczne nazwy funktorów z tabeli **D5**.

(*) $(\Phi F \Psi) wtw \sim (\Phi F' \Psi)$,

gdzie $F, F' \in \{vr, as, \sim, fl\}$ lub $F, F' \in \{F_1, F_2, \dots, F_{16}\}$.

Konkretyzacje schematu (*), które są do odczytania w tych tabelach, to (w kolejności funktorów):

$$vr(p) \Leftrightarrow \sim fl(p); as(p) \Leftrightarrow \sim \sim (p)$$

$$p F_1 q \Leftrightarrow \sim (p F_{16} q); p F_2 q \Leftrightarrow \sim (p F_{12} q); p F_3 q \Leftrightarrow \sim (p F_{13} q);$$

$$p F_4 q \Leftrightarrow \sim (p F_{14} q); p F_5 q \Leftrightarrow \sim (p F_{15} q); p F_6 q \Leftrightarrow \sim (p F_8 q);$$

$$p F_7 q \Leftrightarrow \sim (p F_{11} q); p F_8 q \Leftrightarrow \sim (p F_6 q); p F_9 q \Leftrightarrow \sim (p F_{10} q);$$

$$p F_{10} q \Leftrightarrow \sim (p F_9 q); p F_{11} q \Leftrightarrow \sim (p F_7 q), \dots, p F_{16} q \Leftrightarrow \sim (p F_1 q).$$

Definicje tego rodzaju będą oznaczane jako $F|F', \sim$. Napis ten ma wskazywać, że dany funktor F został (ma być) zdefiniowany wyłącznie przez funktor F' i negację. Warto zauważyć, że definicje rodzaju $2/2|2/2, \sim$ – czyli takie, w których funktor z grupy $2/2$ jest definiowany przez inny funktor z tej grupy i negację – są wprawdzie możliwe tylko między parami funktorów o symetrycznych kolumnach definiujących, czyli funktorami, które da się związać definicyjnie, stosując schemat $(p F q) \Leftrightarrow \sim (p F' q)$, nie znaczy to jednak, że każda definicja rodzaju $2/2|2/2, \sim$ podpada po ten schemat. Na przykład definicją $\vee| \Leftrightarrow, \sim$ jest nie tylko podpadająca pod schemat (*) równoważność $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim (p \Leftrightarrow q)$, lecz także $(p \vee q) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$ oraz $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow \sim q)$. Podobnie: $p F_6 q \Leftrightarrow \sim (p F_8 q) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\sim p F_8 q) \Leftrightarrow (\sim p F_8 \sim q)$ oraz $p F_9 q \Leftrightarrow \sim (p F_{10} q) \Leftrightarrow (p F_{10} \sim q) \Leftrightarrow (\sim p F_{10} \sim q)$.

W ogólnym ujęciu związków definicyjnych podstawowe jest następujące określenie.

D6 n -argumentowy funktor prawdziwościowy F jest definiowalny za pomocą funktorów F_1, \dots, F_k *wtw* istnieje takie wyrażenie zdaniowe $\Phi(F_1, \dots, F_k; p_1, \dots, p_n)$ zapisane wyłącznie za pomocą zmiennych zdaniowych p_1, \dots, p_n oraz funktorów F_1, \dots, F_k , że prawdziwa jest równoważność: $F(p_1, \dots, p_n) \Leftrightarrow \Phi(F_1, \dots, F_k; p_1, \dots, p_n)$.

Aby więc okazać definiowalność, o której mowa w **D6**, a która będzie skrótowo zapisywana jako $F|F_1, \dots, F_k$, wystarczy znaleźć wyrażenie $\Phi(F_1, \dots, F_k; p_1, \dots, p_n)$, tj. definiens prawdziwej równoważności:

$$F(p_1, \dots, p_n) \Leftrightarrow \Phi(F_1, \dots, F_k; p_1, \dots, p_n).$$

Ogólne prawidłowości dotyczące definiowalności rozumianej jak w **D6** są sformułowane w kolejnych twierdzeniach (**T1–T4**); w kontekście tych twierdzeń są opisane metody osiągania zgodnych z nimi definicji oraz podane przykłady zastosowania tych metod.

T1 Każdy funktor prawdziwościowy F jest definiowalny przez koniunkcję, alternatywę i negację, czyli jest tak, że $F|\wedge, \vee, \sim$.

Zgodnie z **D6** znaczy to, że dla dowolnego n -argumentowego funktora prawdziwościowego F istnieje taka formuła zdaniowa $\Phi(\wedge, \vee, \sim; p_1, \dots, p_n)$, że prawdziwa jest równoważność: $F(p_1, \dots, p_n) \Leftrightarrow \Phi(\wedge, \vee, \sim; p_1, \dots, p_n)$.

Znana jest ogólna metoda znajdowania definiensa podpadającego pod schemat równoważności: $F(p_1, \dots, p_n) \Leftrightarrow \Phi(\wedge, \vee, \sim; p_1, \dots, p_n)$, warto jednak opisać ją dokładniej⁶. Wyrażenie definiujące osiąga się w dwóch krokach. **(i)** Poszczególnym wierszom kolumny definiującej funktor F przyporządkowujemy koniunkcję, w której jest dany argument funktora F , o ile w danym wierszu ma on wartość jeden, albo jego negację, gdy ma wartość zero. Uzyskana w ten sposób kolumna (ciąg) – będzie nazywana kolumną koniunkcji prawdziwych (w tabelach oznaczana jako $\wedge = 1$) – ma, co oczywiste, tyle wierszy, ile jest wartościowań, czyli dwa wiersze dla funktorów jednoargumentowych, cztery dla dwuargumentowych itd.

(ii) Tworzymy wyrażenie definiujące $\Phi(\wedge, \vee, \sim; p_1, \dots, p_n)$ w sposób następujący:

– jeśli w kolumnie definiującej funktor F jest co najmniej jedna jedynka, to wyrażeniem definiującym jest alternatywa tych koniunkcji prawdziwych, które są w wierszu, w którym funktor definiowany F ma wartość jeden: jeśli jest tylko jeden taki wiersz, alternatywa jest jednoczłonowa, jeśli są dwie jedynki, jest dwuczłonowa itd.;

– jeśli w kolumnie definiującej funktor F nie ma jedynki, to wyrażeniem definiującym jest negacja alternatywy wszystkich koniunkcji prawdziwych, czyli (równoważnie) koniunkcja negacji kolejnych (wszystkich) koniunkcji tego ciągu.

Reguły składające się na metodę tworzenia definicji rodzaju $F|\wedge, \vee, \sim$ są zebrane w poniższej tabeli, uproszczonej w sposób właściwy dla funktorów dwuargumentowych.

⁶ Zob. np. L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 66.

Metoda definiowana $F|\wedge, \vee, \sim$

p	q	$\wedge = 1$	F	definiens $\Phi(\wedge, \vee, \sim; p, q)$ jest:
1	1	$p \wedge q$	*	(i) alternatywą koniunkcji z tych wierszy kolumny $\wedge = 1$, w których w kolumnie dla F wartość * = 1; (ii) negacją alternatywy wszystkich koniunkcji z kolumny $\wedge = 1$, czyli (równoważnie) koniunkcją negacji wszystkich tych koniunkcji, o ile w każdym wierszu kolumny dla F wartość * = 0.
1	0	$p \wedge \sim q$	*	
0	1	$\sim p \wedge q$	*	
0	0	$\sim p \wedge \sim q$	*	

Pierwszy z opisanych w ostatniej kolumnie sposobów budowania definiensa $\Phi(\wedge \vee \sim; p_1, \dots, p_n)$ dotyczy: spośród funktorów jednoargumentowych \sim , as oraz vr , a spośród dwuargumentowych funktorów $F_1 - F_{15}$; natomiast drugi sposób stosuje się, tworząc definicję funktora jednoargumentowego fl oraz dwuargumentowego F_{16} .

Przykłady

Spójrzmy najpierw na definicje funktorów dwuargumentowych wybrane tak, by w kolumnie funktora definiowanego były kolejno jedna, dwie, trzy i cztery jedyńki, a na końcu funktor F_{16} , w którego kolumnie są cztery zera.

<1> (w kolumnie definiującej jest jedna jedynka)

$F_{14}|\wedge, \vee, \sim$. Oto tabela odpowiednia dla poszukiwanej definicji:

p	q	$\wedge = 1$	F_{14}
1	1	$p \wedge q$	0
1	0	$p \wedge \sim q$	1
0	1	$\sim p \wedge q$	0
0	0	$\sim p \wedge \sim q$	0

Ponieważ w kolumnie definiującej funktor F_{14} jedynka jest tylko w wierszu drugim, więc wyrażeniem $\Phi(\wedge, \vee, \sim; p_1, \dots, p_n)$ definiującym funktor F_{14} jest koniunkcja z tego wiersza: $(p F_{14} q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$.

$F_{12}|_{\wedge, \vee, \sim}$, czyli $\Downarrow|_{\wedge, \vee, \sim}$. Tabela właściwa dla funktora F_{12} wygląda tak:

p	q	$\wedge = 1$	$F_{12} = \Downarrow$
1	1	$p \wedge q$	0
1	0	$p \wedge \sim q$	0
0	1	$\sim p \wedge q$	0
0	0	$\sim p \wedge \sim q$	1

a definicja to: $(p F_{12} q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$, tj. $(p \Downarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$.

<1, 1> Niżej są zamieszczone wybrane tabele i definicje o schemacie $F|_{\wedge, \vee, \sim}$ dla funktorów z grupy 2/2 (w kolumnie definiującej są dwie jedyńki).

$F_{11}|_{\wedge, \vee, \sim}$, czyli $\underline{\vee}|_{\wedge, \vee, \sim}$:

p	q	$\wedge = 1$	$F_{11} = \underline{\vee}$
1	1	$p \wedge q$	0
1	0	$p \wedge \sim q$	1
0	1	$\sim p \wedge q$	1
0	0	$\sim p \wedge \sim q$	0

$(p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)]$.

Definicja $F_6|_{\wedge, \vee, \sim}$ jest równoważnością:

$(p F_6 q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)]$, a odpowiadająca jej tabela to:

p	q	$\wedge = 1$	F_6
1	1	$p \wedge q$	1
1	0	$p \wedge \sim q$	1
0	1	$\sim p \wedge q$	0
0	0	$\sim p \wedge \sim q$	0

<1, 1, 1> Przykładem utworzonej tą metodą alternatywy definiującej trójczłonowej jest definiens następującej definicji funktora F_4 czyli implikacji – symbolicznie $\Rightarrow|_{\wedge, \vee, \sim}$:

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$.

Składniki tej alternatywy są koniunkcjami wybranymi z wierszy kolumny $\wedge = 1$ pierwszego, trzeciego i czwartego, jako że zero w kolumnie definiującej implikację występuje tylko w wierszu drugim.

$\langle 1, 1, 1, 1 \rangle$ Po prawej stronie definicji funktora pierwszego, określonego ciągiem czterech jedynek, jest więc alternatywa czterech koniunkcji z kolumny $\wedge = 1$.

$$F_1 | \wedge, \vee, \sim: (p F_1 q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)].$$

$\langle 0, 0, 0, 0 \rangle$ Z kolei regułę drugą poszukiwania definiensa stosujemy, definiując F_{16} , który jest określony ciągiem czterech zer.

$$F_{16} | \wedge, \vee, \sim: (p F_{16} q) \Leftrightarrow \sim[(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \Leftrightarrow [\sim(p \wedge q) \wedge \sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(\sim p \wedge q) \wedge \sim(\sim p \wedge \sim q)].$$

Z twierdzenia **T1** wynika, że sposób definiowania za pomocą koniunkcji, alternatywy i negacji da się także zastosować do definiowania prawdziwościowych funktorów jednoargumentowych oraz więcej niż dwuargumentowych (ogólnie: n -argumentowych).

Oto tabelka i uzyskane definicje rodzaju $F(p_1, \dots, p_n) \Leftrightarrow \Phi(\wedge, \vee, \sim; p_1, \dots, p_n)$ dla funktorów jednoargumentowych.

p	$\wedge = 1$	vr	as	fl
1	$p \wedge p$	1	1	0
0	$\sim p \wedge \sim p$	1	0	0

(jedna jedynka): $as(p) \Leftrightarrow (p \wedge p)$

(dwie jedynki): $vr(p) \Leftrightarrow [(p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim p)]$

(nie ma jedynki): $fl(p) \Leftrightarrow \sim[(p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim p)] \Leftrightarrow [\sim(p \wedge p) \wedge \sim(\sim p \wedge \sim p)]$.

Metoda definiowania $F | \wedge, \vee, \sim$ doprowadza również do zbudowania równoważności dla funktora negacji: $\sim(p) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim p)$. Równoważności tej nie można jednak traktować jako definicji, w której znaczenie funktora (ogólniej – wyrażenia) definiowanego jest określone bez użycia tego funktora (wyrażenia), czyli jako definicji niekolistej. Równoważność ta (oraz wszystkie, które da się z niej otrzymać) może być natomiast wykorzystywana przy stosowaniu w dowodach reguły wzajemnego zastępowania członów równoważności (będzie omawiana w **RI.3).

Z grupy funktorów prawdziwościowych trójargumentowych (jest ich $2^8 = 256$) weźmy dla ilustracji następującą tabelkę i definicję.

p	q	r	$\wedge = 1$	$F(p, q, r)$
1	1	1	$p \wedge q \wedge r$	1
1	1	0	$p \wedge q \wedge \sim r$	0
1	0	1	$p \wedge \sim q \wedge r$	1
0	1	1	$\sim p \wedge q \wedge r$	0
0	0	1	$\sim p \wedge \sim q \wedge r$	1
0	1	0	$\sim p \wedge q \wedge \sim r$	0
1	0	0	$p \wedge \sim q \wedge \sim r$	1
0	0	0	$\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$	0

$F|\wedge, \vee, \sim$:

$$F(p, q, r) \Leftrightarrow [(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r)].$$

T2 Każdy funktor prawdziwościowy F jest definiowalny przez dowolny funktor rodzaju 1/3 oraz negację, czyli jest tak, że $F|1/3, \sim$.

Dla dowolnego n -argumentowego funktora prawdziwościowego F istnieje zatem takie wyrażenie zdaniowe $\Phi(1/3, \sim; p_1, \dots, p_n)$, że prawdziwa jest równoważność: $F(p_1, \dots, p_n) \Leftrightarrow \Phi(1/3, \sim; p_1, \dots, p_n)$.

Aby okazać, że prawidłowość ta jest spełniona, wystarczy – skoro każdy n -argumentowy funktor prawdziwościowy jest definiowalny przez koniunkcję, alternatywę i negację – opisać ogólną metodę definiowania funktorów koniunkcji i alternatywy za pomocą dowolnego funktora rodzaju 1/3 i negacji; wystarczy więc wskazać algorytm postępowania dla tworzenia definicji: $\wedge|1/3, \sim$ oraz $\vee|1/3, \sim$. Algorytm ten zostanie opisany dla przypadku ogólniejszego, tj. definiowania dowolnego funktora rodzaju 1/3 przez jakikolwiek inny funktor 1/3 i negację. Jest bowiem tak, że:

T3 Każdy funktor prawdziwościowy rodzaju 1/3 jest definiowalny przez dowolny funktor rodzaju 1/3 oraz negację, czyli jest tak, że $1/3|1/3', \sim$.

Konkretyzując podany w **D6** schemat definicyjny $F(p_1, \dots, p_n) \Leftrightarrow \Phi(F_1, \dots, F_k; p_1, \dots, p_n)$ do zależności definicyjnych między funktorami dwuargumentowymi, uzyskujemy: $F(p, q) \Leftrightarrow \Phi(F'; p, q)$; a ponieważ w rozważanym teraz przypadku zarówno F , jak i F' są funktorami rodzaju 1/3, więc poszukiwane definicje podpadają pod schemat:

$$1/3(p, q) \Leftrightarrow \Phi(1/3'; p, q).$$

Metoda definiowania $1/3|1/3', \sim$

Mówiąc ogólnie, metoda tworzenia definicji rodzaju $1/3|1/3', \sim$ polega na takim posłużeniu się negacją w wyrażeniu $(p \ 1/3' \ q)$, by – zgodnie z **D6** – dla uzyskanego w wyniku wyrażenia $\Phi(1/3', \sim; p, q)$ ciąg wartości logicznych w kolumnie definiującej był identyczny z ciągiem definiującym funktor $1/3$. Definiens definicji równoważnościowych rodzaju $1/3|1/3', \sim$ czyli wyrażenie zdaniowe $\Phi(1/3', \sim; p, q)$, uzyskuje się następująco:

a. stosujemy negację do argumentów funktora $1/3'$ tak, by wartość wyróżniona (jedyna jedynka albo jedyne zero) w kolumnie dla uzyskanego w ten sposób wyrażenia $\Phi_1(1/3', \sim; p, q)$ znalazła się w tym samym wierszu co wartość wyróżniona w kolumnie definiującej funktor F . Uzyskane w ten sposób ciągi wartości dla wyrażeń $(p \ 1/3' \ q)$ oraz $\Phi_1(1/3', \sim; p, q)$ są identyczne albo symetryczne.

b.1 Jeśli te ciągi wartości są identyczne, wtedy wyrażenie $\Phi_1(1/3', \sim; p, q)$ jest poszukiwanym definiensem $\Phi(1/3', \sim; p, q)$, czyli definicja podpada pod schemat: $(p \ 1/3' \ q) \Leftrightarrow \Phi_1(1/3', \sim; p, q)$.

b.2 Jeśli ciągi są symetryczne, to poszukiwanym definiensem jest wyrażenie $\sim\Phi_1(1/3', \sim; p, q)$, a schematem definicji jest formuła:

$$(p \ 1/3' \ q) \Leftrightarrow \sim\Phi_1(1/3', \sim; p, q).$$

Przykłady (dla $1/3|1/3', \sim$)

$$F_{13}|F_{3'}, \sim.$$

p	q	F_{13}	$p \ F_{3'} \ q$
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	0	1

Ponieważ, jak widać w tabeli (która jest fragmentem **D5**), kolumny definiujące oba funktory są symetryczne (można pominąć krok **a**), więc poszukiwana definicja, zgodnie z **b.2**, to: $(p \ F_{13} \ q) \Leftrightarrow \sim(p \ F_{3'} \ q)$.

$$F_2|F_3, \sim, \text{ czyli } \vee|F_3, \sim.$$

p	q	$F_2 = \vee$	F_3	$p \ F_{3'} \ \sim q$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	0	1
0	0	0	1	0

Ponieważ kolumny funktora definiowanego i definiującego nie są symetryczne, trzeba – według punktu **a** opisanej wyżej metody – utworzyć wyrażenie $\Phi_1(F', \sim; p, q)$, widoczne w nagłówku kolejnej kolumny powyższej tabeli, w której symbol wyróżniony 0 jest, jak w kolumnie dla F_4 , w wierszu czwartym. Jako że uzyskany w tej kolumnie ciąg wartości jest identyczny z ciągiem w kolumnie definiującej funktor F_2 , więc nie trzeba wykonywać działania opisanego w **b.2**, czyli definicja, zgodnie z **b.1**, podpada pod schemat: $(p F q) \Leftrightarrow \Phi_1(F', \sim; p, q): (p \vee q) \Leftrightarrow (p F_3 \sim q)$.

$F_2|F_5, \sim$, czyli $\vee|/, \sim$.

p	q	$F_2 = \vee$	$F_5 = /$	$\sim p / \sim q$
1	1	1	0	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	1	0

I w tym przypadku wystarczy wykonać te same kroki (**a** oraz **b.1**) metody 1/3|1/3', \sim , ponieważ po „przesunięciu” symbolu wyróżnionego w kolumnie, w której funktorem jest dysjunkcja, uzyskujemy – jak widać w tabeli – ciągi identyczne, co prowadzi do definicji: $(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p / \sim q)$.

$F_4|F_3, \sim$, czyli $\Rightarrow|F_3, \sim$.

p	q	$F_4 = \Rightarrow$	F_3	$\sim p F_3 \sim q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Analogiczna procedura (ponownie zawężona do punktów **a** oraz **b.1**) prowadzi do sformułowania definicji, której definiens jest w nagłówku ostatniej kolumny powyższej tabelki: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p F_3 \sim q)$.

$F_4|F_{12}, \sim$, czyli $\Rightarrow|\Downarrow, \sim$.

p	q	$F_4 = \Rightarrow$	$F_{12} = \Downarrow$	$\sim p \Downarrow q$	$\sim(\sim p \Downarrow q)$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1

Wykonanie działań opisanych w punktach **a** oraz **b.1** prowadzi do uzyskania kolumny, która jest nie identyczna z ciągiem wartości definiującym implikację, lecz symetryczna względem tego ciągu. Dlatego trzeba wykonać kolejny krok (**b.2**) opisanej metody, czyli utworzyć definiens według schematu $\sim\Phi_1(F', \sim; p, q): (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \Downarrow q)$.

$F_{15}|F_2, \sim$, czyli $\wedge|\vee, \sim$.

p	q	$F_{15} = \wedge$	$F_2 = \vee$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$
1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	0

Droga do poszukiwanej definicji jest analogiczna jak dla $F_4|F_{12}$, czyli wymaga dojścia aż do punktu **b.2** opisanej metody: $(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$.

$F_4|F_{15}, \sim$, czyli $\Rightarrow|\wedge, \sim$.

p	q	$F_4 = \Rightarrow$	$F_{15} = \wedge$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1

Dołączenie do tabeli definiującej implikację i koniunkcję dwóch kolejnych kolumn zgodnie z punktami **a–b.2** metody prowadzi do następującej definicji: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$.

Zatem: Łącząc metodę $F|\wedge, \vee, \sim$ (związaną z twierdzeniem **T1**) z metodą $1/3|1/3', \sim$ (prawidłowość **T3**), można zbudować dowolną definicję rodzaju $F|1/3, \sim$, co dowodzi, że jest spełniona prawidłowość **T2**⁷.

Ogólny algorytm takiego definiowania jest następujący: $F|\wedge, \vee, \sim; \wedge, \vee|1/3, \sim$ (w zapisie tego algorytmu, i każdego, który opisuje łączenie co najmniej dwóch kroków definicyjnych, znak średnika oddziela kolejne operacje definiowania). Stosując pierwszą z tych metod, trzeba więc

⁷ Twierdzenie **T2** jest uogólnieniem twierdzeń (nienumerowanych) sformułowanych w L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 67, a twierdzenie **T3**, niezbędne w uzasadnieniu **T2**, oraz związana z nim metoda budowania definicji $1/3|1/3', \sim$ uzupełniają wskazane tam prawidłowości i metody definiowania.

zdefiniować dany funktor za pomocą koniunkcji, alternatywy i negacji, a następnie w definiensie otrzymanej równoważności zdefiniować, stosując drugą metodę, znaki koniunkcji i alternatywy za pomocą danego funktora rodzaju 1/3 i negacji.

Na marginesie tej ogólnej procedury warto zauważyć, że przejście definicyjne od 2/2 do 1/3 w przypadku funktorów \Leftrightarrow oraz $\underline{\vee}$ można też oprzeć na definicji równoważności za pomocą implikacji i koniunkcji:

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)].$$

Kolejne kroki takiego przejścia są określone algorytmami:

$$\Leftrightarrow | \Rightarrow, \wedge; \Rightarrow, \wedge | 1/3, \sim \text{ oraz } \underline{\vee} | \Leftrightarrow, \sim; \Leftrightarrow | \Rightarrow, \wedge; \Rightarrow, \wedge | 1/3, \sim.$$

Przykłady (definicje rodzaju $F | 1/3, \sim$)

Przykłady są dobrane tak, by pokazać skuteczność tej łączonej metody w definiowaniu funktorów tych rodzajów, w których samej metody $F | 1/3, \sim$ nie da się stosować. Chodzi o definiowanie innych niż równoważność i alternatywa rozłączna funktorów rodzaju 2/2, definiowanie funktorów 4/0 oraz funktorów jednoargumentowych.

$$F_9 | F_{15}, \sim, \text{ tj. } F_9 | \wedge, \sim.$$

p	q	$\wedge = 1$	F_9	$\Phi(\wedge, \vee, \sim; p, q)$	$\wedge, \vee 1/3, \sim, \text{ tj. } \underline{\vee} \wedge, \sim$
1	1	$p \wedge q$	1	$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)$	$\sim[\sim(p \wedge q) \wedge \sim(\sim p \wedge q)]$
1	0	$p \wedge \sim q$	0		
0	1	$\sim p \wedge q$	1		
0	0	$\sim p \wedge \sim q$	0		

$$p F_9 q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim[\sim(p \wedge q) \wedge \sim(\sim p \wedge q)].$$

Wynik stosowania metody $F | \wedge, \vee, \sim$ jest zapisany w kolumnie o nagłówku $\Phi(\wedge, \vee, \sim; p, q)$, a wynik zastosowania do wyrażenia w tej kolumnie metody $1/3 | 1/3', \sim$ widać w kolumnie ostatniej. Ponieważ (zgodnie ze schematem definiowania $F_9 | \wedge, \sim$) w końcowym definiensie ma być użyty znak koniunkcji, więc wykonanie drugiego kroku sprowadza się do zdefiniowania w wyrażeniu $\Phi(\wedge, \vee, \sim; p, q)$, tj. w wyrażeniu $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)$, alternatywy za pomocą koniunkcji i negacji, według schematu:

$$(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \sim(\sim\Phi \wedge \sim\Psi).$$

Końcowym wynikiem tych działań jest definicja:

$$p F_9 q \Leftrightarrow \sim[\sim(p \wedge q) \wedge \sim(\sim p \wedge q)].$$

$$F_{10}|F_3, \sim$$

p	q	$\wedge = 1$	F_{10}	$\Phi(\wedge, \vee, \sim; p, q)$	$\wedge, \vee 1/3, \sim, \text{ tj. } \wedge, \vee F_3, \sim$
1	1	$p \wedge q$	0	$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	$\sim(\sim p F_3 \sim q) F_3 (p F_3 \sim q)$
1	0	$p \wedge \sim q$	1		
0	1	$\sim p \wedge q$	0		
0	0	$\sim p \wedge \sim q$	1		

Wynikiem zastosowania metody $F|\wedge, \vee, \sim$ jest formuła $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$.

Do wyrażenia tego trzeba dwukrotnie zastosować metodę definiowania $1/3|1/3', \sim$ skonkretyzowaną do $\wedge, \vee|F_3, \sim$, przy czym ostateczny wynik nie zależy od tego, czy najpierw zdefiniuje się koniunkcję czy alternatywę za pomocą funktora F_3 .

Stosując do wyrażenia $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ najpierw $\wedge|F_3, \sim$, tj. $(\Phi \wedge \Psi) \Leftrightarrow \sim(\sim\Phi F_3 \Psi)$, uzyskuje się alternatywę:

$$\sim(\sim p F_3 \sim q) \vee \sim(p F_3 \sim q),$$

a zastąpiwszy w niej równoważnościowo znak alternatywy przez funktor F_3 i negację, według schematu $(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow (\Phi F_3 \sim\Psi)$, otrzymujemy wyrażenie $\sim(\sim p F_3 \sim q) F_3 (p F_3 \sim q)$. Definicja $F_{10}|F_3, \sim$ jest więc równoważnością: $p F_{10} q \Leftrightarrow \sim(\sim p F_3 \sim q) F_3 (p F_3 \sim q)$.

$$F_{11}|F_5, \sim, \text{ tj. } \underline{\vee}|/, \sim$$

p	q	$\wedge = 1$	$F_{11} = \underline{\vee}$	$\Phi(\wedge, \vee, \sim; p, q)$	$\wedge, \vee 1/3, \sim, \text{ tj. } \wedge, \vee /, \sim$
1	1	$p \wedge q$	0	$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	$(p / \sim q) / (\sim p / \sim q)$
1	0	$p \wedge \sim q$	1		
0	1	$\sim p \wedge q$	1		
0	0	$\sim p \wedge \sim q$	0		

Zastosowania metody $F|\wedge, \vee, \sim$ do funktora $\underline{\vee}$ prowadzi do wyrażenia $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$.

Zdefiniowanie w nim koniunkcji za pomocą dysjunkcji (według schematu $(\Phi \wedge \Psi) \Leftrightarrow \sim(\Phi / \Psi)$) prowadzi do alternatywy: $\sim(p / \sim q) \vee \sim(\sim p / q)$, która po definicyjnym zastąpieniu alternatywy przez dysjunkcję i negację $((\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow (\sim\Phi / \sim\Psi))$ przyjmuje kształt definiensa poszukiwanej definicji: $(p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow [(p / \sim q) / (\sim p / q)]$.

Warto dodać, że przekształcenie wskazane schematem $\underline{\vee}/, \sim$ można wykonać bez stosowania w pierwszej części metody $F|\wedge\vee\sim$. Można bowiem zamiast tego skorzystać z definicji $(p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow \sim(p \Leftrightarrow q)$ oraz $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$, otrzymując wyrażenie $\sim[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$, a następnie zdefiniować w nim implikację i koniunkcję przez dysjunkcję (wg schematów $(\Phi \Rightarrow \Psi) \Leftrightarrow (\Phi / \sim\Psi)$ oraz $(\Phi \wedge \Psi) \Leftrightarrow \sim(\Phi / \Psi)$), uzyskując najpierw $\sim[(p / \sim q) \wedge (q / \sim p)]$, a ostatecznie $[(p / \sim q) / (\sim p / q)]$, czyli wyrażenie identyczne z otrzymanym wyżej według algorytmu $F|\wedge, \vee, \sim; \wedge, \vee|/, \sim$.

$$F_1|F_{14}, \sim$$

p	q	$\wedge = 1$	F_1	$\Phi(\wedge, \vee, \sim; p, q)$	$\wedge, \vee 1/3, \sim, \text{ tj. } \wedge, \vee F_{14}, \sim$
1	1	$p \wedge q$	1	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee$ $\vee (\sim p \wedge q) \vee$ $\vee (\sim p \wedge \sim q)$	$\sim[\sim(p F_{14} \sim q) F_{14} (p F_{14} q)] F_{14}$ $\sim[\sim(\sim p F_{14} \sim q) F_{14} (\sim p F_{14} q)]$
1	0	$p \wedge \sim q$	1		
0	1	$\sim p \wedge q$	1		
0	0	$\sim p \wedge \sim q$	1		

Rezultatem zdefiniowania funktora F_1 za pomocą koniunkcji, alternatywy i negacji jest wyrażenie $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$.

Wykonanie w tym wyrażeniu zastąpień zgodnych z definicjami $\wedge, \vee|F_{14}, \sim$ (według schematów $(\Phi \wedge \Psi) \Leftrightarrow (\Phi F_{14} \sim\Psi)$ oraz $(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \sim(\sim\Phi F_{14} \Psi)$) prowadzi najpierw do alternatywy:

$(p F_{14} \sim q) \vee (p F_{14} q) \vee (\sim p F_{14} \sim q) \vee (\sim p F_{14} q)$, a ostatecznie do definicji:

$$(p F_1 q) \Leftrightarrow \sim[\sim(p F_{14} \sim q) F_{14} (p F_{14} q)] F_{14} \sim[\sim(\sim p F_{14} \sim q) F_{14} (\sim p F_{14} q)].$$

$$F_{16}|F_3, \sim.$$

p	q	$\wedge = 1$	F_{16}	$\Phi(\wedge, \vee, \sim; p, q)$	$\wedge, 1/3, \sim, \text{ tj. } \wedge, F_3, \sim$
1	1	$p \wedge q$	0	$\sim(p \wedge q) \wedge$ $\wedge \sim(p \wedge \sim q) \wedge$ $\wedge \sim(\sim p \wedge q) \wedge$ $\wedge \sim(\sim p \wedge \sim q)$	$\sim[\sim(\sim p F_3 q)] F_3 (\sim p F_3 \sim q)] F_3$ $\sim[\sim(p F_3 q) F_3 (p F_3 \sim q)]$
1	0	$p \wedge \sim q$	0		
0	1	$\sim p \wedge q$	0		
0	0	$\sim p \wedge \sim q$	0		

W wyrażeniu $\sim(p \wedge q) \wedge \sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(\sim p \wedge q) \wedge \sim(\sim p \wedge \sim q)$ (tj. w negacji wszystkich koniunkcji z kolumny $\wedge = 1$), uzyskanym w wyniku zastosowania metody $F_{16}|\wedge, \vee, \sim$ trzeba zastąpić równoważnościowo funktor koniunkcji funktorem F_3 i negacją (wg schematu definicyjnego $(\Phi \wedge \Psi) \Leftrightarrow \sim(\sim\Phi F_3 \Psi)$). Wykonanie tego zastąpienia najpierw w nawiasach prowadzi do wyrażenia: $(\sim p F_3 q) \wedge (\sim p F_3 \sim q) \wedge (p F_3 q) \wedge (p F_3 \sim q)$, a ostatecznie do definicji:

$$(p F_{16} q) \Leftrightarrow \sim\{\sim(\sim p F_3 q) F_3 (\sim p F_3 \sim q) F_3 \sim[\sim(p F_3 q) F_3 (p F_3 \sim q)]\}.$$

Metoda łączona, tj. $F|\wedge, \vee, \sim; \wedge, \vee|1/3, \sim$ jest stosowalna do dowolnych funktorów prawdziwościowych (dowolnie wieloargumentowych). W przykładach zastosowania do definiowania funktorów jednoargumentowych można wykorzystać zależności definicyjne wyżej uzyskane metodą $F|\wedge, \vee, \sim$:

$$as(p) \Leftrightarrow (p \wedge p),$$

$$vr(p) \Leftrightarrow [(p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim p)]$$

$$fl(p) \Leftrightarrow [\sim(p \wedge p) \wedge \sim(\sim p \wedge \sim p)].$$

Przykłady

$$as|F_{13}, \sim.$$

W równoważności $as(p) \Leftrightarrow (p \wedge p)$ wystarczy zastąpić koniunkcję funktorem F_{13} i negacją (wg schematu definicyjnego $(\Phi \wedge \Psi) \Leftrightarrow (\sim\Phi F_{13} \Psi)$), by uzyskać definicję: $as(p) \Leftrightarrow \sim p F_{13} p$.

$$vr|\Rightarrow, \sim.$$

W równoważności $vr(p) \Leftrightarrow [(p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim p)]$ trzeba zdefiniować koniunkcję i alternatywę za pomocą implikacji i negacji (według schematów $(\Phi \wedge \Psi) \Leftrightarrow \sim(\Phi \Rightarrow \sim\Psi)$ oraz $\Phi \vee \Psi \Leftrightarrow (\sim\Phi \Rightarrow \Psi)$), co doprowadza do definicji: $vr(p) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow \sim(\sim p \Rightarrow p)]$.

$$fl|F_3, \sim.$$

Ponownie w definiensie równoważności $fl(p) \Leftrightarrow [\sim(p \wedge p) \wedge \sim(\sim p \wedge \sim p)]$ trzeba równoważnościowo zastąpić funktor koniunkcji, w tym przypadku funktorem F_3 i negacją (według schematu $\Phi \wedge \Psi \Leftrightarrow \sim(\sim\Phi F_3 \Psi)$), co doprowadza do definicji:

$$fl(p) \Leftrightarrow \sim[(\sim p F_3 p) F_3 (p F_3 \sim p)].$$

Ponownie warto zauważyć, że jest możliwe budowanie równoważności rodzaju $\sim|1/3, \sim$. Na przykład wychodząc od równoważności (uzyskanej metodą $F|\wedge, \vee, \sim$): $\sim p \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim p)$ i stosując metodę $F|1/3, \sim$ dla przypadku, powiedzmy, $\wedge|\Rightarrow, \sim$, uzyskujemy równoważność: $\sim p \Leftrightarrow \sim(\sim p \Rightarrow p)$, która może być wykorzystana, gdy jest stosowana reguła zastępowania członów równoważności, nie może

natomiast być uznana za poprawną definicję, jako że w definiensie jest użyty funktor definiowany (por. sformułowane wyżej uwagi do definicji $\sim|\wedge, \vee, \sim$).

Ostatnia z zapowiedzianych prawidłowości jest wyrażona w:

T4 Każdy funktor prawdziwościowy F jest definiowalny wyłącznie przez \Downarrow oraz wyłącznie przez $/$.

Algorytmy prowadzące do tych definicji są wyznaczone schematami:

$F\Downarrow$: $F|\wedge, \vee, \sim; \wedge, \vee|\Downarrow, \sim; \sim|\Downarrow$ oraz

$F/$: $F|\wedge, \vee, \sim; \wedge, \vee|/, \sim; \sim|/$.

Pierwsze etapy tej procedury zostały wyżej obficie zilustrowane, a eliminowanie w ostatnim kroku negacji jest zgodne z definicjami:

$\sim\Phi \Leftrightarrow (\Phi \Downarrow \Phi)$ oraz $\sim\Phi \Leftrightarrow (\Phi / \Phi)$.

Na przykład w procedurze definiowania określonej schematem $\Downarrow /$ otrzymuje się najpierw równoważność $(p \Downarrow q) \Leftrightarrow [(p / \sim q) / (\sim p / \sim q)]$, a zastąpienie w niej negacji przez dysjunkcję, według schematu $\sim\Phi \Leftrightarrow (\Phi / \Phi)$, prowadzi do końcowej definicji: $(p \Downarrow q) \Leftrightarrow [(p / (q / q)) / ((p / p) / (q / q))]$.

2. Tautologie/prawa KRZ

System KRZ, niezależnie od obranej metody jego budowania, ma zawierać takie tylko poprawnie zbudowane wyrażenia zdaniowe, które są prawami logicznymi. W przypadku klasycznych rachunków zdań mogą być stosowane metoda sprawdzania, czy wyrażenie jest prawem, oraz metody dedukcyjne, czyli oparte na dowodzeniu danego wyrażenia na podstawie reguł i też wcześniej uznanych.

2.1 Sprawdzanie tautologiczności

Pierwsza z tych metod polega na rozstrzygnięciu, czy dana formuła KRZ jest prawem, a najczęściej stosowanym sposobem rozstrzygnięcia jest metoda zwana zero-jedynkową lub (ogólniej) matrycową⁸. Metoda ta polega

⁸ Są stosowane także inne metody, np. metoda Gentzena (zob. T. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 407–414) oraz metoda tablic

na podstawianiu (symboli) wartości logicznych za zmienne zdaniowe w danej formule i wyliczaniu – wedle definicji matrycowych (tabelkowych) funktorów KRZ – wartości końcowej, czyli uzyskiwanej przez formułę dla danego wartościowania (*RIX.1.2.2). Jak wiadomo:

***RIX.1: D10** Tautologia KRZ to formuła, która dla dowolnego podstawienia wartości logicznych za występujące w niej zmienne zdaniowe (dla dowolnego wartościowania) uzyskuje końcową wartość prawdziwości (jedynekę).

Korzystając z uściślonego w ****RI.1: D3.b** pojęcia wartościowania oraz określonej w komentarzu do tej definicji funkcji V , która przypisuje dowolnej formule KRZ jej wartość logiczną w konkretnym wartościowaniu, da się teraz powiedzieć krócej, że:

D1 Formuła Φ jest tautologią KRZ wtedy i tylko, gdy dla każdego jej wartościowania w : $V(\langle \Phi, w \rangle) = 1$.

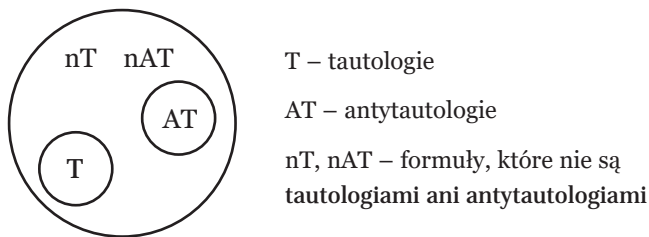
Metoda sprawdzania zero-jedynkowa jest za pośrednictwem pojęcia tautologii powiązana z pojęciem prawa KRZ, jako że – co warto tu powtórzyć (*RIX.1.2.2) – dla formuł KRZ pojęcie tautologii jest równozakresowe z pojęciem prawa tego rachunku: każde i tylko prawo KRZ jest tautologią tego rachunku (związki między tautologiami, prawami i tezami RZ są omówione w *****RII.2**).

Spośród formuł KRZ tautologiami są te tylko, które spełniają warunek wskazany w **D1**, oprócz nich są w tym rachunku formuły, które dla niektórych wartościowań uzyskują wartość 1, a dla pozostałych wartość 0, a także formuły, które w każdym wartościowaniu uzyskują końcową wartość 0, czyli są przeciwieństwem tautologii – te ostatnie są zwane anty-tautologiami lub kontrtautologiami. Do kategorii tej należy na przykład formuła $p \wedge \sim p$, która w każdym wartościowaniu ($p/1$ i $p/0$) uzyskuje wartość końcową 0, a w wyniku dowolnego podstawienia zdań logicznych

semantycznych (tamże, s. 415–419; pełniejsza jej prezentacja w D. Bonevac, *The Art and Science of Logic*, Mountain View, CA 1990, s. 155–185, gdzie metoda ta jest wspomagana grafami o strukturze drzew). Metoda tabel (drzew) semantycznych może być także stosowana do wyrażeń z kwantyfikatorami, a w KRZ jest zwykle zastępowana metodą prostszą, tj. skróconą zero-jedynkową. Do okazywania prawdziwości formuł KRZ jest także stosowana metoda sprowadzania do tzw. postaci normalnych (jest omówiona w *****RI.1.4.2**) – zob. L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 73–78.

za zmienną p jest przekształcana w zdanie fałszywe (np. p /Polska jest krajem europejskim albo p /Polska jest krajem afrykańskim). Oczywiście jest związek tautologii z antytautologiami: negacja antytautologii jest tautologią KRZ (i odwrotnie). Na przykład gdy poprzedzi się znakiem negacji formułę $p \wedge \sim p$, otrzymuje się jedną z podstawowych tautologii KRZ, zwaną zasadą niesprzeczności: $\sim(p \wedge \sim p)$.

Ogół wyrażeń KRZ można więc rozdzielić na trzy kategorie: tautologie (zawsze prawdziwe), antytautologie (zawsze fałszywe) i wyrażenia dla pewnych wartościowań (zdań) prawdziwe, dla innych fałszywe.



Tautologie KRZ należą do funkcji zdaniowych zawsze spełnionych, czyli do wyrażeń zdaniowych prawdziwych, natomiast funkcje zdaniowe, które nie są zawsze spełnione – czyli antytautologie (nigdy nie są spełnione) i funkcje spełnione dla niektórych tylko wartościowań – należą do wyrażeń zdaniowych fałszywych. Formuły zawsze spełnione są włączane do systemu KRZ budowanego metodą rozstrzygnięcia tautologiczności. Stosując tę metodę, da się o dowolnej formule KRZ rozstrzygnąć, czy jest ona prawem tego rachunku, a tym samym – prawem logiki.

2.2 Wybrane tautologie/prawa KRZ

Zamiast o tautologiach KRZ mówi się zwykle o prawach tego rachunku, zwłaszcza gdy chodzi o tautologie najczęściej stosowane. Sformułowane niżej prawa są podane wraz z ich nazwami, jako że zostały wybrane właśnie spośród takich tautologii – w tym sensie prawa te są w KRZ podstawowe i jako takie mają także swoje niesymboliczne nazwy:

podwójnego przeczenia

(podwójnej negacji)

prawa tożsamości:

$$p \Leftrightarrow \sim\sim p$$

$$p \Rightarrow p, \quad p \Leftrightarrow p$$

niesprzeczności	$\sim(p \wedge \sim p)$
wyłączonego środka	$p \vee \sim p$
przemienności koniunkcji	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
przemienności alternatywy	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
łączności alternatywy	$[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$
łączności koniunkcji	$[(p \wedge (q \wedge r))] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$
rozdzielności koniunkcji względem alternatywy	$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
rozdzielności alternatywy względem koniunkcji	$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
<i>modus ponendo ponens</i>	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
<i>modus tollendo tollens</i>	$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
<i>modus tollendo ponens</i>	$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
<i>modus ponendo tollens</i>	$[(p \vee q) \wedge p] \Rightarrow \sim q$
przechodniości implikacji	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
transpozycji (kontrapozycji)	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
transpozycji złożonej	$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q]$
sylogizmu warunkowego	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$
dodawania implikacji stronami	$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]$
de Morgana pierwsze (negacji koniunkcji)	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
de Morgana drugie (negacji alternatywy)	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
negowania implikacji	$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
Fregego	$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$
eksportacji i importacji	$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$
Dunsa Szkota	$(p \wedge \sim p) \Rightarrow q, \quad p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$
opuszczania (dodawania) równoważności	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
prawa redukcji do absurdu:	$(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow \sim p,$ $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p,$ $[p \Rightarrow (q \wedge \sim q)] \Rightarrow \sim p,$ $[\sim p \Rightarrow (q \wedge \sim q)] \Rightarrow p$
dylematu konstrukcyjnego prostego	$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow r$
dylematu konstr. złożonego	$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$
dylematu destrukcyjnego prostego	$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge \sim(q \wedge r)] \Rightarrow \sim p$

dylematu destr. złożonego	$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge \sim(q \wedge s)] \Rightarrow$ $\Rightarrow \sim(p \wedge r)$
odwracania impl. stronami	$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \vee r) \wedge \sim(q \wedge s)] \Rightarrow$ $\Rightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (s \Rightarrow r)]^9$.

3. Założeniowy system KRZ

W punkcie wyjścia systemów budowanych w ten sposób przyjmuje się niezawodne reguły wnioskowania, zwane pierwotnymi. Pośród reguł pierwotnych są reguły dołączania nowych wierszy do dowodu, reguły budowania dowodów oraz – ściśle z nimi związane – reguły uznawania wyrażeń za tezy systemu (dołączania wyrażeń do tez systemu). Systemy założeniowe różnią się przede wszystkim zestawami reguł pierwotnych (także sposobem ich formułowania, tj. w języku lub w metajęzyku danego systemu) oraz kolejnością tez dołączanych do systemu (czyli – kolejnością dowodzenia tez) i wprowadzania doń reguł wtórnych¹⁰.

3.1 Reguły pierwotne systemu

3.1.1 Do reguł pierwotnych dołączania nowych wierszy do dowodu należą reguła odrywania (RO) oraz reguły dołączania i opuszczania dla: koniunkcji (DK, OK), równoważności (DR, OR) i alternatywy (DA, OA).

RO

$$\frac{\Phi \Rightarrow \Psi}{\Phi} \quad \Psi$$

⁹ W kolejnym podrozdziale te i inne prawa są włączane do KRZ jako tezy systemu budowanego metodą założeniową.

¹⁰ Rozwijany niżej system założeniowy jest wzorowany na systemie Słupeckiego i Borkowskiego – zob. J. Słupecki, L. Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, dz. cyt.; L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt.

W dowodzie, zgodnie ze schematem reguły odrywania, można na podstawie dowolnej implikacji i jej poprzednika uznać w kolejnym wierszu („oderwać”) następnik tej implikacji. Mówiąc inaczej, z implikacji i jej poprzednika można wyprowadzić jej następnik.

DK

$$\frac{\begin{array}{c} \Phi \\ \Psi \end{array}}{\Phi \wedge \Psi}$$

OK

$$\frac{\Phi \wedge \Psi}{\Phi (\Psi)}$$

Dowodząc według reguły **DK**, można w kolejnym wierszu wpisać koniunkcję dowolnych wyrażeń zdaniowych uznanych we wcześniejszych wierszach dowodu, a zgodnie z regułą **OK** z dowolnej koniunkcji można wyprowadzić każdy z jej członów.

Analogiczne są reguły dołączania i opuszczania równoważności, sformułowane w poniższych schematach: gdy ma się w dowodzie dowolną implikację $\Phi \Rightarrow \Psi$ i implikację do niej odwrotną $\Psi \Rightarrow \Phi$, wtedy można w kolejnym wierszu uznać równoważność $\Phi \Leftrightarrow \Psi$, a z dowolnej równoważności jest wyprowadzalna każda z jej implikacji składowych.

DR

$$\frac{\begin{array}{c} \Phi \Rightarrow \Psi \\ \Psi \Rightarrow \Phi \end{array}}{\Phi \Leftrightarrow \Psi}$$

OR

$$\frac{\Phi \Leftrightarrow \Psi}{\Phi \Rightarrow \Psi (\Psi \Rightarrow \Phi)}$$

Zgodne z prawdziwościovym rozumieniem funktora alternatywy zwykłej są też reguły dla alternatywy. Reguła dołączania pozwala przyjąć w dowodzie dowolną alternatywę, o ile którykolwiek z jej członów jest wyrażeniem wcześniej uznanym, a reguła opuszczania alternatywy stwierdza, że z alternatywy i negacji dowolnego jej składnika jest wyprowadzalny składnik pozostały.

DA

$$\frac{\Phi}{\Phi \vee \Psi}$$

OA

$$\frac{\begin{array}{c} \Phi \vee \Psi \\ \sim \Phi (\sim \Psi) \end{array}}{\Psi (\Phi)}$$

3.1.2 Pośród pierwotnych reguł budowania dowodów są ustalenia dotyczące tworzenia dowodów założeniowych bądź zwykłych oraz dowodów wprost bądź niewprost (o rodzajach dowodów była mowa, w kontekście

uzasadniania zdań, w *RIX.1.2.3). Ogólnie można powiedzieć – i ta wskazówka będzie się powtarzała w każdej regule budowania dowodów – że w dowolnym dowodzie można korzystać z wyrażeń udowodnionych wcześniej, czyli z tez systemu, oraz z przyjętych wcześniej reguł wyprowadzania wyrażeń.

a) Dowodzone założeniowo są wyłącznie formuły o budowie implikacji.

(i) Pomijając możliwe uszczegółowienia schematu dowodzonego wyrażenia, można powiedzieć, że dowód założeniowy implikacji:

$$(*) \quad \Phi \Rightarrow \Psi$$

zawsze rozpoczyna się od przyjęcia jako założenia dowodu poprzednika Φ implikacji (*).

W dowodzie założeniowym wprost z poprzednika Φ wyprowadza się – korzystając z wyrażeń zdaniowych uznanych wcześniej i reguł dowodzenia – jej następnik, tj. wyrażenie Ψ . Celem dowodzenia wprost jest więc uzyskanie następnika Ψ z poprzednika Φ , dlatego wiersz dowodu, w którym uzyskuje się Ψ , jako kończący dowód, nie jest numerowany.

Natomiast w dowodzie założeniowym niewprost przyjmuje się w charakterze założeń dowodu obok poprzednika Φ także tzw. założenie dowodu niewprost, tj. negację następnika implikacji (*), czyli wyrażenie $\sim\Psi$; następnie wyprowadza się – korzystając z wyrażeń zdaniowych uznanych wcześniej i reguł dowodzenia – sprzeczność. Sprzeczność może się pojawić w obrębie samego dowodu, a jest tak, gdy z koniunkcji $(\Phi \wedge \sim\Psi)$ da się wyprowadzić zarówno jakieś wyrażenie, jak i jego negację; ujawnienie w dowodzie niewprost sprzeczności często polega jednak na tym, że z koniunkcji $(\Phi \wedge \sim\Psi)$ wyprowadza się wyrażenie sprzeczne z jakimś wyrażeniem uznany wcześniej, czyli z tezą systemu (tezy udowodnione wcześniej można wprost włączyć do dowodu). Opisując sprzeczność, podaje się numery sprzecznych wierszy lub wskazuje się (wypisuje lub nazywa) sprzeczne wyrażenia. Uzyskana sprzeczność kończy dowód niewprost.

(ii) W ogólnym opisie dowodów założeniowych trzeba uwzględnić fakt, że następnik implikacji $\Phi \Rightarrow \Psi$ również może być implikacją, w której następniku ponownie może być implikacja itd. Możliwości takie są przewidziane w ogólnym schemacie:

$$(**) \quad \Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow (\Phi_{n-1} \Rightarrow \Phi_n) \dots), \quad n \geq 1,$$

w którym koniunkcja poprzedników $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}$ odpowiada Φ ze schematu (*) – gdy więc następnik dowodzonej implikacji nie jest implikacją, a więc jeśli $n = 2$, wtedy schemat (**) upraszcza się do (*). Wyrażenia $\Phi_1,$

$\Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}$ są poprzednikami tzw. implikacji głównych wyrażenia (**): „głównych”, tzn. uzyskiwanych kolejno w wyniku „oderwania” poprzednika głównej implikacji w wyrażeniu (**), następnie poprzednika Φ_2 uzyskanej w wyniku pierwszego „oderwania” implikacji $\Phi_2 \Rightarrow (\dots \Rightarrow (\Phi_{n-1} \Rightarrow \Phi_n) \dots)$, aż do „oderwania” poprzednika Φ_{n-1} ostatniej z „głównych” implikacji, tj. $\Phi_{n-1} \Rightarrow \Phi_n$. W poniższych opisach dowodów założeniowych (wprost i niewprost) struktura dowodzonej implikacji jest reprezentowana w sposób ogólny.

W dowodzie założeniowym wprost wyrażenia (**):

- przyjmuje się w punkcie wyjścia, w wierszach dowodu od pierwszego do $n-1$, założenia dowodzonego twierdzenia, tj. wyrażenia $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}$;
- z założeń tych, korzystając z wyrażen uznanych wcześniej i reguł dowodzenia, wyprowadza się następnik ostatniej z głównych implikacji wyrażenia (**), tj. wyrażenie Φ_n ;
- uzyskanie tego wyrażenia kończy dowód (wyrażenie Φ_n jest zapisywane w ostatnim, nienumerowanym wierszu dowodu).

Z kolei w dowodzie założeniowym niewprost wyrażenia (**):

- przyjmuje się w punkcie wyjścia, tj. w wierszach dowodu od pierwszego do $n-1$, założenia dowodzonego twierdzenia, tj. wyrażenia $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}$;
- przyjmuje się ponadto, jako tzw. założenie dowodu niewprost (zdn.), negację następnika ostatniej z głównych implikacji, tj. wyrażenie $\sim\Phi_n$;
- z założeń dowodu (tj. założeń twierdzenia i zdn.) wyprowadza się – korzystając z wyrażen uznanych wcześniej i reguł dowodzenia – sprzeczność. Uzyskanie sprzeczności kończy dowód.

b) Dowody zwykle wprost i niewprost oraz związane z nimi reguły są szczególnymi przypadkami dowodów założeniowych. Można je traktować jako założeniowe dowody wyrażen „implikacyjnych”, w których nie ma poprzedników.

Mówiąc dokładniej, założeniowy dowód wyrażenia:

$$(**) \quad \Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow (\Phi_{n-1} \Rightarrow \Phi_n) \dots), \quad n \geq 1$$

staje się dowodem zwykłym, gdy $n = 1$, a więc gdy wyrażenie (**) jest zredukowane do Φ_1 (w określeniach dowodów zwykłych zostanie pominięty zbędny w tej sytuacji indeks „1”).

Dowód zwykły wprost wyrażenia Φ polega zatem na wyprowadzeniu – opartym na regułach dowodzenia – wyrażenia dowodzonego z tego systemu

uznanych wcześniej. W punkcie wyjścia takiego dowodu są tezy systemu, tezami są też kolejne wiersze dowodu, jako wyprowadzone w sposób niezawodny z tez.

Natomiast w dowodzie zwykłym niewprost z zaprzeczenia $\sim\Phi$ wyrażenia dowodzonego wyprowadza się sprzeczność, która – tak samo, jak w dowodach niewprost założeniowych – kończy dowód wyrażenia Φ .

Warto podkreślić, że uznanie dowodów zwykłych za szczególnie przypadki, w sensie określonym, dowodów założeniowych nie wyklucza zastosowania dowodów zwykłych również do implikacji. Mianowicie: dowód wyrażenia implikacyjnego zwykły wprost polega na wyprowadzeniu dowodzonej implikacji z uznanych wcześniej wyrażeń, np. w wyniku zastosowania reguł podstawiania, zastępowania (wyrażeniami równoważnymi) lub zastosowania reguł opuszczania/dołączania kwantyfikatorów (w systemie założeniowym rachunku predykatów). Natomiast dowód implikacji zwykły niewprost redukuje się do dowodu założeniowego niewprost, jeśli bowiem dowód zwykły rozpoczyna się od negacji $\sim(\Phi \Rightarrow \Psi)$, to można także równoważnie powiedzieć, że rozpoczyna się od koniunkcji $(\Phi \wedge \sim\Psi)$, która jest przyjmowana w punkcie wyjścia dowodu założeniowego niewprost implikacji $\Phi \Rightarrow \Psi$.

Z opisanymi regułami dowodzenia są związane reguły dołączania tez do systemu założeniowego KRZ, które można uogólnić przepisem: jeśli istnieje dowód – założeniowy lub zwykły, wprost lub niewprost – danego wyrażenia, to wyrażenie jest dołączane do tez systemu.

3.2 Tezy i reguły wtórne

Reguły pierwotne budowania dowodów oraz dołączania nowych wierszy do dowodu stanowią punkt wyjścia systemu założeniowego. Do tez systemu jest włączane każde wyrażenie udowodnione, przy czym w kolejnych dowodach korzysta się, dla ich uproszczenia, także z reguł wtórnych dodawania wierszy i budowania dowodów, tj. reguł wprowadzonych na podstawie reguł i tez udowodnionych wcześniej, czyli źródłowo – na podstawie reguł pierwotnych.

3.2.1 Pojęcie reguły wtórnej

Następujące określenia uściślają pojęcie reguły wtórnej – względem danej tezy/reguły i wtórnej w kontekście ogółu tez systemu.

D1.a Reguła R dołączania nowych wierszy do dowodu jest w danym systemie założeniowym wtórna ze względu na tezę T *wtw* dla dowolnych wyrażeń Φ oraz $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, o ile Φ jest wyprowadzalne z $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ według reguły R , to jest też wyprowadzalne z $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ i tezy T według reguł pierwotnych tego systemu.

D1.b Reguła R dołączania nowych wierszy do dowodu jest w danym systemie założeniowym wtórna *wtw* dla dowolnych wyrażeń Φ oraz $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, o ile Φ jest wyprowadzalne z $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ według reguły R , to jest też wyprowadzalne z $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ i tez danego systemu według jego reguł pierwotnych.

D1.c Jeśli R oraz R' są regułami tworzenia dowodów, to reguła R' jest wtórna ze względu na regułę R *wtw* dla dowolnego wyrażenia Φ , o ile istnieje dowód Φ według reguły R' , to istnieje dowód wyrażenia Φ według reguły R .

3.2.2 Wybrane tezy/reguły wtórne

Przykłady dowodzonych niżej wyrażeń są dobrane w taki sposób, by dowód dało się zbudować, korzystając wyłącznie z wcześniej uznanych reguł i tez, by nie trzeba było w dowodzie danego wyrażenia dowodzić tez pomocniczych i wprowadzać nowych reguł. Dla porównania różnych sposobów dowodzenia będą także budowane różne dowody tej samej tezy. W miarę rozbudowywania systemu założeniowego prostsze dowody będą jednak tylko szkicowane bądź pozostawione czytelnikowi do samodzielnego przeprowadzenia. Dowodzone tezy będą oznaczane, jak wszystkie twierdzenia, literą **T** z kolejnym numerem, w opisach dowodów często jednak będzie podawany tylko wytłuszczony numer tezy.

Rozpocznijmy od dowodu założeniowego wprost wyrażenia zwanego prawem sylogizmu warunkowego:

T1 $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$.

Zgodnie z regułą budowania takich dowodów przyjmujemy w punkcie wyjścia założenia dowodzonego twierdzenia (zapisane niżej w wierszach 1–3), z których – korzystając wyłącznie z pierwotnych reguł dołączania wierszy, ponieważ nie ma jeszcze udowodnionych tez ani reguł wtórnych – wyprowadzamy następnik ostatniej implikacji, tj. wyrażenie r . Każdy wiersz dowodu powinien być uzasadniony: wiersze 1–3 są uzasadnione regułą budowania dowodów założeniowych wprost (skrót „zał.” albo „z.” wskazuje, że wiersze są założeniami), w wierszach 4. i ostatnim jest skrótowo nazwana reguła odrywania, dająca podstawę dołączenia tych wierszy do dowodu oraz są wskazane te jego wiersze, do których regułą tę zastosowano. Wiersz ostatni nie jest numerowany, ponieważ pojawia się w nim docelowe w tym dowodzie wyrażenie r , kończące dowód (w długich, rozbudowanych dowodach mogą być stosowane skróty lub umowne znaki wskazujące na zakończenie dowodu – w tych analizach, zgodnie z umową, stosowany jest zwykle znak ■). Uzasadnienia dla poszczególnych wierszy będą wpisywane w nawiasie {}; ten nawiasowy sposób zapisywania uzasadnień jest szczególnie przydatny, gdy wiersze dowodu zapisuje się nie w układzie kolumnowym.

1. $p \Rightarrow q$ {zał.}
2. $q \Rightarrow r$ {zał.}
3. p {zał.}
4. q {RO: 1, 3}
- r {RO: 2, 4}.

Niżej są zapisane w przyjęty tu sposób dowody wprost i niewprost tezy:

T2 $(p \vee q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow p)$.

W dowodzie wprost ostatni wiersz jest uzyskany z założeń dowodzonego twierdzenia według reguły opuszczania alternatywy:

1. $p \vee q$ {zał.}
2. $\sim q$ {zał.}
- p {OA: 1, 2}.

W dowodzie niewprost oprócz założeń twierdzenia przyjmujemy w charakterze założenia dowodu niewprost (zdn.) negację następnika ostatniej implikacji, tj. wyrażenie $\sim p$. Sprzeczność, uzyskana z wykorzystaniem zdn., kończy, jak wiemy, dowód niewprost (uzasadniając ostatni wiersz, podaje się numery wierszy sprzecznych).

1. $p \vee q$ {zał.}
 2. $\sim q$ {zał.}
 3. $\sim p$ {zdn.}
 4. q {OA: 1, 3}
- sprz. {2, 4}.

Kolejne wyrażenia są zwane prawami podwójnej negacji:

$$\mathbf{T3} \quad \sim\sim p \Rightarrow p; \quad \mathbf{T4} \quad p \Rightarrow \sim\sim p; \quad \mathbf{T5} \quad \sim\sim p \Leftrightarrow p.$$

W dowodzie niewprost pierwszego z tych praw zdn., tj. $\sim p$, jest sprzeczne z założeniem twierdzenia, co kończy dowód. W dowodzie drugiego korzysta się przy zapisywaniu zdn. z prawa opuszczania podwójnej negacji, tj. z **T3**, uzyskując sprzeczność zdn. z wierszem: 1. p .

Oparte na tezach **3** oraz **4** reguły wtórne dołączania wierszy dowodu – zwane, odpowiednio, regułą opuszczania i dołączania podwójnej negacji, są zapisane w następujących schematach:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{ON} & & \mathbf{DN} \\ \frac{\sim\sim\Phi}{\Phi} & & \frac{\Phi}{\sim\sim\Phi} \end{array}$$

Na podstawie praw **3** i **4** oraz reguły pierwotnej **DR** uzyskuje się prawo **T5** oraz wtórną ze względu na to prawo regułą opuszczania i dołączania podwójnej negacji:

$$\mathbf{O/DN} \quad \frac{\sim\sim\Phi}{\Phi}$$

Podwójna kreska w schemacie reguły **O/DN** wskazuje, że podstawowe dla niej prawo jest równoważnością, co znaczy, że w dowodzeniu można przejść zgodnie z daną regułą zarówno „z góry w dół”, jak i odwrotnie, tj. od wyrażenia pod podwójną kreską do wyrażenia nad nią.

Reguła (prawo) dodawania podwójnej negacji uzasadnia także stosowanie reguły opuszczania alternatywy również w sytuacjach podpadających pod takie oto schematy:

$$\mathbf{OA:} \quad \frac{\sim\Phi \vee \Psi}{\Phi} \quad \frac{\Phi \vee \sim\Psi}{\Psi}$$

$$\frac{\Phi}{\Psi} \quad \frac{\Psi}{\Phi}$$

T6 $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p.$

Zapisując założenia dowodzonego twierdzenia, można skorzystać z reguły **OK**, a w zapisie zdn. z reguły **ON**.

1. $p \Rightarrow q$ {zał.}
2. $\sim q$ {zał.}
3. p {zdn.}
4. q {**RO**: 1, 3}
- sprz. {2, 4}.

Udowodnione prawo, zwane *modus tollendo tollens*, a krócej – *modus tollens*, daje podstawę tak samo nazywanej wtórnej regule dołączania wierszy do dowodu (będzie oznaczana **TOL**):

TOL

$$\frac{\begin{array}{c} \Phi \Rightarrow \Psi \\ \sim \Psi \end{array}}{\sim \Phi}$$

Jeśli zatem ma się w dowodzie jakąś implikację i wyrażenie sprzeczne z jej następnikiem, to można dołączyć do dowodu negację poprzednika tej implikacji. Ten ogólny przepis obejmuje cztery sytuacje, przedstawione w poniższych schematach:

TOL:

$$\begin{array}{cccc} \Phi \Rightarrow \Psi & \Phi \Rightarrow \sim \Psi & \sim \Phi \Rightarrow \Psi & \sim \Phi \Rightarrow \sim \Psi \\ \sim \Psi & \Psi & \sim \Psi & \Psi \\ \hline \sim \Phi & \sim \Phi & \Phi & \Phi \end{array}$$

Jak widać, schematy te różnią się obecnością negacji w członach implikacji, a prawa dla nich podstawowe da się łatwo udowodnić, korzystając z reguł **O/DN**, tj. dołączania i opuszczania podwójnej negacji.

Dowody wyrażen o budowie równoważności składają się z dwóch części, odpowiadających obu składowym implikacjom, tj. z dowodu implikacji prostej (jest to zaznaczane, zwłaszcza w dłuższych dowodach, znakiem \Rightarrow) oraz implikacji odwrotnej (\Leftarrow). Na podstawie obu implikacji składowych można, korzystając z reguły **DR**, uznać dowodzoną równoważność.

W dowodach implikacji składowych równoważności **T7** są uwzględnione, dla porównania, obie odmiany dowodów założeniowych, tj. wprost i niewprost.

T7 $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

□

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

1. $p \Rightarrow q$	{zał.}	1. $p \Rightarrow q$	{zał.}
2. $\sim q$	{zał.}	2. $\sim q$	{zał.}
$\sim p$	{ TOL : 1, 2}	3. p	{zdn.}
		4. q	{ RO : 1, 3}
		sprz.	{2, 4}

□

$(\sim q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

1. $\sim q \Rightarrow \sim p$	{zał.}	1. $\sim q \Rightarrow \sim p$	{zał.}
2. p	{zał.}	2. p	{zał.}
3. $\sim \sim q$	{ TOL : 1, 2}	3. $\sim q$	{zdn.}
q	{ ON : 3}	4. $\sim p$	{ RO : 1, 3}
		sprz.	{2, 4}

Udowodnione implikacje składowe i równoważność są nazywane prawami transpozycji, tak samo zwie się oparte na nich reguły wtórne. Transpozycję danej implikacji uzyskuje się wskutek przestawienia jej członów (następnik zamiast poprzednika) i poprzedzenia ich znakami negacji. Zgodnie z prawami transpozycji z dowolnej implikacji wynika jej transpozycja i odwrotnie, czyli: dowolna implikacja i jej transpozycja są równoważne. Niżej reguła transpozycji (**TR**) jest zapisana w postaci najogólniejszej, tj. dla równoważności.

$$\mathbf{TR} \quad \frac{\Phi \Rightarrow \Psi}{\sim \Psi \Rightarrow \sim \Phi}$$

Często stosowana metoda dowodzenia (budowania dowodów) jest zastosowana w dowodzie wprost kolejnej formuły.

T8 $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$.

Dowód:

1. $p \Rightarrow (q \wedge r)$	{zał.}
1.1 p	{zd.}
1.2 $q \wedge r$	{ RO : 1, 1.1}
1.3 q	{ OK : 1.2}
1.4 r	{ OK : 1.2}
2. $p \Rightarrow q$	{1.1 \Rightarrow 1.3}

3. $p \Rightarrow r$ {1.1 \Rightarrow 1.4}
 $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ {DK: 2, 3}.

W charakterze założenia dowodzonego twierdzenia można przyjąć tylko implikację wpisaną w wierszu 1., ponieważ następnik implikacji **8** jest koniunkcją. Nieskuteczne w obecnym stanie rozwijanego tu systemu założeniowego jest też dowodzenie niewprost, jako że nie dysponujemy jeszcze regułą (prawem) instruującą, jak przekształcać zanegowaną koniunkcję $\sim[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$. Skoro pozostaje dowód wprost, to trzeba w nim z implikacji: $p \Rightarrow (q \wedge r)$ wyprowadzić koniunkcję $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$. Gdybyśmy w dowodzie dysponowali obiema jej składowymi implikacjami, wtedy uzyskalibyśmy łatwo tę koniunkcję według reguły **DK**. Zapowiedziany nowy sposób dowodzenia prowadzi do obu potrzebnych tu implikacji, tj. do $p \Rightarrow q$ oraz $p \Rightarrow r$. Sposób ten jest skuteczny, ilekroć trzeba w dowodzeniu dochodzić w kolejnych wierszach do wyrażeń implikacyjnych. Polega na tym, że w charakterze założenia dodatkowego (zwanego też założeniem dowodu, którego nie można mylić z założeniem dowodzonego twierdzenia) przyjmuje się poprzednik potrzebnej implikacji (w powyższym dowodzie wyrażenie p), z którego wyprowadza się – zgodnie z regułami dowodzenia, wcześniej udowodnionymi tezami (prawami) i przyjętymi w danym dowodzie wierszami – następnik (tu wyrażenia q oraz r). Następnie uznaje się – w kolejnym wierszu toku dowodu nadrzędnego względem wnioskowania rozpoczynającego się od założenia dodatkowego – implikację, której poprzednikiem jest dane założenie dodatkowe, a następnikiem uzyskane z niego wyrażenie. Implikacja taka podsumowuje fragment dowodu rozpoczynający się od danego założenia dodatkowego.

Ciąg wierszy rozpoczynających się od założenia dodatkowego (zd.) jest oznaczany dwiema rozdzielonymi kropką liczbami, z których druga wskazuje na kolejność wiersza w danym ciągu, a pierwsza na numer przyjętego w danym dowodzie założenia dodatkowego (w powyższym rozumowaniu jest tylko jedno założenie dodatkowe). Jeśliby było potrzebne przyjmowanie dodatkowych założeń w obrębie takiego ciągu (rozpoczynającego się od ogólniejszego założenia dodatkowego), np. gdyby po wierszu 1.4 trzeba było przyjąć założenie w obrębie ciągu rozpoczynającego się od 1.1, to byłoby ono oznaczone jako 1.1.1, kolejne wiersze na nim oparte byłyby oznaczone jako 1.1.2, 1.1.3 itd., a wynik wnioskowania rozpoczynającego się od założenia 1.1.1, a kończącego na wyrażeniu 1.1. k , zostałby zapisany w postaci implikacji $1.1.1 \Rightarrow 1.1.k$ w wierszu ciągu nadrzędnego względem

ciągu 1.1.1, 1.1.2 itd., czyli jako wiersz 1.5. Jak widać, przyjmujemy umowę, że wiersze głównego toku rozumowania są oznaczane pojedynczymi liczbami (1, 2, 3, ...), wiersze rzędu drugiego liczbami podwójnymi (1.1, 1.2, ...; 2.1, 2.2, ...), rzędu trzeciego – potrójnymi (1.1.1, 1.1.2, ...; 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, ...) itd. Taki sposób oznaczania wskazuje jednoznacznie na miejsce danego wiersza (zapisanej w nim formuły) w strukturze dowodu i ułatwia przestrzeganie zasady, że w kolejnych wierszach dowodu można wykorzystywać – oprócz wszystkiego, co wcześniej uznane w ramach budowanego systemu – jedynie wiersze rzędów wyższych od tego, w którym jest wykonywany dany krok dowodowy, a wiersze danego rzędu są uwarunkowane wszystkimi założeniami rzędów wyższych.

Zastosowany w dowodzie tezy **8** sposób dowodzenia jest opisany we wtórnej regule budowania dowodów, zwanej regułą dołączania implikacji do dowodu: do dowodu można dołączyć implikację, której poprzednikiem jest założenie dodatkowe, a następnikiem wyrażenie uzyskane z założenia dodatkowego zgodnie z regułami dowodzenia i na podstawie wyrażen uznanych wcześniej (wcześniejszych wierszy dowodu i tez systemu).

Przykłady zastosowania tej reguły są widoczne w dowodach formuł **(9)** (w dowodzie są dwa założenia dodatkowe) i **(10)** (są trzy założenia dodatkowe).

$$\mathbf{T9} \quad [(p \vee q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)].$$

Dowód:

- | | | |
|-----|--|-------------------------|
| 1. | $(p \vee q) \Rightarrow r$ | {zał.} |
| 1.1 | p | {zd.} |
| 1.2 | $p \vee q$ | {DA: 1.1} |
| 1.3 | r | {RO: 1, 1.2} |
| 2. | $p \Rightarrow r$ | {1.1 \Rightarrow 1.3} |
| 2.1 | q | {zd.} |
| 2.2 | $p \vee q$ | {DA: 2.1} |
| 2.3 | r | {RO: 1, 2.2} |
| 3. | $q \Rightarrow r$ | {2.1 \Rightarrow 2.3} |
| | $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ | {DK: 2, 3}. |

$$\mathbf{T10} \quad [(p \vee q \vee r) \Rightarrow s] \Rightarrow [(p \Rightarrow s) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge (r \Rightarrow s)].$$

Dowód:

- | | | |
|-----|-----------------------------------|--------|
| 1. | $(p \vee q \vee r) \Rightarrow s$ | {zał.} |
| 1.1 | p | {zd.} |

- | | | |
|-----|---|-------------------------|
| 1.2 | $p \vee q \vee r$ | {DA: 1.1} |
| 1.3 | s | {RO: 1, 1.2} |
| 2. | $p \Rightarrow s$ | {1.1 \Rightarrow 1.3} |
| 2.1 | q | {zd.} |
| 2.2 | $p \vee q \vee r$ | {DA: 2.1} |
| 2.3 | s | {RO: 1, 2.2} |
| 3. | $q \Rightarrow s$ | {2.1 \Rightarrow 2.3} |
| 3.1 | r | {zd.} |
| 3.2 | $p \vee q \vee r$ | {DA: 3.1} |
| 3.3 | s | {RO: 1, 3.2} |
| 4. | $r \Rightarrow s$ | {3.1 \Rightarrow 3.3} |
| | $(p \Rightarrow s) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge (r \Rightarrow s)$ | {DK: 2, 3, 4}. |

T11 $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$.

Ponieważ formuła jest równoważnością, trzeba udowodnić każdą z jej implikacji składowych. W dowodzie wprost implikacji prostej z założeń dodatkowych jest wyprowadzana sprzeczność, co daje podstawę do przyjęcia (w głównym nurcie dowodu) zaprzeczenia założenia prowadzącego do sprzeczności. Dowód implikacji odwrotnej jest niewprost, a w zapisie jego założeń jest wykorzystana reguła **OK** (do założenia dowodzonej implikacji) i **ON** (zdn.).

□

$\sim(p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

- | | | |
|-----|------------------------|-----------------------------------|
| 1. | $\sim(p \vee q)$ | {zał.} |
| 1.1 | p | {zd.} |
| 1.2 | $p \vee q$ | {DA: 1.1} |
| 2. | $\sim p$ | {1.1 \Rightarrow sprz.: 1, 1.2} |
| 2.1 | q | {zd.} |
| 2.2 | $p \vee q$ | {DA: 2.1} |
| 3. | $\sim q$ | {2.1 \Rightarrow sprz.: 1, 2.2} |
| | $\sim p \wedge \sim q$ | {DK: 2, 3} |

□

$(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim(p \vee q)$

- | | | |
|----|------------|------------|
| 1. | $\sim p$ | {zał.} |
| 2. | $\sim q$ | {zał.} |
| 3. | $p \vee q$ | {zdn.} |
| 4. | q | {OA: 3, 1} |
| | sprz. | {2, 4}. |

Dla porównania: w dowodzie wprost implikacji odwrotnej można wykorzystać dołączanie do dowodu negacji założenia dodatkowego prowadzącego do sprzeczności.

- | | | |
|-----|------------------|------------------------------------|
| 1. | $\sim p$ | {zał.} |
| 2. | $\sim q$ | {zał.} |
| 1.1 | $p \vee q$ | {zd.} |
| 1.2 | q | {OA: 1.1, 1} |
| | $\sim(p \vee q)$ | {1.1 \Rightarrow sprz.: 2, 1.2}. |

Zastosowany w uzasadnieniu tezy **11** sposób dowodzenia jest opisany następującą (wtórną) regułą budowania dowodów, zwaną regułą negowania (obalania) założeń dodatkowych: do dowodu można dołączyć negację założenia dodatkowego, które prowadzi do sprzeczności. Natomiast równoważność **11**, zwana prawem negowania alternatywy (lub drugim prawem de Morgana), daje podstawę, tak samo zwanej, wtórnej regule dołączania nowych wierszy do dowodu (będzie skracana przez **NA**).

$$\mathbf{NA} \quad \frac{\sim(\Phi \vee \Psi)}{\sim\Psi \wedge \sim\Phi}$$

Reguła pozwalająca w dowodzie przyjąć zaprzeczenie wyrażenia, które prowadzi do sprzeczności, ukazuje wyraźnie, że dowody założeniowe niewprost wyrażenia $\Phi \Rightarrow \Psi$, polegające na okazaniu, że do sprzeczności prowadzi koniunkcja $(\Phi \wedge \sim\Psi)$, ostatecznie także sprowadzają się do wyprowadzenia następnika dowodzonej implikacji. Uzyskawszy bowiem sprzeczność z wyjściowej dla takiego dowodzenia koniunkcji $(\Phi \wedge \sim\Psi)$, nie kwestionujemy pierwszego jej członu, tj. założeń twierdzenia, lecz negujemy $(\sim\Psi)$, uzyskując następnik Ψ .

Ilustracji dla rozumowań zwykłych niewprost dostarczają dowody zasady wyłączonego środka i zasady niesprzeczności.

T12 $p \vee \sim p$.

Dowód:

- | | | |
|----|----------------------------|---------|
| 1. | $\sim(p \vee \sim p)$ | {zdn.} |
| 2. | $\sim p \wedge \sim\sim p$ | {NA: 1} |
| 3. | $\sim p$ | {OK: 2} |
| 4. | p | {OK: 2} |
| | sprz. | {3, 4}. |

T13 $\sim(p \wedge \sim p)$.

Dowód:

- | | | |
|----|-----------------------------|-------------|
| 1. | $\sim\sim(p \wedge \sim p)$ | {zdn.} |
| 2. | p | {OK, ON: 1} |
| 3. | $\sim p$ | {OK, ON: 1} |
| | sprz. | {2, 3}. |

W uzasadnieniu wierszy 2. i 3. w sposób skrócony są wskazane reguły użyte w dowodzie: „argumentem” reguły **ON** jest wyrażenie zapisane w wierszu 1., a wynik tego „działania” jest „argumentem” reguły **OK** – wynik tych działań jest zapisany w wierszach 2. oraz 3. Ten skrócony sposób będzie stosowany w opisach schematów dowodów lub ich fragmentów.

T14 $(p \wedge \sim p) \Rightarrow q$.

Dowód:

- | | | |
|----|------------|-------------|
| 1. | p | {zał.} |
| 2. | $\sim p$ | {zał.} |
| 3. | $p \vee q$ | {DA: 1} |
| | q | {OA: 3, 2}. |

Teza **14** jest zwana prawem Dunsza Szkota.

T15 $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$.

Dowód:

□

$\sim(p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

- | | | |
|----|----------------------------|-------------|
| 1. | $\sim(p \wedge q)$ | {zał.} |
| 2. | $\sim(\sim p \vee \sim q)$ | {zdn.} |
| 3. | $p \wedge q$ | {ON, NA: 2} |
| | sprz. | {1, 3} |

□

$(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow \sim(p \wedge q)$

- | | | |
|----|----------------------|----------------|
| 1. | $\sim p \vee \sim q$ | {zał.} |
| 2. | p | {OK, ON: zdn.} |
| 3. | q | {OK, ON: zdn.} |
| 4. | $\sim q$ | {OA: 1, 2} |
| | sprz. | {3, 4}. |

Równoważność **15** jest zwana prawem negowania koniunkcji (lub pierwszym prawem de Morgana), tak samo jest nazywana oparta na niej reguła wtórna dołączania nowych wierszy do dowodu.

$$\text{NK} \quad \frac{\sim(\Phi \wedge \Psi)}{\sim\Psi \vee \sim\Phi}$$

T16 $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$.

Dowód:

□

- | | |
|--------------------------|-----------------|
| 1. $p \Rightarrow q$ | {zał.} |
| 2. $\sim(\sim p \vee q)$ | {zdn.} |
| 3. p | {OK, ON, NA: 2} |
| 4. $\sim q$ | {OK, NA: 2} |
| 5. q | {RO: 1, 3} |
| sprz. | {4, 5} |

□

$(\sim p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

- | | |
|--------------------|-------------|
| 1. $\sim p \vee q$ | {zał.} |
| 2. p | {zał.} |
| q | {OA: 1, 2}. |

Równoważność **16** to prawo zastępowania implikacji alternatywą.

T17 $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q]$.

Dowód:

□

- | | |
|---------------------------------|-------------|
| 1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$ | {zał.} |
| 2. p | {zał.} |
| 3. $\sim r$ | {zał.} |
| 4. $\sim(p \wedge q)$ | {TOL: 1, 3} |
| 5. $\sim p \vee \sim q$ | {NK: 4} |
| $\sim q$ | {OA: 5, 2} |

□

$[(p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q] \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$

- | | |
|---|-------------|
| 1. $(p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q$ | {zał.} |
| 2. p | {zał.} |
| 3. q | {zał.} |
| 4. $\sim(p \wedge \sim r)$ | {TOL: 1, 3} |

5. $\sim p \vee r$ {NK: 4}
 r {OA: 5, 2}.

Kolejne dwa twierdzenia zostaną udowodnione głównie po to, by na ich przykładzie zilustrować, jak w dowodach są wykorzystywane tezy udowodnione wcześniej (twierdzenia te zostaną użyte w dowodzie twierdzenia dwudziestego).

T18 $q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

Dowód:

- | | |
|--------------------|----------------------------|
| 1. q {zał.} | 1. q {zał.} |
| 2. p {zał.} | 2. p {zał.} |
| 3. $\sim q$ {zdn.} | 3. $q \vee \sim p$ {DA: 1} |
| sprz. {1, 3} | q {OA: 3, 2}. |

W dowodzie niewprost użycie zdn. – niezbędne w wyprowadzaniu sprzeczności – polega tylko na jego sprzeczności z pierwszym założeniem dowodzonego twierdzenia. W dowodzie wprost alternatywa dołączona w wierszu 3. dobrana jest tak, by w kolejnym wierszu uzyskać wyrażenie q , do którego zmierzało rozumowanie wprost. Mówi się, że zgodnie z prawem **18** „prawda wynika z wszystkiego”.

T19 $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

Dowód:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1. $\sim p$ {zał.} | 1. $\sim p$ {zał.} |
| 2. p {zał.} | 2. p {zał.} |
| 3. $p \vee q$ {DA: 2} | 3. $p \vee q$ {DA: 2} |
| q {OA: 3, 1}. | q {OA: 3, 1}. |

Prawo **19** jest odczytywane jako „z fałszu wynika wszystko”.

W rozumowaniu okazującym, że równoważność:

T20 $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

jest tezą systemu założeniowego KRZ, w dowodzie wprost implikacji prostej są wykorzystane tezy **18** i **19** oraz reguła negowania w dowodzie założeń dodatkowych prowadzących do sprzeczności.

Dowód:

□

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\sim(p \Rightarrow q)$ {zał.} | 1. $\sim(p \Rightarrow q)$ {zał.} |
| 1.1 $\sim p$ {zd.} | 1.1 $\sim p$ {zd.} |
| 1.2 $p \Rightarrow q$ {RO: T19, 1.1} | 1.2 $p \Rightarrow q$ {RO: T19, 1.1} |

2. p {1.1 \Rightarrow sprz.: 1, 1.2}
 2.1 q {zd.}
 2.2 $p \Rightarrow q$ {RO: T18, 2.1}
 3. $\sim q$ {2.1 \Rightarrow sprz.: 1, 2.2}
 $p \wedge \sim q$ {DK: 2, 3}.

□

$(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)$

1. p {zał.}
 2. $\sim q$ {zał.}
 3. $p \Rightarrow q$ {zdn.}
 4. $\sim p$ {TOL: 3, 2}
 sprz. {4, 1}

lub

4. q {RO: 3, 1}
 sprz. {2, 4}.

Tezę (20) i opartą na niej wtórną regułę dodawania wierszy do dowodu zwie się prawem (regułą) negowania implikacji (NI).

$$\text{NI} \quad \frac{\sim(\Phi \Rightarrow \Psi)}{\Phi \wedge \sim\Psi}$$

T21 $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$.

Dowód:

1. $\sim[(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)]$ {zdn.}
 2. $\sim(p \Rightarrow q)$ {OK, NA: 1}
 3. $\sim(q \Rightarrow r)$ {OK, NA: 1}
 4. p {OK, NI: 2}
 5. $\sim q$ {OK, NI: 2}
 6. q {OK, NI: 3}
 sprz. {5, 6}.

T22 $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$.

Dowód:

□

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim(p \wedge \sim q)$

1. $p \Rightarrow q$ {zał.}
 2. p {OK, ON: zdn.}
 3. $\sim q$ {OK, ON: zdn.}

4. $\sim p$ {TOL: 1, 3}
sprz. {2, 4}.

□

$\sim(p \wedge \sim q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

1. $\sim(p \wedge \sim q)$ {zał.}
2. p {zał.}
3. $\sim p \vee q$ {ON, NK: 1}
 q {OA: 3, 2}.

Teza **T22** jest zwana prawem zastępowania implikacji koniunkcją. Warto dostrzec, że prawa tego nie da się w kontekście dotychczas udowodnionych twierdzeń i reguł wyprowadzić bezpośrednio z (prawa i reguły) **NI** (brak odpowiednika prawa **T7**, tj. transpozycji, dla równoważności).

W dowodach tez, w których występuje znak równoważności, korzysta się często z następujących praw (**23–26**) i odpowiadających im reguł:

T23 $[(p \Leftrightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$.

Dowód:

1. $p \Leftrightarrow q$ {zał.}
2. p {zał.}
3. $p \Rightarrow q$ {OR: 1}
 q {RO: 3, 2}.

Na tezie **23** jest oparta reguła odrywania dla równoważności, która tu będzie oznaczana symbolem **RO**_⇔ (jest także używane oznaczenie **RO**_R):

$$\mathbf{RO}_{\Leftrightarrow} \quad \frac{\Phi \Leftrightarrow \Psi \quad \Phi(\Psi)}{\Psi(\Phi)}$$

T24 $[(p \Leftrightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$.

Dowód:

1. $p \Leftrightarrow q$ {zał.}
2. $\sim q$ {zał.}
3. $p \Rightarrow q$ {OR: 1}
 $\sim p$ {TOL: 3, 2}.

Teza **24** to prawo *modus tollens* dla równoważności; tak samo zwie się wtórną względem tej tezy regułą, która oprócz przypadków widocznych wprost w poniższym schemacie obejmuje, analogicznie jak **TOL** dla implikacji, kolejne dwie sytuacje, różniące się tylko umiejscowieniem negacji (patrz **T6** i ogólny zapis reguły **TOL**).

$$\mathbf{TOL}_{\Leftrightarrow} \quad \frac{\Phi \Leftrightarrow \Psi}{\sim \Psi (\sim \Phi)} \\ \frac{\quad}{\sim \Phi (\sim \Psi)}$$

Kolejna równoważność to tzw. prawo transpozycji dla równoważności. Dowody obu jej składowych implikacji są wprost.

T25 $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Leftrightarrow \sim p)$.

Dowód:

□

$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Leftrightarrow \sim p)$

- | | | |
|-----|---------------------------------|-------------------------------------|
| 1. | $p \Leftrightarrow q$ | {zał.} |
| 1.1 | $\sim q$ | {zd.} |
| 1.2 | $\sim p$ | { TOL _⇔ : 1, 1.1} |
| 2. | $\sim q \Rightarrow \sim p$ | {1.1 ⇒ 1.2} |
| 2.1 | $\sim p$ | {zd.} |
| 2.2 | $\sim q$ | { TOL _⇔ : 1, 2.1} |
| 3. | $\sim p \Rightarrow \sim q$ | {2.1 ⇒ 2.2} |
| | $\sim q \Leftrightarrow \sim p$ | { DR : 2, 3} |

□

$(\sim q \Leftrightarrow \sim p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$

- | | | |
|-----|---------------------------------|-------------------------------------|
| 1. | $\sim q \Leftrightarrow \sim p$ | {zał.} |
| 1.1 | p | {zd.} |
| 1.2 | q | { TOL _⇔ : 1, 1.1} |
| 2. | $p \Rightarrow q$ | {1.1 ⇒ 1.2} |
| 2.1 | q | {zd.} |
| 2.2 | p | { TOL _⇔ : 1, 2.1} |
| 3. | $q \Rightarrow p$ | {2.1 ⇒ 2.2} |
| | $p \Leftrightarrow q$ | { DR : 2, 3}. |

Oto schemat dla opartej na tym prawie reguły:

$$\mathbf{TR}_{\Leftrightarrow} \quad \frac{\Phi \Leftrightarrow \Psi}{\sim \Psi \Leftrightarrow \sim \Phi}$$

T26 $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$.

Dowód:

- | | | |
|----|-----------------------|--------|
| 1. | $p \Leftrightarrow q$ | {zał.} |
| 2. | $q \Leftrightarrow r$ | {zał.} |

- 1.1 p {zd.}
- 1.2 q {**RO**_⇔: 1, 1.1}
- 1.3 r {**RO**_⇔: 2, 1.2}
- 3. $p \Rightarrow r$ {1.1 \Rightarrow 1.3}

Analogicznie jak wiersz 3., tj. wychodząc od założenia dodatkowego 2.1 r i stosując **RO**_⇔, uzyskuje się

- 4. $r \Rightarrow p$
- $p \Leftrightarrow r$ {**DR**: 3, 4}.

Teza właśnie udowodniona to tzw. prawo przechodniości dla równoważności.

T27 $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)].$

W dowodzie wprost implikacji (**27**) wystarczy zastosować do założeń kolejno reguły **OK**, dwukrotnie **RO** oraz **DK**. Teza ta to tzw. prawo mnożenia implikacji stronami, które daje podstawę tak samo nazwanej (**MIS**) i często stosowanej w dowodzeniu regule dołączania wierszy do dowodu.

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{MIS} \qquad \qquad \qquad \Phi_1 \Rightarrow \Psi_1 \\
 \qquad \qquad \qquad \Phi_2 \Rightarrow \Psi_2 \\
 \qquad \qquad \qquad \dots\dots\dots \\
 \qquad \qquad \qquad \Phi_n \Rightarrow \Psi_n \\
 \hline
 (\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \dots \wedge \Phi_n) \Rightarrow (\Psi_1 \wedge \Psi_2 \wedge \dots \wedge \Psi_n)
 \end{array}$$

T28 $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow r.$

Dowód:

- 1. $p \Rightarrow r$ {zał.}
- 2. $q \Rightarrow r$ {zał.}
- 3. $p \vee q$ {zał.}
- 4. $\sim r$ {zdn.}
- 5. $\sim q$ {**TOL**: 2, 4}
- 6. p {**OA**: 3, 5}
- 7. r {**RO**: 1, 6}

sprz. 4, 7.

W dowodzie niewprost tej tezy stosuje się kolejno reguły **TOL**, **OA** i **RO** (uzyskując sprzeczność: $\sim r \wedge r$). Prawo to i oparta na nim reguła są zwane – dylematu konstrukcyjnego prostego (**DKP**):

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{DKP} \quad \Phi_1 \Rightarrow \Psi \\
 \quad \quad \Phi_2 \Rightarrow \Psi \\
 \quad \quad \dots\dots\dots \\
 \quad \quad \Phi_n \Rightarrow \Psi \\
 \hline
 \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \dots \vee \Phi_n \\
 \Psi
 \end{array}$$

Na prawie tym jest również oparta reguła wtórna budowania dowodów, tj. tworzenia dowodów rozgałęzionych wprost: dowód wyrażenia $\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow (\Phi_{n-1} \Rightarrow \Phi_n) \dots)$, $n \geq 1$ jest zakończony, jeśli otrzyma się Φ_n z każdego z założeń dodatkowych $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k$, których alternatywa należy do dowodu lub może być doń dołączona jako podstawienie tezy logicznej.

T29 $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$.

Dowód:

- | | | |
|-----|-------------------|--------------|
| 1. | $p \Rightarrow q$ | {zał.} |
| 2. | $r \Rightarrow s$ | {zał.} |
| 3. | $p \vee r$ | {zał.} |
| 1.1 | p | {zd.} |
| 1.2 | q | {RO: 1, 1.1} |
| 1.3 | $q \vee s$ | {DA: 1.2} |
| 2.1 | r | {zd.} |
| 2.2 | s | {RO: 2, 2.1} |
| 2.3 | $q \vee s$ | {DA: 1.2} |

co kończy dowód rozgałęziony {1.1 \Rightarrow 1.2, 2.1 \Rightarrow 2.3, 3}.

Warto zauważyć, że:

(i) odwoływanie się w dowodzie tej tezy nie do reguły tworzenia dowodów rozgałęzionych, lecz do reguły dołączania wierszy **DKP** wymaga dopisania do dowodu dwóch implikacji podsumowujących wnioskowania rozpoczynające się od założeń dodatkowych oraz wiersza uzyskanego zgodnie z **DKP**:

- | | | |
|----|----------------------------|--------------------------|
| 4. | $p \Rightarrow (q \vee s)$ | {1.1 \Rightarrow 1.3} |
| 5. | $r \Rightarrow (q \vee s)$ | {2.1 \Rightarrow 2.3} |
| | $q \vee s$ | { DKP : 4, 5, 3}. |

(ii) powoływanie się nie na regułę dołączania wierszy **DKP**, lecz na prawo dylematu konstrukcyjnego prostego wymaga ponadto wyraźnego zapisania koniunkcji wierszy 4, 5 i 3, dokonania w tezie **28** podstawień:

q/r oraz $r/(p \vee q)$; dopiero zastosowanie **RO** do tak przekształconego prawa dylematu konstrukcyjnego prostego i tej koniunkcji (jest poprzednikiem wyrażenia uzyskanego w wyniku przekształcenia) prowadzi do kończącego ten dowód wyrażenia $q \vee s$. Przykład ten dobrze ilustruje upraszczającą dowodzenie rolę reguł wtórnych dołączania nowych wierszy i budowania dowodów.

Teza **29** to prawo dylematu konstrukcyjnego złożonego, tak samo jest zwana (**DKZ**) oparta na nim reguła dołączania nowych wierszy do dowodu. Oto schemat wnioskowania zgodny z tą regułą, uogólniony na n implikacji.

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{DKZ} \qquad \Phi_1 \Rightarrow \Psi_1 \\
 \qquad \qquad \Phi_2 \Rightarrow \Psi_2 \\
 \qquad \qquad \dots\dots\dots \\
 \qquad \qquad \Phi_n \Rightarrow \Psi_n \\
 \hline
 \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \dots \vee \Phi_n \\
 \hline
 \Psi_1 \vee \Psi_2 \vee \dots \vee \Psi_n
 \end{array}$$

Schemat ten można wyrazić tak: jeśli są w wierszach dowodu implikacje i alternatywa ich poprzedników, to można w nowym wierszu uznać alternatywę następników tych implikacji.

$$\mathbf{T30} \quad [(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)].$$

Dowód:

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| 1. $p \Rightarrow q$ | {zał.} |
| 2. $r \Rightarrow s$ | {zał.} |
| 3. $p \vee r$ | {zał.} |
| $q \vee s$ | { DKZ : 1, 2, 3}. |

I prawo **30**, i opartą na nim regułę wtórną nazywa się dodawaniem implikacji stronami (**DIS**).

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{DIS} \qquad \Phi_1 \Rightarrow \Psi_1 \\
 \qquad \qquad \Phi_2 \Rightarrow \Psi_2 \\
 \qquad \qquad \dots\dots\dots \\
 \qquad \qquad \Phi_n \Rightarrow \Psi_n \\
 \hline
 (\Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \dots \vee \Phi_n) \Rightarrow (\Psi_1 \vee \Psi_2 \vee \dots \vee \Psi_n)
 \end{array}$$

Gdy ma się w dowodzie n implikacji, wtedy – postępując według **DIS** – można w kolejnym jego wierszu przyjąć implikację, której poprzednikiem jest alternatywa poprzedników, a następnikiem alternatywa następników tych n implikacji.

T31 $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge \sim(q \vee s)] \Rightarrow \sim(p \vee r)$.

Dowód:

- | | |
|---------------------------|-------------|
| 1. $p \Rightarrow q$ | {zał.} |
| 2. $r \Rightarrow s$ | {zał.} |
| 3. $\sim(q \vee s)$ | {zał.} |
| 4. $\sim q$ | {OK, NA: 3} |
| 5. $\sim s$ | {OK, NA: 3} |
| 6. $\sim p$ | {TOL: 1, 4} |
| 7. $\sim r$ | {TOL: 2, 5} |
| 8. $\sim p \wedge \sim r$ | {DK: 6, 7} |
| $\sim(p \vee r)$ | {NA: 8}. |

Powyższe rozumowanie wprost warto uzupełnić dowodem niewprost:

- | | |
|----------------------|--------------|
| 1. $p \Rightarrow q$ | {zał.} |
| 2. $r \Rightarrow s$ | {zał.} |
| 3. $\sim(q \vee s)$ | {zał.} |
| 4. $p \vee r$ | {zdn.} |
| 1.1 p | {zd.} |
| 1.2 q | {RO: 1, 1.1} |
| 1.3 $q \vee s$ | {DA: 1.2} |
| sprz. 3, 1.3 | |
| 2.1 r | {zd.} |
| 2.2 s | {RO: 2, 2.1} |
| 2.3 $q \vee s$ | {DA: 2.2}. |
| sprz. 3, 2.3. | |

Zastosowane w tym rozumowaniu kroki od 1.1 do ostatniego wiersza są zgodne z regułą wtórną budowania dowodów, tj. tworzenia dowodów rozgałęzionych niewprost: dowód wyrażenia $\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow (\Phi_{n-1} \Rightarrow \Phi_n) \dots)$, $n \geq 1$ jest zakończony, jeśli otrzyma się sprzeczność z każdego z założeń dodatkowych $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k$, których alternatywa należy do dowodu lub może być doń dołączona jako podstawienie tezy logicznej.

T32 $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \vee r) \wedge \sim(q \wedge s)] \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (s \Rightarrow r)]$.

Dowód:

- | | |
|----------------------|--------|
| 1. $p \Rightarrow q$ | {zał.} |
| 2. $r \Rightarrow s$ | {zał.} |
| 3. $p \vee r$ | {zał.} |

- 4. $\sim(q \wedge s)$ {zał.}
- 5. $\sim q \vee \sim s$ {NK: 4}
 - 1.1 q {zd.}
 - 1.2 $\sim s$ {OA: 5, 1.1}
 - 1.3 $\sim r$ {TOL: 2, 1.2}
 - 1.4 p {OA: 3, 1.3}
- 6. $q \Rightarrow p$ {1.1 \Rightarrow 1.4}

W sposób analogiczny, wychodząc od założenia dodatkowego 2.1 s, używa się

- 7. $s \Rightarrow r$
 $(q \Rightarrow p) \wedge (s \Rightarrow r)$ {DK: 6, 7}.

Teza **32** to prawo odwracania implikacji stronami, dające podstawę następującemu schematowi wnioskowania (regule **OIS**):

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{OIS} \qquad \qquad \Phi_1 \Rightarrow \Psi_1 \\
 \qquad \qquad \qquad \Phi_2 \Rightarrow \Psi_2 \\
 \qquad \qquad \qquad \dots\dots\dots \\
 \qquad \qquad \qquad \Phi_n \Rightarrow \Psi_n \\
 \qquad \qquad \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \dots \vee \Phi_n \\
 \qquad \sim(\Psi_i \wedge \Psi_j), \text{ dla } 1 \leq i \neq j \leq n \\
 \hline
 \qquad \qquad \Psi_1 \Rightarrow \Phi_1 \\
 \qquad \qquad \Psi_2 \Rightarrow \Phi_2 \\
 \qquad \qquad \dots\dots\dots \\
 \qquad \qquad \Psi_n \Rightarrow \Phi_n
 \end{array}$$

Zgodnie z tym schematem z n implikacji, alternatywy ich poprzedników i stąd, że dowolne dwa ich następniki nie są jednocześnie prawdziwe, można – według OIS – wyprowadzić implikacje odwrotne.

W wielu dowodach korzysta się z tzw. praw ekstensjonalności. Sformułowania tych praw dla poszczególnych funktorów prawdziwościowych podpadają pod następujący schemat:

T33 $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow s)] \Rightarrow [(p F r) \Leftrightarrow (q F s)], \quad F \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \dots\}.$

Schemat ten obejmuje prawa zwane, kolejno, prawem ekstensjonalności dla koniunkcji, alternatywy zwykłej, implikacji, równoważności itd. Niżej są udowodnione pierwsze z tych praw.

T33a $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge s)].$

Dowód:

- | | | |
|-----|---|----------------------------|
| 1. | $p \Leftrightarrow q$ | {zał.} |
| 2. | $r \Leftrightarrow s$ | {zał.} |
| 1.1 | $p \wedge r$ | {zd.} |
| 1.2 | p | {OK: 1.1} |
| 1.3 | r | {OK: 1.1} |
| 1.4 | q | {RO _⇔ : 1, 1.2} |
| 1.5 | s | {RO _⇔ : 2, 1.3} |
| 1.6 | $q \wedge s$ | {DK: 1.4, 1.5} |
| 3. | $(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)$ | {1.1 \Rightarrow 1.6} |

analogicznie, wychodząc od założenia 2.1 $q \wedge s$, wyprowadza się implikację odwrotną

- | | | |
|----|---|-------------------------|
| 4. | $(q \wedge s) \Rightarrow (p \wedge r)$ | {2.1 \Rightarrow 2.6} |
| | $(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge s)$ | {DR: 3, 4}. |

T33b $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee s)].$

- | | | |
|-----|---|-------------------------|
| 1. | $p \Leftrightarrow q$ | {zał.} |
| 2. | $r \Leftrightarrow s$ | {zał.} |
| 3. | $p \Rightarrow q$ | {OR: 1} |
| 4. | $q \Rightarrow p$ | {OR: 1} |
| 5. | $r \Rightarrow s$ | {OR: 2} |
| 6. | $s \Rightarrow r$ | {OR: 2} |
| 1.1 | $p \vee r$ | {zd.} |
| 1.2 | $q \vee s$ | {DKZ: 3, 5, 1.1} |
| 7. | $(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$ | {1.1 \Rightarrow 1.2} |
| 2.1 | $q \vee s$ | {zd.} |
| 2.2 | $p \vee r$ | {DKZ: 4, 6, 2.1} |
| 8. | $(q \vee s) \Rightarrow (p \vee r)$ | {2.1 \Rightarrow 2.2} |
| | $(p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee s)$ | {DR: 7, 8}. |

T33c $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow s)] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow s)].$

Dowód:

- | | | |
|-------|-----------------------|--------|
| 1. | $p \Leftrightarrow q$ | {zał.} |
| 2. | $r \Leftrightarrow s$ | {zał.} |
| 1.1 | $p \Rightarrow r$ | {zd.} |
| 1.1.1 | q | {zd.} |

- 1.1.2 p $\{\mathbf{RO}_{\Leftrightarrow}: 1, 1.1.1\}$
 1.1.3 r $\{\mathbf{RO}: 1.1, 1.1.2\}$
 1.1.4 s $\{\mathbf{RO}_{\Leftrightarrow}: 2, 1.1.3\}$
 1.2 $q \Rightarrow s$ $\{1.1.1 \Rightarrow 1.1.4\}$
 3. $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow s)$ $\{1.1 \Rightarrow 1.2\}$

w sposób analogiczny, wychodząc od założenia dodatkowego 2.1 $q \Rightarrow s$, da się osiągnąć implikację odwrotną:

4. $(q \Rightarrow s) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
 $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow s)$ $\{\mathbf{DR}: 3, 4\}$.

Prawa ekstensjonalności są podstawowe dla udowodnienia reguły zastępowania członów równoważności (oznaczanej tu przez $\mathbf{RZ}_{\Leftrightarrow}$, a w wielu notacjach przez \mathbf{RZ}_R , zwanej także regułą zastępowania dla równoważności oraz, dwuznacznie, regułą ekstensjonalności dla równoważności)¹¹.

W sformułowaniu tej reguły jest użyte pojęcie zastępowania:

$X(\Phi//\Psi)$ to wyrażenie uzyskane z X w wyniku zastąpienia w nim wyrażenia Φ przez równoważne wyrażenie Ψ na k spośród n miejsc występowania wyrażenia Φ w wyrażeniu X , przy czym $0 \leq k \leq n \geq 0$. Warto dostrzec, że z definicji zastępowania wynika, iż $X(\Phi//\Psi) = X$, gdy $n = 0$ (tj. gdy Φ nie występuje w X) lub gdy $k = 0$ (Φ nie zostało zastąpione w żadnym miejscu).

Reguła $\mathbf{RZ}_{\Leftrightarrow}$ jest oparta na tym (metatezie), że tezę założeniowego rachunku zdań jest każde wyrażenie postaci:

$$\mathbf{MT33} \quad (\Phi \Leftrightarrow \Psi) \Rightarrow (X \Leftrightarrow X(\Phi//\Psi)).$$

Oto schematy wnioskowania zgodnego z regułą $\mathbf{RZ}_{\Leftrightarrow}$:

$$\begin{array}{ccc} & \text{równoważnie:} & \\ \frac{\Phi \Leftrightarrow \Psi}{X \Leftrightarrow X(\Phi//\Psi)} & & \frac{\Phi \Leftrightarrow \Psi}{X} \\ & & \frac{}{X(\Phi//\Psi)} \end{array}$$

Jeśli uznaje się wyrażenie X , to można też według reguły $\mathbf{RZ}_{\Leftrightarrow}$ uznać każde wyrażenie uzyskane z X wskutek zastąpienia w nim pewnych członów

¹¹ Skrót $\mathbf{RZ}_{\Leftrightarrow}$, tj. RZ z indeksem dolnym \Leftrightarrow , jest użyty zamiast \mathbf{RZ}_R po to, by analogicznie oznaczać reguły zastępowania oparte na relacjach innych niż równoważność: w dalszych w rozważaniach będzie mowa o regule $\mathbf{RZ}_{=}$, tj. zastępowania w wyrażeniach uznanych pewnych ich członów wyrażeniami oznaczającymi to samo (także na podstawie definicji: $\mathbf{RZ}_{=,df}$, tj. zastępowania wprowadzonych definicyjnie nazw oznaczających to samo).

wyrażeniami z nimi równoważnymi. Jeśli zatem uznawana formuła X jest tezą, to tezą jest również $X(\Phi//\Psi)$.

Zdefiniowaną wyżej operację zastępowania w wyrażeniach członów równoważnych trzeba odróżniać od działania podstawiania:

$\Phi(t/\Psi)$ to wyrażenie uzyskane z Φ w wyniku podstawienia za występującą w Φ zmienną t wyrażenia Ψ ; ogólniej:

$\Phi(t_1/\Psi_1, t_2/\Psi_2, \dots, t_n/\Psi_n)$ to wyrażenie uzyskane z Φ w wyniku podstawienia występujących w Φ zmiennych t_1, t_2, \dots, t_n przez, odpowiednio, wyrażenia $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$, przy czym $n \geq 0$.

Z definicji podstawiania wynika, że $\Phi(t_1/\Psi_1, t_2/\Psi_2, \dots, t_n/\Psi_n) = \Phi$, gdy $n = 0$, tj. gdy nie dokonano podstawienia za żadną ze zmiennych (w szczególnym przypadku – ponieważ w Φ nie ma zmiennych).

Trzeba dostrzegać różnicę między podstawianiem a zastępowaniem: podstawia się tylko za zmienne i w każdym miejscu występowania danej zmiennej, a zastępuje się wyrażenia złożone i niekoniecznie w każdym miejscu, w którym występuje zastępowane wyrażenie.

Sformułowanie reguły podstawiania (**RP**) jest analogiczne do reguły **RZ_⇔**: jeśli uznaje się wyrażenie Φ , to zgodnie z **RP** można też uznać $\Phi(t_1/\Psi_1, t_2/\Psi_2, \dots, t_n/\Psi_n)$; jeśli zatem Φ jest tezą, to tezą jest również $\Phi(t_1/\Psi_1, t_2/\Psi_2, \dots, t_n/\Psi_n)$.

Oto schemat wnioskowania zgodny z **RP**:

$$\text{RP} \quad \frac{\Phi}{\Phi(t_1/\Psi_1, t_2/\Psi_2, \dots, t_n/\Psi_n)}$$

Wysławiając prościej sens powyższego schematu, można powiedzieć, że jeśli uznaje się wyrażenie Φ , to można także uznać wyrażenie uzyskane z Φ w wyniku prawidłowego podstawienia, a w szczególności: każde podstawienie tezy (prawa) KRZ również jest tezą (prawem) KRZ.

Spójrzmy na przykłady zastosowania reguł **RZ_⇔** i **RP**.

T34 $\sim(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$.

Dowód:

□

- | | | |
|-----|--|---|
| 1. | $\sim(p \Leftrightarrow q)$ | {zał.} |
| 2. | $\sim[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ | { RZ_⇔ : 1, $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ } |
| 3. | $\sim(p \Rightarrow q) \vee \sim(q \Rightarrow p)$ | { NK : 2} |
| 1.1 | $\sim(p \Rightarrow q)$ | {zd.} |
| 1.2 | $p \wedge \sim q$ | { NI : 1.1} |

4. $\sim(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ {1.1 \Rightarrow 1.2}
 2.1 $\sim(q \Rightarrow p)$ {zd.}
 2.2 $q \wedge \sim p$ {NI: 2.1}
 5. $\sim(q \Rightarrow p) \Rightarrow (q \wedge \sim p)$ {2.1 \Rightarrow 2.2}
 6. $[\sim(p \Rightarrow q) \vee \sim(q \Rightarrow p)] \Rightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$ {DIS: 4, 5}
 $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$ {RO: 6, 3}

□

1. $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$ {zał.}
 1.1 $p \wedge \sim q$ {zd.}
 1.2 $\sim(p \Rightarrow q)$ {NI: 1.1}
 2. $(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)$ {1.1 \Rightarrow 1.2}
 2.1 $q \wedge \sim p$ {zd.}
 2.2 $\sim(q \Rightarrow p)$ {NI: 2.1}
 3. $(q \wedge \sim p) \Rightarrow \sim(q \Rightarrow p)$ {2.1 \Rightarrow 2.2}
 4. $[(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)] \Rightarrow [\sim(p \Rightarrow q) \vee \sim(q \Rightarrow p)]$ {DIS: 2, 3}
 5. $\sim(p \Rightarrow q) \vee \sim(q \Rightarrow p)$ {RO: 4, 1}
 6. $\sim[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ {NK: 5}
 $\sim(p \Leftrightarrow q)$ {RZ _{\Leftrightarrow} : 6, $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.

Prawa zastępowania równoważności koniunkcją jej implikacji składowych, wskazanego w uzasadnieniu wiersza drugiego, dowodzi się łatwo, korzystając z **OR** i **DK**.

T35 $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$.

Teza **(35)** to prawo przemienności koniunkcji, którego podstawieniami są m.in.:

T35a $[(p \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow [r \wedge (p \vee q)]$ {RP: 35($p/p \vee q, q/r$)}

T35b $(p \wedge r) \Leftrightarrow (r \wedge p)$ {RP: 35(q/r)}

T35c $(q \wedge r) \Leftrightarrow (r \wedge q)$ {RP: 35($p/q, q/r$)} =
 = {35b(p/q)}.

Każde z wyrażeń **35a–35c** również jest tezą (prawem) KRZ, ponieważ działanie podstawiania przekształca tezę w tezę. Własność bycia tezą (prawem) jest więc niezmiennikiem działania podstawiania. Kształt każdego z tych wyrażeń, jak również prawa **35**, podpada pod ogólny, zapisany w metajęzyku schemat prawa przemienności koniunkcji: $(\Phi \wedge \Psi) \Leftrightarrow (\Psi \wedge \Phi)$.

T36 $[(p \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$.

Formuła **36** to prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy. W rozgałęzionym dowodzie wprost implikacji prostej w charakterze założeń dodatkowych przyjmuje się składniki alternatywy $(p \vee q)$ i korzystając kolejno z reguł **DK** i **DA**, wyprowadza się z nich alternatywę $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$. Implikację odwrotną najprościej jest udowodnić nie wprost: wynikiem zastosowania reguły **NK** do zdn. jest alternatywa $\sim(p \vee q) \vee \sim r$, której każdy składnik przyjęty jako założenie dodatkowe prowadzi do sprzeczności z wyjściowym założeniem, tj. z alternatywą $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

Dowód:

□

- | | | |
|-----|----------------------------------|---|
| 1. | $p \vee q$ | {zał.} |
| 2. | r | {zał.} |
| 1.1 | p | {zd.} |
| 1.2 | $p \wedge r$ | {DK: 1.1, 2} |
| 1.3 | $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ | {DA: 1.2} |
| 2.1 | q | {zd.} |
| 2.2 | $q \wedge r$ | {DK: 2.1, 2} |
| 2.3 | $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ | {DA: 2.2} |
| | $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ | {rozg. wprost: 1.1 \Rightarrow 1.3, 2.1 \Rightarrow 2.3, 1} |

□

$[(p \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$

- | | | |
|----------------|----------------------------------|-----------------------------|
| 1. | $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ | {zał.} |
| 2. | $\sim[(p \vee q) \wedge r]$ | {zdn.} |
| 3. | $\sim(p \vee q) \vee \sim r$ | {NK: 2} |
| 1.1 | $\sim(p \vee q)$ | {zd.} |
| 1.2 | $\sim p \wedge \sim q$ | {NA: 1.1} |
| 1.3 | $\sim p$ | {OK: 1.2} |
| 1.4 | $\sim q$ | {OK: 1.2} |
| 1.1.1 | $(p \wedge r)$ | {zd.} |
| 1.1.2 | sprz.: 1.3, 1.1.1 | |
| 1.5 | $\sim(p \wedge r)$ | {1.1.1 \Rightarrow sprz.} |
| 1.6 | $q \wedge r$ | {OA: 1, 1.5} |
| sprz. 1.4, 1.6 | | |
| 2.1 | $\sim r$ | {zd.} |
| 2.1.1 | $(q \wedge r)$ | {zd.} |

2.1.2 sprz.: 2.1, 2.1.1

2.2 $\sim(q \wedge r)$ {2.1.1 \Rightarrow sprz.}2.3 $p \wedge r$ {OA: 1, 2.2}sprz. 2.1, 2.3 {rozg. nwpr.: 1.1 \Rightarrow sprz., 2.1 \Rightarrow sprz., 3}.

W wyniku odpowiedniego zastosowania do tezy **36** reguły **RZ_↔** uzyskuje się tzw. drugie prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy:

T37 $[r \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow [(r \wedge p) \vee (r \wedge q)]$
 {**RZ_↔**: **36**, $((p \vee q) \wedge r // r \wedge (p \vee q)$; **35a**,
 $p \wedge r // r \wedge p$; **35b**,
 $q \wedge r // r \wedge q$; **35c**}.

Że zastępowane człony są równoważne, widać kolejno w równoważnościach **35a**, **35b** i **35c** (wskazanych w uzasadnieniu przejścia od **36** do **37**).

Z prawa **37** w wyniku odpowiednich podstawień uzyskuje się takie oto wyrażenia (zwane podstawieniami drugiego prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy):

T37a $[p \wedge (r \vee s)] \Leftrightarrow [(p \wedge r) \vee (p \wedge s)]$ {**RP**: **37**(r/p , p/r , q/s)}

T37b $[q \wedge (r \vee s)] \Leftrightarrow [(q \wedge r) \vee (q \wedge s)]$ {**RP**: **37**(r/q , p/r , q/s)}.

Podstawieniem prawa **36** jest m.in. następująca formuła (teza):

T38 $[(p \vee q) \wedge (r \vee s)] \Leftrightarrow \{[p \wedge (r \vee s)] \vee [q \wedge (r \vee s)]\}$ {**RP**: **36**($r/r \vee s$)}.

Zastosowanie do tezy **38** reguły **RZ_↔** kierowane równoważnościami **37a** i **37b** prowadzi do tezy zwanej prawem mnożenia alternatyw:

T39 $[(p \vee q) \wedge (r \vee s)] \Leftrightarrow \{[(p \wedge r) \vee (p \wedge s)] \vee [(q \wedge r) \vee (q \wedge s)]\}$
 {**RZ_↔**: **38**, $[p \wedge (r \vee s)] // [(p \wedge r) \vee (p \wedge s)]$; **37a**,
 $[q \wedge (r \vee s)] // [(q \wedge r) \vee (q \wedge s)]$; **37b**}.

*

Omówione wyżej reguły i tezy założeniowego systemu KRZ – pierwotne i wtórne – są zestawione w poniższej tabeli (S-B wskazuje na system Słupeckiego i Borkowskiego, na którym rozwijany tu system jest wzorowany).

reguły systemu założeniowego KRZ S-B			
	dołączania wierszy do dowodu	budowania dowodów	dołączania tez do systemu
pierw.	RO; OK, DK, OR, DR, OA, DA	– założeniowych: wprost, niewprost – zwykłych: wprost, niewprost	Jeśli istnieje dowód Φ , to Φ jest tezą
wtórne	ON, DN; TOL, TR; NA, NK, NI; RO _⊃ , TOL _⊃ , TR _⊃ ; MIS, DKP, DKZ; DIS, OIS; RZ _⊃ , RP	– dołączania implikacji do dowodu – negowania zał. dodatkowych – dowodów rozgałęzionych: wprost, niewprost	

4. Aksjomatyczne systemy KRZ

Po ogólnych uwagach o systemach aksjomatycznych są scharakteryzowane zbudowane aksjomatycznie rachunki zdań Hilberta i Bernaysa oraz Łukasiewicza.

4.1 Uwagi ogólne

W punkcie wyjścia systemów budowanych aksjomatycznie są zawsze przyjmowane aksjomaty oraz reguły dowodzenia. Aksjomaty to nieudowodnione w danym systemie twierdzenia uznane za prawdziwe, z których są wyprowadzane pozostałe tezy systemu. W aksjomatach występują terminy pierwotne systemu, tj. te spośród jego terminów specyficznych, które nie są zdefiniowane wprost, lecz jedynie kontekstowo, a kontekstem definiującym jest układ aksjomatów, zwany krótko – aksjomatyką. Przyjęte w punkcie wyjścia reguły dowodzenia (wyprowadzania, inferencji) są zwane – jak w systemach założeniowych – pierwotnymi. Ponadto już na początku budowania systemu mogą być przyjęte równościowe definicje terminów specyficznych wtórnych, tj. zdefiniowanych za pomocą terminów pierwotnych. Tezami systemu aksjomatycznego są jego aksjomaty oraz wszystkie twierdzenia udowodnione na podstawie aksjomatów i reguł dowodzenia oraz, ewentualnie, definicji terminów wtórnych.

Systemy aksjomatyczne mogą się różnić aksjomatami, terminami pierwotnymi, regułami dowodzenia oraz doбором i definicjami terminów wtórnych (mogą być sformułowane w języku rachunku lub w metajęzyku). Są jednak ogólne warunki, który dowolny dobór aksjomatów, terminów pierwotnych reguł dowodzenia i definicji musi spełniać:

(i) Aksjomaty muszą być wyrażeniami prawdziwymi rachunku, a reguły wnioskowania (dowodzenia) muszą być niezawodne, tzn. zawsze prowadzić od wyrażen prawdziwych do prawdziwych.

(ii) Aksjomaty i reguły dowodzenia muszą być tak dobrane, by dało się z nich wyprowadzić wszystkie wyrażenia prawdziwe danego rachunku. Inaczej mówiąc, ogół tez danego systemu aksjomatycznego KRZ powinien być tożsamy z ogółem jego praw, czyli wyrażen prawdziwych.

(iii) Terminy pierwotne powinny być względem siebie niezależne, tzn. każdy z nich ma być niedefiniowalny przez pozostałe, a jednocześnie terminy pierwotne i definicje terminów wtórnych powinny wystarczyć do sformułowania wszystkich wyrażen zapisanych za pomocą dowolnych terminów danego systemu.

Pierwszy aksjomatyczny system rachunku zdań jest zawarty w pismach Fregego (z 1879 roku), najbardziej znane zostały opracowane w ub. wieku przez D. Hilberta i P. Bernaysa (HB) oraz przez J. Łukasiewicza (Ł).

4.2 System Hilberta i Bernaysa

Hilbert i Bernays przyjęli 15 aksjomatów oraz 5 terminów pierwotnych, tj. \sim , \wedge , \vee , \Rightarrow oraz \Leftrightarrow :

A1_{HB}	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$
A2_{HB}	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
A3_{HB}	$[p \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
A4_{HB}	$p \Rightarrow \sim\sim p$
A5_{HB}	$\sim\sim p \Rightarrow p$
A6_{HB}	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
A7_{HB}	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
A8_{HB}	$(p \wedge q) \Rightarrow q$
A9_{HB}	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow \{(p \Rightarrow r) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]\}$
A10_{HB}	$p \Rightarrow (p \vee q)$
A11_{HB}	$q \Rightarrow (p \vee q)$
A12_{HB}	$(p \Rightarrow r) \Rightarrow \{(q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]\}$

- A13_{HB}** $(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
A14_{HB} $(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
A15_{HB} $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \leftrightarrow q)]$.

Jak widać, niektóre spośród tych aksjomatów są odpowiednikami pierwotnych reguł dołączania wierszy do dowodu przyjętych w systemie założeniowym S-B przedstawionym w **RI.3: **OK** (A.7, A.8), **DA** (A.10, A.11) oraz **O/DR** (A.13, A.14, A.15). Pośród aksjomatów są także tezy udowodnione w tym systemie założeniowym: A.4 i A.5 to prawa podwójnej negacji (**T3**, **T4**) – i oparte na nich reguły wtórne dołączania i opuszczania podwójnej negacji; A.1 jest prawem sylogizmu warunkowego (udowodnionym w prezentacji systemu S-B jako **T1**), A.2 to podstawieniowy odpowiednik tezy **18** (interpretowanej jako „prawda wynika z wszystkiego”, a zwanej też prawem poprzedników), A.6 to prawo transpozycji (jest implikacją prostą zawartą w równoważnościowym prawie transpozycji, udowodnionym jako teza **7**), A.9 odpowiada prawu (i regule) mnożenia implikacji stronami (w tezie **27** obie „mnożone” implikacje różnią się również poprzednikami i są czynnikami koniunkcji będącej poprzednikiem tej tezy), A.12 to odpowiednik prawa dylematu konstrukcyjnego prostego (teza **28**).

Wypisany wyżej układ aksjomatów A.1–A.15 można uprościć, np. aksjomaty A.1 i A.3 da się zastąpić prawem $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$, zwanym sylogizmem Fregego, a implikacje A.4–A.6 – implikacją $(\sim q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (zwaną odwrotnym prawem transpozycji):

- A.1 $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$
A.2 $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
A.3 $(\sim q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
A.4 $(p \wedge q) \Rightarrow p$
A.5 $(p \wedge q) \Rightarrow q$
A.6 $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \{(p \Rightarrow r) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]\}$
A.7 $p \Rightarrow (p \vee q)$
A.8 $q \Rightarrow (p \vee q)$
A.9 $(p \Rightarrow r) \Rightarrow \{(q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]\}$
A.10 $(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
A.11 $(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
A.12 $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \leftrightarrow q)]^{12}$.

¹² Uproszczenie to jest zgodne z uwagami sformułowanymi w L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 79.

Jako pierwotne reguły dowodzenia zostały w systemie aksjomatycznym HB przyjęte reguła odrywania (**RO**) i reguła podstawiania (**RP**). Warto tu powtórzyć, że jeśli uznaje się wyrażenie Φ , to można także uznać wyrażenie uzyskane z Φ w wyniku prawidłowego podstawienia, a w szczególności: jeśli Φ jest tezą, to tezą jest również wyrażenie $\Phi(t_1/\Psi_1, t_2/\Psi_2, \dots, t_n/\Psi_n)$, czyli każde podstawienie tezy (prawa) KRZ również jest tezą (prawem) KRZ. Dlatego każdy z wierszy dowolnego dowodu budowanego w systemie aksjomatycznym jest tezą (prawem) KRZ, ponieważ jest uzyskany w wyniku zastosowania **RP** oraz **RO** do tez (praw) przyjętych w charakterze aksjomatów. Rozumowania w systemach aksjomatycznych (ich wyniki) są więc dowodami zwykłymi wprost.

Dla zilustrowania dowodzenia w systemach aksjomatycznych spójrzmy, jak te reguły pierwotne są stosowane w wyprowadzaniu tez KRZ z uproszczonego układu A.1–A.12 aksjomatów systemu HB (w ich numeracji jest indeks odsyłający do tego systemu).

$$\mathbf{T1}_{\mathbf{HB}} \quad (q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)].$$

Dowód:

Pierwszy wiersz dowodu jest wynikiem podstawienia w A.2 za zmienną p wyrażenia $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$, czyli aksjomatu A.1, a za zmienną q zmiennej s .

$$1. \quad \{[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]\} \Rightarrow \{s \Rightarrow \{[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]\}\}$$

Uzasadnienie dla tego wiersza/tezy zapisane skrótowo $\{\mathbf{RP}: A.2(p/A.1, q/s)\}$. Schemat wyrażenia 1., w którym fragmenty równokształtne z aksjomatem A.1 są skrócone symbolem „A.1”, wygląda tak:

$$1'. \quad A.1 \Rightarrow (s \Rightarrow A.1)$$

Schemat 1' łatwiej pozwala dostrzec, że kolejny wiersz jest wynikiem zastosowania reguły odrywania do tezy 1. i aksjomatu A.1:

$$2. \quad s \Rightarrow \{[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]\} \quad \{\mathbf{RO}: 1, A.1\}$$

$$3. \quad (q \Rightarrow r) \Rightarrow \{[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]\} \quad \{\mathbf{RP}: 2.(s/q \Rightarrow r)\}$$

$$4. \quad (q \Rightarrow r) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \quad \{\mathbf{RP}: A.2(p/q \Rightarrow r, q/p)\}$$

$$5. \quad [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (s \Rightarrow t)] \Rightarrow \{[(q \Rightarrow r) \Rightarrow s] \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow t]\} \\ \{\mathbf{RP}: A.1(p/q \Rightarrow r, q/s, r/t)\}$$

W wyniku podstawienia w tezie 5. za zmienną s wyrażenia $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$, a za zmienną t implikacji $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ uzyskuje się kolejny wiersz tego dowodu:

$$6. \{(q \Rightarrow r) \Rightarrow \{[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]\}\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \{\{(q \Rightarrow r) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]\} \Rightarrow \{(q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]\}\} \\ \{\mathbf{RP}: 5.(s/p \Rightarrow (q \Rightarrow r), t/(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))\}$$

Ponieważ poprzednik implikacji zapisanej w wierszu szóstym jest tezą zapisaną w wierszu trzecim, więc otrzymujemy:

$$7. \{\{(q \Rightarrow r) \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]\} \Rightarrow \{(q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]\}\} \\ \{\mathbf{RO}: 6, 3\}.$$

Ponowne zastosowanie reguły odrywania prowadzi do dowodzonej tezy ($\mathbf{T1}_{HB}$):

$$(q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)] \quad \{\mathbf{RO}: 7, 4\}.$$

$$\mathbf{T2}_{HB} \quad (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)].$$

W systemie HB z piętnastoma aksjomatami wyrażenie $\mathbf{T2}_{HB}$, czyli prawo sylogizmu warunkowego, jest pierwszym z aksjomatów; gdy jednak przyjmie się układ aksjomatów A.1–A.12 (z prawem Fregego), implikację ($\mathbf{2}_{HB}$) trzeba udowodnić.

D o w ó d:

Pierwszy wiersz tego dowodu jest wynikiem podstawienia w aksjomacie

$$A.1 \quad [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$$

za zmienną p implikacji $q \Rightarrow r$, za q wyrażenia $p \Rightarrow q$, za r implikacji $p \Rightarrow r$.

$$1. \{(q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]\} \Rightarrow \{\{(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)\} \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]\} \\ \{\mathbf{RP}: A.1(p/q \Rightarrow r, q/p \Rightarrow q, r/p \Rightarrow r)\}.$$

Poprzednik implikacji 1. jest równokształtny z $\mathbf{1}_{HB}$, więc można uznać jej następnik:

$$2. [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)] \quad \{\mathbf{RO}: 1, \mathbf{T1}_{HB}\}.$$

Kolejny wiersz ponownie jest rezultatem podstawiania, tym razem w tezie ($\mathbf{1}_{HB}$): za zmienną p wyrażenia $p \Rightarrow q$, za q implikacji $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$, a za zmienną r wyrażenia $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$:

$$3. \{[(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]\} \Rightarrow \{\{(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)]\} \Rightarrow \{(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]\}\} \\ \{\mathbf{RP}: \mathbf{T1}_{HB}(p/p \Rightarrow q, r/(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))\}.$$

Jako że poprzednik implikacji 3. jest równokształtny z 2., więc otrzymujemy:

$$4. \{(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)]\} \Rightarrow \{(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]\} \\ \{\mathbf{RO}: 3, 2\}.$$

Kolejny wiersz jest wynikiem odpowiednich podstawień w A.2:

$$5. (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \quad \{\mathbf{RP}: A.2(p/p \Rightarrow q, q/q \Rightarrow r)\}.$$

Ponieważ implikacja w wierszu 5. jest poprzednikiem tezy 4., więc:

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)] \quad \{\mathbf{RO}: 4, 5\}.$$

$$\mathbf{T3}_{\mathbf{HB}} \quad p \Rightarrow p.$$

Dowód:

1. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow p)]$ $\{\mathbf{RP}: \mathbf{A.1}(r/p)\}$
2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$ $\{\mathbf{RO}: 1, \mathbf{A.2}\}$
3. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \Rightarrow (p \Rightarrow p)$ $\{\mathbf{RP}: 2(q/q \Rightarrow p)\}$
 $p \Rightarrow p$ $\{\mathbf{RO}: 3, \mathbf{A.2}\}^{13}.$

4.3 System Łukasiewicza

System aksjomatyczny KRZ, ceniony za prostotę układu aksjomatów, zbudował J. Łukasiewicz (system L)¹⁴. System ten jest oparty na trzech aksjomatach, w których jako terminy pierwotne występują tylko funktory implikacji i negacji, dlatego jest zwany implikacyjno-negacyjnym:

$$\mathbf{A1}_L \quad (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$$

$$\mathbf{A2}_L \quad (\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$$

$$\mathbf{A3}_L \quad p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q).$$

Jako reguły pierwotne są w nim przyjęte reguła odrywania i reguła podstawiania. Ponadto funktory prawdziwościowe koniunkcji, alternatywy zwykłej i równoważności itd. są wprowadzone za pomocą metajęzykowych definicji:

$$\mathbf{D1}_L \quad \Phi \wedge \Psi =_{\text{df}} \sim(\Phi \Rightarrow \sim\Psi)$$

$$\mathbf{D2}_L \quad \Phi \vee \Psi =_{\text{df}} \sim\Phi \Rightarrow \Psi$$

$$\mathbf{D3}_L \quad \Phi \Leftrightarrow \Psi =_{\text{df}} (\Phi \Rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \Rightarrow \Phi).$$

Występujący w tych definicjach znak $=_{\text{df}}$ nie jest funktorem rachunku zdań (w tej roli jest w nim używany symbol „ \Leftrightarrow ”), lecz metajęzykowym znakiem tzw. równości definicyjnej. Definicje D1–D3, jak i definicje

¹³ System KRZ oparty na 15 aksjomatach oraz wiele przykładów dowodów też jest w T. Batóg, *Podstawy logiki*, dz. cyt., s. 43–65.

¹⁴ J. Łukasiewicz, *Elementy logiki matematycznej*, Warszawa 1958, s. 27–59. O systemach KRZ opracowanych przez logików Szkoły Lwowsko-Warszawskiej zob. J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 93–115.

innych funktorów sformułowane metajęzykowo nie są tezami systemu, lecz składnikami tzw. reguły definicyjnego zastępowania ($\mathbf{RZ}_{=df}$), w której schemacie człony takich definicji są podstawiane za Φ lub Ψ :

$$\frac{\Phi =_{df} \Psi}{X} \quad \frac{}{X(\Phi // \Psi)}$$

Zgodnie z tą regułą do systemu można włączyć wyrażenie $X(\Phi // \Psi)$, które powstaje z tezy X systemu w wyniku zastąpienia w niej jakiegoś jej członu członem równoważnym według definicji $\Phi =_{df} \Psi$. Jak widać, reguła ta nie różni się od znanej z systemu założeniowego S-B reguły \mathbf{RZ}_{\Leftarrow} .

W tzw. ujęciu metalogicznym również aksjomaty systemu zdań są sformułowane w metajęzyku. Zbiór aksjomatów zapisanych w języku rachunku zdań jest wtedy nieskończony, choć można go rozdzielać na podzbiory (również nieskończone) wyrażeń będących podstawieniami określonego aksjomatu. Na przykład w metalogicznym ujęciu systemu aksjomatycznego Łukasiewicza nieskończony ogół aksjomatów rozpadalby się na trzy podzbiory wyrażeń rachunku zdań, podpadających kolejno pod schematy:

$$\mathbf{A1.m} \quad (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow [(\Psi \Rightarrow X) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow X)]$$

$$\mathbf{A2.m} \quad (\sim\Phi \Rightarrow \Phi) \Rightarrow \Phi$$

$$\mathbf{A3.m} \quad \Phi \Rightarrow (\sim\Phi \Rightarrow \Psi).$$

W takim ujęciu jako jedyną pierwotną regułą wnioskowania wystarczy przyjąć regułę odrywania, jako że rolę \mathbf{RP} pełnią metajęzykowo zapisane aksjomaty, traktowane jako schematy wszystkich swoich podstawień¹⁵.

¹⁵ Warto dodać, że J. Łukasiewicz opracował wiele aksjomatyk KRZ. Badał również tzw. częściowe rachunki logiczne, tj. podsystemy KRZ, w których są używane niektóre tylko funktory, m.in. wyłącznie implikacja (implikacyjny RZ) albo równoważność (równoważnościowy RZ), oraz zbudował system KRZ, w którym obok zmiennych zdaniowych są zmienne funktorowe (zob. J. Woleński, *Łukasiewicz, Jan*, w: A. Dąbrowski, M. Hoły-Łuczaj, A. Schumann i in., *Leksykon logików polskich 1900–1939*, Kraków, Rzeszów 2022, s. 209). Jest również współtwórcą pełnego systemu KRZ opartego na jednym aksjomacie, w którym jedynym terminem pierwotnym jest dysjunkcja (pierwotne reguły wyprowadzania to reguła podstawiania i reguła odrywania dla dysjunkcji). Aksjomat ten, sformułowany (w 1917 r.) przez J. Nicoda, został uproszczony przez Łukasiewicza (w 1925, wynik opublikowany w pracy z 1933 r.) do postaci (w notacji Łukasiewicza – zob. **RI.1.1): $DDpDqrDDsDssDDsqDDpsDps$; a w zapisie nawiasowym: $[p / (q / r)] / \{s / (s / s)\}$

Oto przykład dowodu w systemie Łukasiewicza (por. dowód tezy $\mathfrak{3}_{\text{HB}}$).

T1_L $p \Rightarrow p$

1. $[p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow p)] \Rightarrow \{[(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p] \Rightarrow (p \Rightarrow p)\}$
{**RP**: A.1 ($q/\sim p \Rightarrow p, r/p$)}
2. $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow p)$
{**RP**: A.3 (q/p)}
3. $[(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
{**RO**: 1, 2}
 $p \Rightarrow p$
{**RO**: 3, A.2}.

Warto wrócić do ogólnych wymogów stawianych systemom aksjomatycznym¹⁶. Otóż, po pierwsze, tzw. niezależność aksjomatów polega na tym, że żadnego z aksjomatów nie da się wyprowadzić z pozostałych na podstawie reguł. Warunek ten jest spełniony przez każdy z omówionych wyżej systemów aksjomatycznych.

Każdy z tych systemów jest również niesprzeczny, zupełny i pełny:

- niesprzeczność znaczy, że nie ma w systemie tez sprzecznych¹⁷;
- zupełność polega na tym, że dla każdego wyrażenia zdaniowego danego systemu jest tak, że wyrażenie to albo jego negacja jest tezą, czyli że dołączenie do systemu jakiegokolwiek nie tezy (zapisanej w języku systemu) powoduje w systemie sprzeczność;
- pełność znaczy, że każde wyrażenie prawdziwe danego rachunku (w KRZ – każda jego tautologia) jest tezą systemu aksjomatycznego.

Przyjmijmy umowę, że symbol „ $\vdash \Phi$ ” odczytujemy „wyrażenie Φ jest prawdziwe”, a symbol „ $\vdash \Phi$ ” – „wyrażenie Φ jest tezą systemu”¹⁸. Stosując te skróty, można powiedzieć, że dany system jest pełny *wtw* dla każdego wyrażenia Φ danego systemu: $\vdash \Phi \Rightarrow \vdash \Phi$. Niekiedy wyróżnia się kolejną własność systemu, tj. jego adekwatność, definiując ją przez

$[(s / q) / [(p / s) / (p / s)]]$ – w formule Łukasiewicza człon $s / (s / s)$ zastępuje oryginalny (w aksjomacie Nicoda) człon $t / (t / t)$, co zredukowało liczbę zmiennych z pięciu do czterech. Aksjomat ten i oparty na nim dysjunkcyjny system KRZ jest zwany (aksjomatem/systemem) Nicoda-Łukasiewicza.

¹⁶ Własności systemów dedukcyjnych są odrębnie omówione: syntaktyczne w ***RI, a semantyczne w ***RII.

¹⁷ Tak rozumiana niesprzeczność jest własnością syntaktyczną, w semantyce system niesprzeczny jest rozumiany jako taki, który ma model.

¹⁸ Pojęcia tezy systemu oraz prawdziwości zostaną określone, ściślej niż jest to tu potrzebne, w rozważaniach ***RI.2 oraz ***RII.1, poświęconych zagadnieniom syntaktyki i semantyki systemów dedukcyjnych.

koniunkcję implikacji: zapisanej powyżej i odwrotnej do niej (implikacja odwrotna jest zagwarantowana przez prawdziwość aksjomatów i niezawodność pierwotnych reguł wyprowadzania), czyli przez równoważność:
 $\vdash \Phi \Leftrightarrow \vdash \Phi$.

Cechą relacyjną systemów jest ich wzajemna równoważność: systemy są równoważne *wtw* każda teza jednego systemu jest tezą drugiego i odwrotnie. Równoważne są systemy aksjomatyczne HB i L oraz L i założeniowy system S–B (wobec tego także HB i system założeniowy S–B)¹⁹. Cecha równoważności systemów jest przy tym związana z ich podstawowymi własnościami: jeśli któryś z równoważnych systemów jest niesprzeczny, zupełny lub pełny, to także drugi ma te własności. Wszystkie omówione systemy KRZ są więc niesprzeczne, zupełne i pełne.

Dowodzenie w systemach aksjomatycznych – co ilustrują już podane wyżej przykłady dowodów – jest trudniejsze, tj. o wiele bardziej złożone i mniej intuicyjne, niż w systemie założeniowym. Każdy dowód w systemie aksjomatycznym polega na wyprowadzeniu dowodzonej tezy z aksjomatów i tez wcześniej udowodnionych (jest dowodem zwykłym wprost), a przy tym nie ma reguł budowania dowodów porównywalnych ze stosowanymi w systemie założeniowym – dlatego systemy założeniowe, a nie aksjomatyczne, są zwane systemami dedukcji naturalnej. W prezentacjach kolejnych rachunków – z uwagi na tę nienaturalność dowodzenia w systemach aksjomatycznych oraz, widoczne w takim porównaniu, zalety „dedukcji naturalnej” – będzie wykorzystywany założeniowy system KRZ, w rozwiniętej tu jego odmianie, wzorowanej na systemie Słupeckiego i Borkowskiego.

¹⁹ Zob. W. Pogorzelski, *Klasyczny rachunek zdań...*, dz. cyt., s. 187–193, gdzie są formalizacje innych systemów założeniowych i dowód równoważności systemu założeniowego i aksjomatycznego.

ROZDZIAŁ II

NIEKLASYCZNE RACHUNKI ZDAŃ

Jest oczywiste, że pojęcie logiki nieklasycznej zależy od rozumienia/definicji logiki klasycznej. Nawiązując do kontekstowych określeń logiki klasycznej obecnych w dotychczasowych analizach (*RIII.1, *RV.4, **RI.1), warto je tu zebrać i uściślić. Otóż logika klasyczna jest rozumiana jako dwuwartościowa (**D**) oraz ekstensjonalna (**E**); wobec tego logika nieklasyczna nie jest dwuwartościowa, co w praktyce logiki znaczy, że jest wielowartościowa (**W**) lub jest intensjonalna (**I**). Jak wiadomo, funktory ekstensjonalne są inaczej nazywane prawdziwościowymi lub zakresowymi – i terminy te można również przenieść na logikę klasyczną, w której są badane relacje wynikania wyłącznie między zdaniami związanymi przez takie spójniki. Z kolei funktory intensjonalne są zwane treściowymi lub nieprawdziwościowymi i terminy te są też używane, gdy mowa, że w logice nieklasycznej są badane także takie łączniki.

W zakresie logiki klasycznej wytyczonym koniunkcją $\mathbf{D} \wedge \mathbf{E}$ są klasyczne rachunki zdań (**RI) oraz klasyczne rachunki predykatów (**RIII), choć w szerszej rozumianej logice klasycznej znalazłyby się wszystkie rachunki dwuwartościowe, a gdy jest z kolei rozumiana węższej, co widoczne w niektórych opracowaniach z logiki, wtedy jest utożsamiana z węższym rachunkiem predykatów (WRP) oraz zakładanym w nim KRZ, który – warto dodać – jest zakładany także w wielu logikach intensjonalnych. Na tle przyjętego tu uściślenia pojęcia logiki klasycznej jest jednak zrozumiałe, że nieklasyczne są wszystkie logiki scharakteryzowane alternatywą $\mathbf{W} \vee \mathbf{I}$, czyli: wielowartościowe, choć ekstensjonalne, dwuwartościowe, lecz intensjonalne oraz wielowartościowe intensjonalne.

Warto dodać, że terminy „logika intensjonalna” oraz „logika modalna” są tu rozumiane wąsko: każda logika (rachunek) intensjonalna, jest,

co oczywiste, nieklasyczna, lecz nie każdy rachunek nieklasyczny jest intensjonalny (na przykład dowolny wielowartościowy rachunek zdań z funktorami ekstensjonalnymi); a gdy tu mowa o logikach (i rachunkach) modalnych, chodzi o te tylko logiki intensjonalne, w których są badane relacje wynikania między zdaniami związanymi funktorami wyrażającymi konieczność albo możliwość. Tu odróżniane od rachunków modalnych są na przykład logiki deontyczne, w których są badane związki logiczne między zdaniami z funktorami wyrażającymi jakąś odmianę powinności, np. *jest nakazane ..., jest zakazane, jest dozwolone*; logiki epistemiczne, w których są badane funktory wyrażające stany poznawcze, takie jak *jest przekonany, przypuszcza, wątpi, wierzy*; logiki temporalne, z funktorami takimi np., *jak było zawsze/kiedyś tak, będzie zawsze/kiedyś tak, potem, następnie*; itd.¹

Spośród rachunków nieklasycznych są w tym rozdziale uwzględnione rachunki wielowartościowe, modalne, deontyczne oraz logika intuicjonistyczna i tzw. logiki pośrednie².

¹ W opracowaniach, w których termin „logika modalna” jest rozumiany szerzej, logika zwana tu modalną jest nazywana (modalną) aletyczną, jako że funktory konieczności i możliwości (zwane wtedy modalnościami aletycznymi) odnoszą się do prawdziwości tego, co ogłoszone w zdaniu, w odróżnieniu od modalności deontycznych, epistemicznych itd. Zob. np.: M. Lechniak, *Czym są modalności i jak je rozróżnić? Próby klasyfikacji modalności*, w: *Jedność i wielość logik modalnych*, red. M. Tkaczyk, Lublin 2019, s. 63–80; tegoż, *Logiki epistemiczne, w: Jedność i wielość logik modalnych*, dz. cyt., s. 135–203; tegoż, *Przekonania i zmiana przekonania: analiza logiczna i filozoficzna*, Lublin 2011; A. Kozanecka, *O rodzajach logik temporalnych*, „Roczniki Filozoficzne” 2007, t. 55, nr 1, s. 189–199. Na temat badań prowadzonych w Szkole Lwowsko-Warszawskiej nad logikami nieklasycznymi zob. J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 115–132.

² Poza zakresem niniejszego opracowania jest więc wiele różnorodnych i rozmaicie dzielonych logik nieklasycznych (tj. wielowartościowych lub intensjonalnych), m.in. logika epistemiczna, temporalna, parakonsystentna, rozmyta, logika pytań (erotetyczna) itd. Syntetyczne hasła poświęcone logikom nieklasycznym są np. w: *Mała encyklopedia logiki*, red. W. Marciszewski, Wrocław 1988; *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, red. W. Marciszewski, Warszawa 1987; W.A. Pogorzelski, *Elementarny słownik logiki formalnej*, Białystok 1992. Zob. także: K. Świrydowicz, *Podstawy logiki modalnej*, Poznań 2004, gdzie znajdują się ogólne uwagi na temat logik nieklasycznych i modalnych (s. 13–15, 38–43), są omówione wybrane systemy szerzej rozumianej logiki modalnej (deontyczne, temporalne, dynamiczne, epistemiczne) oraz zagadnienia metateoretyczne logiki modalnej; A. Kozanecka-Dymek, *Geneza niektórych systemów logiki temporalnej*, „Roczniki Filozoficzne” 2009, t. 57, nr 1, s. 75–77,

1. Logika wielowartościowa

Pierwszy wielowartościowy (trójwartościowy) rachunek logiczny zbudował J. Łukasiewicz (1920). Niezależnie od wyników Łukasiewicza E. Post opracował wielowartościowe rachunki logiczne (1921), a następnie Łukasiewicz uogólnił trójwartościowy rachunek zdań do rachunków wielowartościowych (1922). Prace Łukasiewicza były kontynuowane m.in. przez M. Wajsberga, J. Słupeckiego, B. Sobocińskiego³.

Łukasiewicz trójwartościową logikę zdań (tzw. rachunek L_3) zbudował najpierw metodą matrycową. Zbiór wartości logicznych rozważanych w tej logice to $\{1, 0, \frac{1}{2}\}$, wartością wyróżnioną jest 1. Dla zwięzłego porównania logik wielowartościowych z dwuwartościowymi posłużę się wprowadzonymi już symbolami, uzupełnionymi o inne skróty: A to zbiór wartości logicznych, niech licznosc $|A| = a$, n to liczba argumentów funktora prawdziwościowego, w to liczba wartościowań formuły o n zmiennych zdaniowych, a f to liczba funktorów prawdziwościowych n -argumentowych.

Otóż w rachunkach klasycznych, tj. L_2 , $A = \{1, 0\}$, licznosc $|A| = a = 2$ oraz:

dla funktorów jednoargumentowych ($n = 1$): $w = a^n = 2^1 = 2$,

$$f = 2^w = 2^2 = 4, \{ver, as, \sim, fl\};$$

dla dwuargumentowych ($n = 2$): $w = a^n = 2^2 = 4$, $f = 2^w = 2^4 = 16$,

$$\{\dots, \wedge, \vee, \Rightarrow, /, \Downarrow, \Leftrightarrow, \underline{\vee}, \dots\};$$

dla trójargumentowych ($n = 3$): $w = a^n = 2^3 = 8$, $f = 2^w = 2^8 = 256$; itd.

W rachunkach wielowartościowych:

$$L_3 \quad A = \{1, 0, \frac{1}{2}\}, \text{ licznosc } |A| = a = 3 \text{ oraz:}$$

funktory jednoargumentowe ($n = 1$): $w = a^n = 3^1 = 3$, $f = 3^w = 3^3 = 27$

$$\{\dots, ver, as, \sim, fl, \dots\};$$

funktory dwuargumentowe ($n = 2$): $w = a^n = 3^2 = 9$, $f = 3^w = 3^9 = 19683$;
itd.

Ogólnie: $L_a \quad |A| = a$ oraz:

funktory jednoargumentowe ($n = 1$): $w = a^n = a^1 = a$, $f = a^w = a^a$;

funktory dwuargumentowe ($n = 2$): $w = a^n = a^2$, $f = a^w = a^{a^2}$; itd.

gdzie jest nawiązanie (i odesłanie) do podziału logik nieklasycznych w: S. Haack, *Philosophy of Logics*, Cambridge 1978.

³ Zob. G. Malinowski, *Logiki wielowartościowe*, Warszawa 2006. O badaniach nad logikami wielowartościowymi w Szkole Lwowsko-Warszawskiej zob. J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 115–123.

Tabelkowe definicje funktorów prawdziwościowych przyjęte przez Łukasiewicza w L_3 są uogólnieniem matrycowych definicji w systemie dwuwartościowym (w tabelach są tylko wybrane funktory prawdziwościowe).

D1.1

p	$\sim p$
1	0
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1

W uogólnieniu L_3 na systemy dowolnie wielowartościowe – $L_n, n \geq 2$, zbiór A_n wartości logicznych jest określony następującymi równościami:

$$A_n = \{w_i: w_i = k_i/n-1, 0 \leq k_i \leq n-1\} = \{0, 1/n-1, 2/n-1, \dots, 1\}.$$

Zgodnie z tym określeniem np.:

dla L_2 zbiór wartości $A_2 = \{0/1, 1/1\} = \{0, 1\}$;

dla logiki L_3 zbiór $A_3 = \{0/2, 1/2, 2/2\} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$;

dla L_5 zbiór $A_5 = \{0/4, 1/4, 2/4, 3/4, 4/4\} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$.

Z kolei następujące równości definiują funktory prawdziwościowe w systemie $L_n, n \geq 2$:

D1.2.a

$$\sim p = 1 - p,$$

$$p \wedge q = \min(p, q),$$

$$p \vee q = \max(p, q),$$

$$p \Rightarrow q = 1, \text{ gdy } p \leq q; = (1 - p + q), \text{ gdy } p > q.$$

$$p \Leftrightarrow q = \min(\min(1, 1 - p + q), \min(1, 1 - q + p)).$$

Symbol działania „min” można odczytywać jako „najmniejsza wartość spośród ...”, przy czym „najmniejsza” znaczy „taka, że nie ma mniejszej”, tzn. nie musi być jedyną najmniejszą, czyli jest nie większa od każdej wartości w danym zbiorze; analogicznie jest rozumiany symbol „max”, np. największą spośród wartości $\{1, 1\}$ jest 1. Zamiast złożonej procedury wyliczania wartości logicznej dla równoważności prościej jest ustalić tę wartość jako koniunkcję implikacji składowych: $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

W metajęzykowym zapisie tych definicji przez $V(\Phi)$ jest oznaczona wartość logiczna formuły Φ (użyte w definicji równoważności pojęcie wartości bezwzględnej nie zmienia wartości tej funkcji).

D1.2.b

$$V(\sim\Phi) = 1 - V(\Phi),$$

$$V(\Phi \wedge \Psi) = \min(V(\Phi), V(\Psi)),$$

$$V(\Phi \vee \Psi) = \max(V(\Phi), V(\Psi)),$$

$$V(\Phi \Rightarrow \Psi) = 1, \text{ gdy } V(\Phi) \leq V(\Psi), (1 - V(\Phi)) + V(\Psi), \text{ gdy } V(\Phi) > V(\Psi),$$

$$V(\Phi \Leftrightarrow \Psi) = 1 - |V(\Phi) - V(\Psi)|.$$

Niżej przykłady zastosowania definicji **D1.2**:

(i) wartość logiczna implikacji $p \Rightarrow q$:

w systemie L_3 :

$$\text{dla } p = \frac{1}{2}, q = 0: (1 - p + q) = (1 - \frac{1}{2} + 0) = \frac{1}{2};$$

w systemie L_5 :

$$\text{dla } p = \frac{1}{2}, q = \frac{3}{4}: = 1;$$

$$\text{dla } p = \frac{3}{4}, q = \frac{1}{2}: (1 - p + q) = (1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}) = (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4};$$

$$\text{dla } p = 1, q = \frac{1}{4}: (1 - 1 + \frac{1}{4}) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

(ii) wartość logiczna równoważności $p \Leftrightarrow q$:

w systemie L_3 :

$$\begin{aligned} \text{dla } p = \frac{1}{2}, q = 0: & \min(\min(1, 1 - p + q), \min(1, 1 - q + p)) = \\ & = \min(\min(1, \frac{1}{2} + 0), (\min(1, 1 + \frac{1}{2}))) = \min(\min(1, \frac{1}{2}), \\ & \min(1, 1\frac{1}{2})) = \min(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

w systemie L_5 :

$$\begin{aligned} \text{dla } p = \frac{1}{4}, q = \frac{3}{4}: & \min(\min(1, 1 - p + q), \min(1, 1 - q + p)) = \\ & = \min(\min(1, \frac{3}{4} + \frac{3}{4}), (\min(1, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}))) = \min(\min(1, 1\frac{1}{2}), \\ & \min(1, \frac{1}{2})) = \min(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a dla } p = 1, q = \frac{1}{4}: & \min(\min(1, 1 - p + q), \min(1, 1 - q + p)) = \\ & = \min(\min(1, 0 + \frac{1}{4}), (\min(1, \frac{3}{4} + 1))) = \min(\min(1, \frac{1}{4}), \min(1, 1\frac{1}{4})) = \\ & = \min(\frac{1}{4}, 1) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dla równoważności prościej jest stosować wzór $V(\Phi \leftrightarrow \Psi) = 1 - |V(\Phi) - V(\Psi)|$ podany w **D1.2.b**.

Do systemu L_3 doprowadziło Łukasiewicza odrzucenie ścisłego determinizmu, tj. poglądu, że obecny stan świata z konieczności determinuje stany przeszłe. Według Łukasiewicza istnieją zdarzenia dziś niezdeteminowane, tzn. takie, że nie istnieją obecnie ani przyczyny ich wystąpienia, ani też zdarzenia wykluczające ich wystąpienie⁴. Są wobec tego trzy kategorie zdań: zdania o zdarzeniach pewnych, zdania o zdarzeniach wykluczonych i zdania o zdarzeniach niezdeteminowanych (możliwych); wartości logiczne tych zdań to, odpowiednio, 1, 0 i $\frac{1}{2}$.

Zmierzając do ugruntowania logiki modalnej w logice wielowartościowej, Łukasiewicz wprowadził w L_3 funktor możliwości **M**, zdefiniowany matrycą:

D2

p	M p
1	1
$\frac{1}{2}$	1
0	0

Nie powiodła się jednak próba zinterpretowania funktorów modalnych w L_3 . W systemie tym są bowiem prawdziwe wyrażenia, których podstawienia są niezgodne z intuicyjnym rozumieniem możliwości⁵. Na przykład, według matryc **D1.1** oraz **D2**, wyróżnioną wartość prawdziwości przyjmują wyrażenia:

$$(\mathbf{M}p \wedge \mathbf{M}\sim p) \Rightarrow \mathbf{M}(p \wedge \sim p) \quad \text{oraz} \quad (\mathbf{M}p \wedge \mathbf{M}q) \Rightarrow \mathbf{M}(p \wedge q).$$

Pierwsza z tych implikacji jest prawdziwa nie tylko dla klasycznych wartości p (poprzednik tej implikacji ma wtedy wartość 0), lecz także dla $p = \frac{1}{2}$, kiedy to i poprzednik, i następnik uzyskują wartość 1. W drugiej implikacji, gdy choć jedna ze zmiennych ma wartość 0, wtedy poprzednik ma wartość 0, czyli implikacja jest prawdziwa, a gdy obie zmienne mają wartość różną od 0 (1 albo $\frac{1}{2}$), wtedy i poprzednik, i następnik przyjmują

⁴ Zob. J. Łukasiewicz, *O determinizmie*, w: tegoż: *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*, Warszawa 1961, s. 114–126.

⁵ Zob. np.: M. Lechniak, *Interpretacje wartości matryc logik wielowartościowych*, Lublin 1999; J. Woleński, *Many-Valueness and Modality*, „Ruch Filozoficzny” 2019, t. 75, nr 2, s. 61–74.

wartość 1 – także w sytuacji, gdy obie mają wartość $\frac{1}{2}$, bo wtedy w następniku również uzyskuje się $\mathbf{M}(\frac{1}{2}) = 1$.

Jednakże obie te tezy rachunku L_3 są fałszywe. Podstawieniem pierwszej z nich jest np. zdanie: *Jeśli jest możliwe, że jutro będzie bitwa morska i jest możliwe, że nie będzie bitwy morskiej, to jest możliwe, że jutro będzie bitwa morska i nie będzie jej*⁶. Za drugą formułę, która jest uogólnieniem pierwszej, można podstawić np. *Jeżeli jest możliwe, że jutro o 15.00 Jan będzie w Krakowie, i jest możliwe, że jutro o 15.00 Jan będzie w Warszawie, to jest możliwe, że jutro o 15.00 Jan będzie i w Krakowie, i w Warszawie*.

Z drugiej strony nie jest w L_3 prawdziwa formuła $p \vee \sim p$, czyli prawo wyłączonego środka (*Będzie w Krakowie lub nie będzie w Krakowie*), jako że dla $p = \frac{1}{2}$ przyjmuje, zgodnie z macierzami, wartość $\frac{1}{2}$, a 1 jest jedyną wartością wyróżnioną w systemie L_3 . Nie są także prawdziwe w L_3 inne prawa KRZ, np.

$\sim(p \wedge \sim p)$: uzyskuje wartość $\frac{1}{2}$ dla $p = \frac{1}{2}$;

$p \wedge \sim p \Rightarrow q$: $\frac{1}{2}$ dla $p = \frac{1}{2}$, $q = 0$;

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$: $\frac{1}{2}$ dla $p = 1$, $q = \frac{1}{2}$, $r = 0$ ⁷.

Gdy wprowadzi się do L_3 definicyjnie spójniki:

możliwości $\mathbf{M}\Phi =_{df} \sim\Phi \Rightarrow \Phi$,

konieczności $\mathbf{K}\Phi =_{df} \sim\mathbf{M}\sim\Phi$

oraz spójnik $\mathbf{I}\Phi =_{df} \mathbf{M}\Phi \wedge \sim\mathbf{K}\Phi$ (\mathbf{I} = „jest przypadkowe/modalnie obojętne/indyferentne, że”), których charakterystyka semantyczna jest taka: $\Phi(0, \frac{1}{2}, 1)$, $\mathbf{M}\Phi(0, 1, 1)$, $\mathbf{K}\Phi(0, 0, 1)$, $\mathbf{I}\Phi(0, 1, 0)$ – czyli w tabelce:

Φ	$\mathbf{M}\Phi$	$\mathbf{K}\Phi$	$\mathbf{I}\Phi$
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	1	0	1
1	1	1	0

wtedy, stosując te definicje w regule zastępowania, można w L_3 udowodnić m.in.:

$(p \vee \mathbf{I}p \vee \sim p)$ oraz $\sim(p \wedge \mathbf{I}p \wedge \sim p)$.

⁶ Zdania modalne rozważane już przez Arystotelesa, do których nawiązywał J. Łukasiewicz (*O determinizmie*, dz. cyt., s. 117). Zob. także D. Łukasiewicz, *Filozofia Tadeusza Czeżowskiego*, Bydgoszcz 2020, s. 193–198.

⁷ W cytowanym wyżej artykule (*Many-Valueness and Modality*) J. Woleński okazuje, że nie jest poprawna argumentacja Łukasiewicza prowadząca do wniosku, że formuła $\mathbf{M}(p \wedge \sim p)$ uzyskuje wartość $\frac{1}{2}$ dla $p = \frac{1}{2}$.

Formuły te są w L_3 odpowiednikami zasad wyłączonego środka i niesprzeczności.

Funktor \mathbf{M} zdefiniowany jak w **D2** i powyższej tabeli nie jest w L_3 ekstensjonalny, bo nie jest tezą formuła:

$(\Phi \leftrightarrow \Psi) \Rightarrow (\mathbf{M}\Phi \leftrightarrow \mathbf{M}\Psi)$ – dla $V(\Phi) = 1/2$ i $V(\Psi) = 0$ uzyskuje bowiem wartość $1/2$.

Rachunek L_3 można przedstawić także w postaci systemu aksjomatycznego. Oto jedna z aksjomatyk (sformułowana w metajęzyku):

$$A1. \quad \Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)$$

$$A2. \quad (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow [(\Psi \Rightarrow X) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow X)]$$

$$A3. \quad (\sim\Phi \Rightarrow \sim\Psi) \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)$$

$$A4. \quad [(\Phi \Rightarrow \sim\Phi) \Rightarrow \Phi] \Rightarrow \Phi.$$

Pierwotne reguły wyprowadzania (inferencji) to reguła odrywania, reguła podstawiania (rozumiane standardowo) oraz reguła zastępowania oparta na następujących równościach definicyjnych:

$$\Phi \vee \Psi =_{df} (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow \Psi$$

$$\Phi \wedge \Psi =_{df} \sim(\sim\Phi \vee \sim\Psi)$$

$$\Phi \leftrightarrow \Psi =_{df} (\Phi \Rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \Rightarrow \Phi).$$

2. Logika modalna

We współczesnej logice modalnej i budowanych w niej rachunkach kwalifikacje modalne są rozumiane jako odnoszące się do całych zdań – czyli jako tzw. modalności *de dicto*, odróżnione od modalności rozumianych *de re*, w których *modus* dotyczy czasownika, czyli sposobu, w jaki cecha przysługuje jakiemuś przedmiotowi (*RIII.1.2.2) – a przy tym orzeczniki modalne są traktowane jako funktory zdaniotwórcze jednoargumentowe, co nie wyklucza definiowania modalnych funktorów wiążących więcej argumentów.

Tak rozumiana logika modalna obejmuje nadbudowane na KRZ rachunki zdań, w których języku są używane funktory *jest konieczne, że* (symbolicznie: \Box albo **K**) oraz *jest możliwe, że* (\Diamond albo **M**). „Nadbudowanie” modalnych rachunków zdaniowych nad KRZ znaczy, że w rachunkach tych jest zakładany język (słownik i gramatyka) oraz tautologie KRZ, wzbogacone o terminy (symbole) i prawa specyficzne dla relacji wynikania między zdaniami modalnymi.

Jest wiele rachunków modalnych, różniących się aksjomatami i regułami dowodzenia twierdzeń, a także np. tym, czy konieczność jest definiowana przez możliwość, uznaną za termin pierwotny w języku danego rachunku, czy odwrotnie. Skutkuje to (w sensie konsekwencji logicznych) również różnicami w zbiorach formuł, które są tezami na gruncie danego rachunku⁸.

Pomijając te różnice i rezygnując z pełniejszego przedstawienia któregoś spośród wielu rachunków modalnych, ograniczę się do omówienia niektórych praw wspólnych dla tych różnych ujęć⁹. Wybór praw jest podyktowany także tym, by uwzględnić takie, które są zakładane w rozumowaniach formułowanych w języku naturalnym. Dla uproszczenia zapisu praw będą obok symboli zmiennych zdaniowych używane literowe symbole funktorów modalnych¹⁰.

Upraszczając, można powiedzieć, że pierwsze trzy prawa ukazują funkcjonowanie modalności w kontekście sprzeczności (p vs $\sim p$):

T1.a $Kp / K\sim p$; **T1.b** $Mp \vee M\sim p$; **T1.c** $Kp \underline{\vee} M\sim p$.

Ponieważ funktor dysjunkcji jest odczytywany „co najwyżej jedno z dwojga”, więc zgodnie z **1.a** to, co stwierdzane w dwóch zdaniach sprzecznych, nie może być jednocześnie konieczne, choć (zgodnie z rozumieniem dysjunkcji) może być jednocześnie niekonieczne, jak również

⁸ Uwagi J. Łukasiewicza o systemach modalnych i prezentacja jego własnego znajdują się w: *System logiki modalnej*, w: tegoż, *Z zagadnień logiki i filozofii...*, dz. cyt., s. 275–305. Uwagi o logice modalnej J. Łukasiewicza, także porównawcze, są w: J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 123–128. Zagadnienia współczesnych logik modalnych (rozumianych szerzej niż w niniejszym opracowaniu) są podjęte np. w monografii: M. Tkaczyk (red.), *Jedność i wielość logik modalnych*, dz. cyt. oraz (także w ujęciu historycznym) w: M. Pascucci, A.T. Tuboly (red.), *Reflecting on the Legacy of C.I. Lewis: Contemporary and Historical Perspectives on Modal Logic*, „Organon F” (Special Issue) 2019, t. 26, nr 3, s. 318–540. Zob. także J. Woleński, *O predykcjach 'jest prawdą'*, w: *Prawda*, red. D. Leszczyński, Wrocław 2011, s. 31–44.

⁹ Założeniowa metoda budowania systemów modalnych jest omówiona w: M. Tkaczyk, *Założeniowe systemy normalnych logik modalnych*, „Roczniki Filozoficzne” 2007, t. 55, nr 1, s. 219–228.

¹⁰ Symbol **K** – stosowany tu, w prezentacji wąsko rozumianej logiki modalnej, jako skrót dla *jest konieczne, że* – nie powinien być kojarzony z pominiętą w tym opracowaniu logiką epistemiczną, w której ta sama litera oznacza jedną z właściwych dla tej logiki stałych (skraca angielskie słowa wskazujące na to, że to, co ogłaszane w zdaniu p , jest wiadome – dla kogoś bądź obiektywnie).

może być tak, że konieczne jest to tylko, co stwierdzone w jednym spośród pary zdań sprzecznych.

Nie jest natomiast, jak widać w **1.b**, wykluczona współmożliwość stanów opisywanych w zdaniach sprzecznych, możliwy może być tylko jeden spośród nich, lecz nie mogą być one jednocześnie niemożliwe.

Związki między możliwością i koniecznością stanów stwierdzanych w zdaniach sprzecznych ujmuje z kolei funktor alternatywy rozłącznej: jeżeli jest konieczne to, co stwierdza zdanie p , to – zgodnie z **1.c** – nie jest możliwe to, co stwierdza zdanie $\sim p$ (i odwrotnie).

W kolejnej grupie praw są uchwycone związki wynikania między modalnościami zdania p , tj. logiczne związki między (zdaniem o) tym, co konieczne, faktyczne (istniejące) i możliwe:

T2.a $Kp \Rightarrow p$; **T2.b** $Kp \Rightarrow Mp$; **T2.c** $p \Rightarrow Mp$.

2.a: jeśli coś jest konieczne, to jest (*a necesse ad esse*);

2.b: jeśli coś jest konieczne, to jest możliwe (*a necesse ad posse*);

2.c: co jest, to jest możliwe (*ab esse ad posse*).

Warto dostrzec, że implikację **2b** da się uzyskać na podstawie **2a** i **2c**: jest na podstawie prawa przechodności implikacji oczywiste, że twierdzenie **2b** wynika z koniunkcji twierdzeń **2a** i **2c**:

$[(Kp \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow Mp)] \Rightarrow (Kp \Rightarrow Mp)$.

Ogólnikowo można powiedzieć, że w prawach **T3** mowa o tym, jak zachowuje się modalność w kontekście implikacji, a w prawach tych łatwo jest dostrzec modalne odpowiedniki często stosowanych praw (i reguł wniosowania) KRZ, tj. praw *modus ponendo ponens* oraz *modus tollendo tollens*:

T3.a $[K(p \Rightarrow q) \wedge Kp] \Rightarrow Kq$; **T3.b** $[K(p \Rightarrow q) \wedge K\sim q] \Rightarrow K\sim p$.

3a: jeśli wiadomo, że konieczna jest implikacja i konieczny jest poprzednik implikacji (to, co w nim ogłoszone), to można uznać, że konieczny jest również jej następnik;

3b: jeśli jest konieczna implikacja i konieczne jest to, co głosi negacja jej następnika, to konieczne jest również to, co stwierdzone w negacji poprzednika¹¹.

¹¹ Warunek konieczności implikacji ($p \Rightarrow q$) znaczy, że w prawach tych jest zakładana implikacja tzw. ścisła, rozumiana zgodnie z definicją: $(p \Rightarrow q) =_{df} \sim \mathbf{M}(p \wedge \sim q)$. Dodanie symbolu **K** przed implikacją jest niezbędne, ponieważ formuły dla implikacji

Kolejne prawa przypominają znane z KRZ prawa rozdzielności (proste i odwrotne) koniunkcji względem alternatywy oraz alternatywy względem koniunkcji:

$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ oraz $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.
Dlatego prawa sformułowane niżej można nazwać prawami rozdzielności modalności względem alternatywy i koniunkcji:

$$\mathbf{T4.a} \quad \mathbf{K}(p \wedge q) \Leftrightarrow (\mathbf{K}p \wedge \mathbf{K}q); \quad \mathbf{T4.b} \quad \mathbf{M}(p \vee q) \Leftrightarrow (\mathbf{M}p \vee \mathbf{M}q).$$

$$\mathbf{T5.a} \quad (\mathbf{K}p \vee \mathbf{K}q) \Rightarrow \mathbf{K}(p \vee q); \quad \mathbf{T5.b} \quad \mathbf{M}(p \wedge q) \Rightarrow (\mathbf{M}p \wedge \mathbf{M}q).$$

W kontekście funktorów modalnych \mathbf{K} oraz \mathbf{M} , pamiętając o ich jednoargumentowości, można powiedzieć, że konieczność jest rozdzielna względem koniunkcji, a możliwość względem alternatywy (w sposób prosty i odwrotny) w tym sensie, że:

4.a: jeśli wiadomo, że konieczna jest koniunkcja, to za konieczny można uznać każdy z jej czynników – i odwrotnie;

4.b: gdy wiadomo, że możliwa jest alternatywa, to możliwy jest każdy (pierwszy lub drugi) z jej składników – i odwrotnie.

Z kolei prawa **T5** ukazują „działanie” funktora konieczności w kontekście alternatywy oraz funktora możliwości w koniunkcji:

5.a: jeśli (co najmniej jedno z dwojga) konieczne jest p lub konieczne jest q , to konieczna jest alternatywa tych zdań – tylko odwrotne prawo rozdzielności konieczności względem alternatywy;

5.b: jeśli jest możliwe, że p oraz q , to możliwe jest p oraz jest możliwe q : czyli możliwość jest rozdzielna – lecz tylko w sposób prosty – względem koniunkcji.

Przykładem definicyjnego wprowadzania funktorów modalnych, a jednocześnie ilustrującym wspomniane różnice między rachunkami modalnymi, są następujące określenia:

$$\mathbf{D1.a} \quad \mathbf{M}p =_{\text{df}} \sim \mathbf{K} \sim p; \quad \mathbf{D1.b} \quad \mathbf{K}p =_{\text{df}} \sim \mathbf{M} \sim p;$$

$$\mathbf{D2.a} \quad (p \rightarrow q) =_{\text{df}} \sim \mathbf{M}(p \wedge \sim q); \quad \mathbf{D2.b} \quad (p \triangle q) =_{\text{df}} \mathbf{M}(p \wedge q).$$

W **D.1.a** funktor możliwości jest zdefiniowany przez konieczność: „możliwe, że p ” to, zgodnie z tą równością definicyjną, tyle co „nie jest

materiałnej, tj. $(p \rightarrow q) \wedge \mathbf{K}p \Rightarrow \mathbf{K}q$ i $(p \rightarrow q) \wedge \mathbf{K} \sim q \Rightarrow \mathbf{K} \sim p$ nie są prawami (za wskazanie tego notacyjnego błędu – przeoczonego także w: A. Jonkisz, *Elementy logiki stosowanej*, Bielsko-Biała 2011, 2015, s. 150 – dziękuję M. Lechniakowi).

konieczne, że nie p ". W systemach modalnych z taką definicją – postulowaną, pominiawszy różnicę notacji, np. w systemie modalnym R. Feysa, zwanym też systemem T – konieczność jest terminem pierwotnym, określonym tylko nie wprost, przez układ aksjomatów. Natomiast zgodnie z definicją **1.b** – przyjętą np. w systemach modalnych wywodzących się od K. Gödla – jest odwrotnie (i w definicji, i w systemie).

Z kolei definicje **2.a** i **2.b** ilustrują możliwość wprowadzania do rachunków modalnych funktorów dwuargumentowych. W pierwszej z nich – pochodzącej od C.I. Lewisa, od którego rozpoczęły się współczesne badania modalności – jest określona implikacja zwana najczęściej ścisłą, odczytywana np. *skoro ... więc ...*, albo (metajęzykowo) *z ... wynika ...*. Warto dodać, że w systemach implikacji mocniejszej niż zwykła (\Rightarrow) są ponadto formułowane dodatkowe, nieobecne w **D.2.a**, warunki uwzględniające funkcjonujący w okresach warunkowych języka potocznego wymóg, by poprzednik i następnik okresu były związane treściowo. W **D2.b** jest natomiast zdefiniowany tzw. funktor zgodności (spójności), symbolizowany przez Δ , a odczytywany *mimo że ..., to ... albo chociaż ..., to jednak ...*.

3. Logika deontyczna

W logice deontycznej są budowane rachunki, w których są badane związki logiczne między zdaniami zawierającymi funktory wyrażające powinność. W opisach semiotycznych funktory takie są zwane pojęciami normatywnymi (*RIII.2), a w logice formalnej – funktorami deontycznymi.

Rachunki deontyczne są nadbudowane nad KRZ (w sensie wyżej określonym) i – podobnie jak rachunki modalne, choć historia logiki deontycznej jest krótsza od modalnej – w punkcie wyjścia, obok wspólnie zakładanego KRZ, różnią się przyjętymi terminami specyficznymi (pierwotnymi i zdefiniowanymi) oraz aksjomatami i regułami dowodzenia, co skutkuje również różnicami w formułach uznawanych za tezy.

Funktory najczęściej badane w rachunkach deontycznych, pojawiające się w ich słownikach jako tzw. stałe deontyczne, to:

N *jest obowiązkowe (nakazane) to, że ...;*

Z *jest zakazane to, że ...;*

D *jest dozwolone to, że ...*

Są one najczęściej symbolizowane (w sposób nawiązujący do nazewnictwa angielskiego) przez, odpowiednio, **O**, **F** oraz **P**. W tych analizach są jednak używane symbole wskazujące na słowa polskie, tj. **N** (*jest nakazane*), **Z** (*jest zakazane*) oraz **D** (*jest dozwolone*) – tym bardziej, że symbole **F** oraz **O** zostaną zaproponowane jako skróty zdefiniowanych niżej funktorów *jest fakultatywne* oraz *jest obojętne*.

Funktory **N**, **Z** oraz **D**, na co zwracałem już uwagę (*RIII.2), mają w języku potocznym wiele odpowiedników, a ponadto w dyskursie normatywnym występują także, i są w rachunkach deontycznych definiowane, inne stałe deontyczne, na przykład wyrażające: ważność (*Ważne jest ...*), uznaniowość (*Jest fakultatywne to, że ...*) bądź obojętność (*Jest obojętne, czy ...*).

Ponadto w systemach deontycznych zwanych relatywnymi występują jako stałe deontyczne funktory zwane względnyimi:

N (.../...)	odczytywane jako	<i>jest nakazane to, że ..., pod warunkiem tego, że ...;</i>
Z (.../...)		<i>jest zakazane to, że ..., pod warunkiem tego, że ...;</i>
D (.../...),		<i>jest dozwolone to, że ..., pod warunkiem tego, że ...¹².</i>

Funktory relatywne są wprowadzane do rachunków po to, by lepiej oddawać znaczenia pojęć normatywnych używanych w dyskursie prowadzonym w języku naturalnym (nieformalnym).

Decydując się na uproszczenia analogiczne do przyjętego w prezentacji rachunków modalnych, omówię te tylko prawa logiki deontycznej, które są najczęściej stosowane w rozumowaniach, w których są zaangażowane pojęcia normatywne (funktory deontyczne). W omówionych niżej prawach występują tylko funktory nakazu, zakazu i dozwolenia,

¹² Zob.: K. Świrydowicz, *Logiczne teorie obowiązku warunkowego*, Poznań 1995 (w monografii, osadzonej w kontekście teorii prawa, są przedstawione różne formalnologiczne ujęcia obowiązku warunkowego i związane z tym pojęciem zagadnienia syntaktyczne i semantyczne dotyczące norm i systemów norm, są także liczne odesłania do klasycznych systemów deontycznych i wypowiedzi dotyczących szczegółowych zagadnień); tenże, *Podstawy logiki modalnej*, dz. cyt. Zob także: L. Koj, *Powinności w nauce*. T. 1: *Określenie i poznawalność powinności*, Lublin 1998, s. 46–98 (semiotyczne analizy pojęcia powinności rozumianej szeroko) oraz J. Woleński, *Przyczynek do analizy dozwolenia*, w: tegoż, *W stronę logiki*, Kraków 1996, s. 177–181.

a w zapisie praw jest stosowana, warto powtórzyć, symbolika wskazująca na nazwy polskie, tj. odpowiednio: **N**, **Z** oraz **D**.

T1.a $Np / N\sim p$; **T1.b** $Dp \vee D\sim p$; **T1.c** $Np \underline{\vee} D\sim p$;

T1.d Np / Zp ; **T1.e** $Zp \underline{\vee} Dp$.

Twierdzenia **1.a–1.c** mówią o tym, jak funktory deontyczne „zachowują się” w kontekście sprzeczności:

Zgodnie z **1.a** to, co stwierdzone w dwóch zdaniach sprzecznych, nie może być jednocześnie nakazane, może być (i często bywa) tak, że nakazane jest to tylko, co stwierdzone w jednym spośród pary zdań sprzecznych, a także tak, że zdania sprzeczne są jednocześnie nienakazane (można dodać – o ile są neutralne względem powinności).

Mogą być natomiast dozwolone, jak widać w **1.b**, dwa działania sprzeczne (opisane w zdaniach sprzecznych), może być dozwolone tylko jedno z nich, lecz nie mogą być jednocześnie niedozwolone.

Prawo **1.c** wskazuje natomiast na związki logiczne między nakazem a dozwoleń (normami nakazującymi a dozwalającymi) w zakresie działań sprzecznych (p oraz $\sim p$). Relacje te ujmują trafnie alternatywa rozłączna: jeśli jest nakazane to, co stwierdza zdanie p , to nie jest dozwolone to, co stwierdza zdanie $\sim p$ (i odwrotnie), czyli nakaz określonego działania wyklucza przyzwolenie na działania przeciwne, a przyzwolenie dla jakiegoś działania znosi nakaz działania przeciwnego.

Natomiast związki logiczne między zdaniami, z których jedno wyraża nakaz, a drugie zakaz jakiegoś działania (opisanego w zdaniu p) również (jak w **1.a**) oddaje spójnik dysjunkcji: według **1.d** określone działanie nie może być jednocześnie nakazane i zakazane, możliwe są natomiast wszystkie pozostałe sytuacje.

Z kolei tak samo jak nakazy i dozwoleń w zakresie działań sprzecznych (**1.c**) są powiązane zakazy i dozwoleń dotyczące określonego działania (opisanego w zdaniu p) – w myśl **1.e** dowolne działanie nie może być jednocześnie zakazane i dozwolone, lecz musi być zakazane albo dozwolone.

T2.a $Np \Leftrightarrow \sim D\sim p$; **T2.b** $Zp \Leftrightarrow N\sim p$;

T2.c $Zp \Leftrightarrow \sim Dp$; **T2.d** $Np \Rightarrow Dp$.

Prawa **2a–2d** ukazują związki wynikania między zdaniami normatywnymi (odmianami powinności). Interpretując te formuły, powiemy:

2a: że jeśli jakieś działanie jest nakazane, to nie jest dozwolone działanie z nim sprzeczne, i odwrotnie;

2b: jeśli czyn jest zakazany, to jest obowiązek działania przeciwnego, i odwrotnie;

2c: zakaz oznacza brak przyzwolenia, i odwrotnie (działanie niedopuszczalne jest zakazane);

2d: z nakazu wynika przyzwolenie (lecz nie odwrotnie).

Kolejne prawa przywodzą na myśl często stosowane implikacyjne prawa KRZ.

T3.a $[N(p \Rightarrow q) \wedge Np] \Rightarrow Nq$;

T3.b $[N(p \Rightarrow q) \wedge Dp] \Rightarrow Dq$;

T3.c $[N(p \Rightarrow q) \wedge Zq] \Rightarrow Zp$.

Mianowicie prawa **3a** oraz **3b** to deontologiczne odpowiedniki prawa *modus ponendo ponens*: jeśli nakazany jest okres warunkowy, którego poprzednik jest nakazany, to nakazany jest również następnik, a dokładniej: jeżeli nakazane jest działanie opisane w p , to nakazane jest również działanie opisane zdaniem q . Jeśli natomiast poprzednik jest dozwolony, to następnik też jest dozwolony – czyli, w obu tych sytuacjach, status powinnościowy poprzednika deontycznego okresu warunkowego przechodzi na następnik. Z kolei w **3c** łatwo dostrzec deontologiczny odpowiednik prawa *modus tollendo tollens*: jeśli jest zakazane działanie opisane w następniku uznanego okresu warunkowego, to zakazane jest również działanie wskazane w jego poprzedniku (zakaz przechodzi z następnika na poprzednik).

T4.a $N(p \wedge g) \Leftrightarrow (Np \wedge Nq)$; **T4.b** $D(p \vee g) \Leftrightarrow (Dp \vee Dq)$;

T4.c $Z(p \vee g) \Leftrightarrow (Zp \wedge Zq)$.

Prawa **4a** i **4b** ponownie (por. **RII.2: **T4.a** i **T4.b**) mogą wzbudzać skojarzenia z prawami rozdzielności. Można powiedzieć (*mutatis mutandis*), że funktor nakazu jest rozdzielny względem koniunkcji, a funktor dozwolenia względem alternatywy (w sposób prosty i odwrotny) – w tym sensie, że jeśli wiadomo, że nakazana jest koniunkcja działań, to jest obowiązkowe zrealizowanie każdego z jej przyczynków (i odwrotnie); oraz gdy wiadomo, że dozwolona jest alternatywa (nierozłączna) działań, to dozwolone jest każde z jej działań składowych (i odwrotnie). Prawo **4c** natomiast przypomina o prawie de Morgana dla alternatywy: jeśli

zakazana jest alternatywa jakichś działań, to zakazane jest każde z osobna jej działanie składowe, a także – o ile zakazane są dowolne dwa działania, to jest również zakazane ich alternatywne spełnianie: na przykład jeśli zakazane jest odpisywanie lub ściąganie, to zakazane jest odpisywanie i zakazane jest ściąganie (i odwrotnie).

Przykładem wzajemnego definiowania funktorów deontycznych oraz ilustracją do podziału, w ramach określonego rachunku, stałych deontycznych na pierwotne i wtórne są takie oto definicje funktorów **Z** oraz **D**, dodane w systemie, w którym pierwotnym terminem deontycznym jest **N**:

$$\mathbf{D1.a} \quad Zp =_{df} N\sim p;$$

$$\mathbf{D1.b} \quad Dp =_{df} \sim N\sim p.$$

W pierwszej z tych definicji pojęcie (funktor) zakazu jest zdefiniowane przez pojęcie nakazu: „jest zakazane to, że p ” to, zgodnie z równością definicyjną **1.a**, tyle co „jest nakazane, że nie p ”. W **D1.b** jest zdefiniowane dozwoleństwo – tak, że na podstawie tej definicji zdanie o schemacie „jest dozwolone to, że p ” można zawsze zastąpić przez „nie jest nakazane to, że nie p ”.

Definicyjnie można wprowadzić do systemu deontycznego także inne stałe, np. wspomniany funktor **O** obojętności (neutralności) oraz funktor **F** fakultatywności (uznaniowości) względem powinności:

$$\mathbf{D2.a} \quad Op =_{df} (\sim Np \wedge \sim Zp);$$

$$\mathbf{D2.b} \quad Fp =_{df} \sim Np.$$

Jeśli ważność deontyczną (deontyczne zobowiązanie) rozumie się jako zaprzeczenie deontycznej neutralności (obojętności), można bezpośrednio na podstawie **D.2.a** (i prawa negowania koniunkcji) zdefiniować i ten funktor (**W**):

$$\mathbf{D2.c} \quad Wp =_{df} (Np \vee Zp).$$

*

Porównując prawa logiki modalnej i deontycznej, dostrzegamy analogię między koniecznością i nakazem, niemożliwością i zakazem oraz między możliwością i dozwoleństwem (wiele praw logiki modalnej można przekształcić w prawa logiki deontycznej, stosując w edytorze funkcję znajdź/zastąp dla **K/N** oraz **M/D**). W powyższej prezentacji praw obu tych logik celowo jest zastosowany ten sam schemat, by podobieństwa te łatwiej było dostrzec. Jest jednak istotna różnica między modalnością a powinnością, od dawna dostrzeżona i dyskutowana w filozofii i logice: z konieczności

wynika faktyczność (fakt opisany w zdaniu p), a z faktyczności możliwość (**R.II.2: **T2.a**, **T2.c**), natomiast z nakazu nie wynika fakt spełnienia czynu opisanego w p ani z faktu (zdania opisującego fakt) nie wynika dozwoleń spełnienia czynu, nie mówiąc o nakazie jego spełniania¹³.

4. Logika intuicjonistyczna i logiki pośrednie¹⁴

W kontekście szeroko rozumianej logiki współczesnej intuicjonizm jest programem metamatematycznym zapoczątkowanym (w 1907 roku) przez matematyka holenderskiego L. Brouwera¹⁵. Ważnym źródłem intuicjonistycznego podejścia do podstaw matematyki były antynomie tzw. klasycznej teorii mnogości, rozwiniętej przez G. Cantora (zob. **R.IV.4). Postulaty intuicjonizmu dotyczyły przede wszystkim metod dowodzenia oraz wprowadzania do systemów logiki i matematyki ich pojęć pierwotnych, a zwłaszcza pojęć i metod nieskończonościowych: metody logiki powinny być zgodne z intuicyjnymi sposobami dowodzenia, pojęciem nieskończoności wywodzącym się z ciągu liczb naturalnych, pojęciem istnienia opartym na wskazaniu lub opisie konstrukcji obiektu itd. Dlatego jednym z podstawowych postulatów intuicjonizmu było ograniczenie dowodów twierdzeń egzystencjalnych, tj. mówiących o istnieniu pewnych obiektów, do dowodów efektywnych, czyli kończących się wskazaniem przedmiotu dowodzonego rodzaju lub opisem jego konstrukcji („istnieć znaczy być skonstruowanym”).

Również w klasycznym rachunku logicznym są tezy, które dają podstawę do udowodnienia twierdzeń o istnieniu obiektów, których przykładu ani sposobu konstrukcji nie da się podać. Bardzo wydajnym źródłem

¹³ Zob. L. Gumański, *Wybrane zagadnienia logiki deontycznej*, w: tegoż, *Istnienie i logika*, Toruń 2006, s. 389–446.

¹⁴ Poniższa charakterystyka logiki intuicjonistycznej jest oparta głównie na: S. Krajewski, *Logika intuicjonistyczna*, w: *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny...*, dz. cyt., s. 360–368, J.K. Kobziński, *Logiki pośrednie*, w: *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny...*, dz. cyt., s. 369–381 oraz J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 128–130.

¹⁵ Wśród zwolenników intuicjonizmu, ogłoszonego w postaci programu przez L.E.J. Brouwera (1881–1966), było wielu wybitnych matematyków, takich jak L. Kronecker (1823–1891), H. Poincaré (1854–1912), É. Borel (1871–1956), H. Lebesgue (1875–1941), H. Weyl (1885–1955).

takich „nieefektywnych” dowodów jest zasada wyłączonego środka i oparta na niej reguła dołączania/opuszczania alternatywy. Podstawieniem zasady $p \vee \sim p$ jest alternatywa, pod którą podpadają twierdzenia głoszące, że dany (określony warunkiem Φ) obiekt istnieje lub nie istnieje:

$$(*) \quad (\forall x) \Phi(x) \vee \sim(\forall x) \Phi(x).$$

Okazanie w dowodzie niewprost, że do sprzeczności prowadzi przypuszczenie, że dany obiekt nie istnieje, daje podstawę do uznania zaprzeczenia założenia, które prowadzi do sprzeczności, tj. do uznania twierdzenia $\sim\sim(\forall x) \Phi(x)$, które połączone z (*) prowadzi do wniosku, że $(\forall x) \Phi(x)$. Wniosek ten jest na gruncie klasycznych metod dowodzenia zasadny, nawet jeśli nie da się podać przykładu takiego przedmiotu a , że $\Phi(a)$ ani jednoznacznego sposobu jego konstrukcji¹⁶.

Dlatego realizatorzy programu Brouwera zaproponowali ograniczenie praw i metod klasycznego rachunku logicznego do takich tylko, które zapewniają dowody efektywne. Na przykład intuicjonistyczny dowód koniunkcji $p \wedge q$ jest zakończony, o ile skonstruuje się dowód dla p oraz dla q (dowód dwuczłonowej koniunkcji jest więc parą dowodów); w dowodzie alternatywy $p \vee q$ trzeba podać konstrukcję, w której wyborowi jednego z jej składników towarzyszy jego dowód; dowód implikacji to konstrukcja, w której widać, że każdemu dowodowi zdania p odpowiada dowód dla q ; efektywny dowód zdania $\sim p$ polega na okazaniu, że prowadzi do sprzeczności (do „przedmiotu, którego nie ma”) każdy dowód zdania p ¹⁷.

Zgodny z postulatami intuicjonizmu rachunek logiczny, obejmujący system logiki zdań oraz logiki predykatów, zbudował w 1930 roku A. Heyting. Formalny system tego rachunku zdań jest oparty na regule odrywania i podstawiania, a jako aksjomaty zostały w nim przyjęte następujące wyrażenia:

(AI_H)

1. $p \Rightarrow (p \wedge q)$
2. $(p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge p)$
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)]$
4. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

¹⁶ Kwestia ta wiąże się m.in. z tzw. aksjomatem wyboru (zob. **RIV.4).

¹⁷ Efektywne dowody w rachunku kwantyfikatorów polegają na: wskazaniu stałej a dla zmiennej x w formule $(\forall x) \Phi(x)$ oraz podaniu dowodu dla zdania $\Phi(a)$; na okazaniu, że dla każdej możliwej wartości a dla x w formule $(\wedge x) \Phi(x)$ jest konstrukcyjny dowód dla zdania $\Phi(a)$.

5. $q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
6. $[p \wedge (p \wedge q)] \Rightarrow q$
7. $p \Rightarrow (p \vee q)$
8. $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$
9. $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$
10. $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
11. $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow \sim p.$

W systemie tym – przeciwnie niż w KRZ (por. **RI.1.2.3) – żadnego z terminów pierwotnych, tj. \Rightarrow , \wedge , \vee oraz \sim , nie da się zdefiniować, używając terminów pozostałych. Wszystkie prawa tego systemu logiki intuicjonistycznej są prawami klasycznej logiki zdań, lecz nie odwrotnie. Do tautologii KRZ niedowodliwych w systemie Heytinga należą np.:

$$p \vee \sim p, \quad \sim \sim p \Rightarrow p, \quad (\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p,$$

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p, \quad \sim(p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee \sim q).$$

Dodanie do (\mathbf{AI}_H) formuły $p \vee \sim p$ (prawa wyłączonego środka) skutkuje uzyskaniem aksjomatyki dla KRZ. System ten, tak samo jak KRZ, jest rozstrzygalny i pełny (jeden z dowodów pełności podał A. Tarski).

Okazało się jednak, że zaproponowana przez Heytinga matrycowa interpretacja tego systemu nie jest doń adekwatna, tj. ogół tez wyprowadzalnych z (\mathbf{AI}_H) nie jest identyczny z ogółem zawartości matrycy, tzn. ogółem formuł, które w danej matrycy przyjmują dla dowolnego wartościowania wartość wyróżnioną („prawdziwości”, którą jest w matrycach Heytinga wartość 2, a wartości pozostałe to 1 i 0). Oto (zgodne z oryginalnymi matrycami) definicje tabelkowe dla negacji, implikacji, koniunkcji i alternatywy:

(\mathbf{I}_H)

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge q$	$p \vee q$
2	2	0	2	2	2
2	1	0	1	1	2
2	0	0	0	0	2
1	2	0	2	1	2
1	1	0	2	1	1
1	0	0	0	0	1
0	2	2	2	0	2
0	1	2	2	0	1
0	0	2	2	0	0

Jak widać, dla koniunkcji i alternatywy obowiązują funkcje maksimum i minimum (rozumiane tak, jak w omówionych w **RII.1 systemach logiki wielowartościowej).

Heyting okazał, że wszystkie tezy jego systemu przyjmują wartość wyróżnioną dla każdego wartościowania, J. Łukasiewicz udowodnił jednak, że nie jest spełniona zależność odwrotna, tj. że są wyrażenia wyróżnione przez matryce Heytinga, a niebędące tezami jego systemu¹⁸. Do formuł takich należą na przykład:

- (1) $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow \{[(q \Rightarrow p) \Rightarrow q] \Rightarrow q\}$
- (2) $\sim p \vee \sim \sim p$
- (3) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$
- (4) $[\sim p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(\sim p \Rightarrow q) \vee (\sim p \Rightarrow r)]$
- (5) $[(\sim \sim p \Rightarrow p) \Rightarrow (p \vee \sim p)] \Rightarrow (\sim p \vee \sim \sim p)$
- (6) $p \vee [p \Rightarrow (q \vee \sim q)]$.

Łukasiewicz okazał także, że matryce Heytinga są adekwatne dla rachunku, w którym aksjomatyka (\mathbf{AI}_H) jest uzupełniona (wzmocniona) aksjomatem równoważnym z powyższą formułą (1). System ten, zwany logiką Heytinga-Łukasiewicza, zapoczątkował badania nad tzw. logikami pośrednimi, tj. rachunkami zdań zawartymi w KRZ, a bogatszymi od systemu Heytinga (nadsystemami dla tego systemu). Na przykład wzbogacenie aksjomatyki (\mathbf{AI}_H) o formuły, kolejno (2)–(6), prowadzi do systemów logiki pośredniej, odpowiednio: z tzw. słabym prawem wyłączonego środka, Dummetta, Kreisela-Putnama, Scotta, Jankova.

Charakterystyka logik pośrednich była wynikiem badań nad semantykami systemów logiki intuicjonistycznej. Częstkowe wyniki w tym zakresie osiągnęli m.in. T. Umezawa, K. Gödel, A. Tarski, M.H. Stone, M. Dummett, S. Kripke, a wyniki podstawowe dla ogólnej charakterystyki matryc semantycznych logiki intuicjonistycznej osiągnął S. Jaśkowski, który podał zasady konstrukcji nieskończonego ciągu matryc, z których każda wyznacza określony system logiki pośredniej, a iloczyn zawartości matryc tego ciągu jest adekwatny dla systemu (\mathbf{AI}_H) ¹⁹. Przestrzeń

¹⁸ Łukasiewicz podał także aksjomatykę równoważną dla (\mathbf{AI}_H) – zob.: L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 212. Inne aksjomatyki równoważne z (\mathbf{AI}_H) opracowane przez logików polskich – zob. J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 128.

¹⁹ Zob. tamże, s. 128–129 (gdzie także informacje o innych wynikach logików polskich znaczących dla rozumienia logiki intuicjonistycznej) oraz J.K. Kobiński, *Logiki pośrednie*, dz. cyt., s. 370–371.

systemów logik zdań odkrytych w badaniach nad logiką intuicjonistyczną jest nieskończona. W przestrzeni tej KRZ i system Heytinga to tylko wyróżnione punkty, a innymi (nazwanymi) są np. wymienione wyżej systemy; są także w tej przestrzeni logiki słabsze od (AI_H) (np. tzw. logika minimalna Johanssona, uzyskana w wyniku pominięcia w (AI_H) aksjomatu (10)), są także nieskończone podzbiory logik pośrednich określonego typu (np. logiki Gödla)²⁰.

²⁰ Zob.: tamże, s. 379–381; J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 128–130 (w pracach tych są odesłania do twórców i do źródłowych publikacji).

ROZDZIAŁ III

RACHUNEK PREDYKATÓW

W rozdziale tym, po ogólnych uwagach o rachunkach predykatów, są scharakteryzowane: tzw. węższy rachunek predykatów (WRP) oraz jego odmiana wzbogacona o pojęcie identyczności, a następnie teoria wynikania zdań kategorierycznych, zwana tradycyjnie sylogistyką, a współcześnie, ogólniej: teorią zdań kategorierycznych.

1. Uwagi ogólne¹

1.1 Systemy rachunku predykatów są zwane również rachunkami funkcyjnymi (coraz rzadziej²) albo rachunkami kwantyfikatorów (zwykle). Na potrzebę budowania i stosowania tych rachunków wskazuje fakt, że w logice zdań są badane relacje logiczne między zdaniami niezależne od budowy zdań prostych. Rachunki zdaniowe nie dostarczają więc metod sprawdzania wynikania międzyzdaniowego zależnego od logicznych

¹ W uwagach ogólnych są wykorzystane przykłady i opisy zaczerpnięte z paragrafów **7.3.1** i **7.3.2** w: A. Jonkisz, *Elementy logiki stosowanej*, dz. cyt., s. 109–115. Monograficzne opracowanie klasycznego rachunku predykatów jest zawarte w: W.A. Pogorzelski, *Klasyczny rachunek kwantyfikatorów. Zarys teorii*, Warszawa 1981.

² Termin „rachunek funkcyjny” jest trafnie stosowany jako nazwa rozszerzenia rachunku predykatów o terminy (symbole) funkcyjne, stosowanego do formalizacji teorii, w których terminami pierwotnymi są funkcje (oraz stałe indywidualowe właściwe dla danej teorii). Zob. A. Grzegorzczak, *Zarys logiki matematycznej*, dz. cyt., s. 177–186.

związków ogłoszonych wewnątrz zdań prostych. Spójrzmy na zdania: *Bywają złośliwe teściowe* oraz *Niektóre kobiety są złośliwe albo Każdy koń jest ssakiem* oraz *Niektóre ssaki mają ogon* (przykład pochodzący od B. Russella). Otóż dla wnioskowań, w których na podstawie pierwszego w tych parach zdania uznaje się drugie – wnioskowań, które zdroworozsądkowo oceniamy jako poprawne logicznie, a ocenę tę potwierdza logika – nie da się znaleźć podstaw w logice zdań, nawet jeśli uwzględnimy ich ukryte założenia, często obecne w rozumowaniach formułowanych w języku naturalnym. Schematy tych wnioskowań widoczne w języku KRZ, w których są uwzględnione przesłanki domyślne, to: $(p \wedge r) \Rightarrow q$; w schemacie tym w pierwszym wnioskowaniu trzeba podstawić: p /*Bywają złośliwe teściowe*, r /*Każda teściowa jest kobietą*, q /*Niektóre kobiety są złośliwe*, a w drugim: p /*Każdy koń jest ssakiem*, r /*Każdy koń ma ogon*, q /*Niektóre ssaki mają ogon* (w obu wnioskowaniach zdanie podstawiane za r jest założeniem domyślnym). Formuła $(p \wedge r) \Rightarrow q$ nie jest jednak tautologią KRZ.

Praw wnioskowania wnioskujących w związki logiczne ogłaszane w zdaniach prostych dostarcza logika predykatów. Są w niej stosowane terminy odnoszące się do składników zdań: predykaty (w gramatyce odpowiadają im orzeczenia), argumenty predykatów (odpowiednik podmiotu) oraz kwantyfikatory, czyli wyrażenia informujące, czy predykat jest orzekany o wszystkich, czy o niektórych przedmiotach danej kategorii.

1.2 Predykaty to funktry zdaniotwórcze o argumentach nazwowych. Kategoria predykatu (jak każdego funktra) zależy od liczby jego argumentów (predykaty jednoargumentowe, dwuargumentowe, ... n -argumentowe) oraz od kategorii argumentów (*RV.1). Gdy orzekana jest własność, predykat jest jednoargumentowy, gdy jest oznajmiana relacja, predykat wiąże tyle argumentów, ile członów ma relacja wiążąca indywidua (relacje dwuczłonowe, trójczłonowe itd.). Na liczbę argumentów wskazuje liczba zmiennych indywiduowych umieszczanych w nawiasie po zmiennej predykatowej. Jako zmiennych reprezentujących nazwy indywiduów, tj. nazwy jednostkowe, używa się znaków $x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots, x_p$, w roli zmiennych predykatowych występują symbole $P, Q, R, S, \dots, P_1, \dots$, reprezentujące predykaty, np. nazwy własności przysługujących indywiduom oraz nazwy relacji wiążących indywidua. Predykatami jednoargumentowymi są np.: *świeci* (... *świeci*), *filozof* (... *jest filozofem*), *liczba parzysta* (... *jest liczbą parzystą*); do dwuargumentowych należą

na przykład: ... *jest głupszy od ...*; ... *jest mniejsze niż ...*; ... *jest prezydentem państwa ...*; przykłady orzeczników trójargumentowych to: ... *jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb ... i ...*; ... *leży między ... a ...*. Na przykład w formule $P(x)$ można za zmienną predykatową P podstawiać nazwy własności (*wysoki, filozof, liczba parzysta*), za zmienną x – nazwę jednostkową (*Pałac Kultury, Sokrates, trzy*) otrzymując zdania np. *Pałac Kultury jest wysoki; Sokrates jest wysoki; Pałac Kultury jest liczbą parzystą; Sokrates jest filozofem; trzy jest liczbą parzystą* itd.

Argumentami predykatów pierwszego rzędu są tylko nazwy jednostkowe, tj. nazwy indywiduów, argumentami predykatów wyższych rzędów są predykaty rzędów niższych; dokładniej: predykat jest rzędu n wtedy i tylko, gdy wiąże argumenty (co najmniej jeden), które są predykatami rzędu $n-1$. Na przykład w zdaniach $2 = 5$, $2 < 3$ predykaty $=$ oraz $<$ są pierwszego rzędu, a formuły $x = y$, $x < y$ – jeśli wiadomo, że wolno za zmienne w nich występujące podstawiać wyłącznie nazwy jednostkowe – są wyrażeniami rachunku predykatów pierwszego rzędu. Natomiast w zdaniach: *Bycie człowiekiem i bycie ptakiem to własności wykluczające się* albo *Bycie kwadratem i bycie prostokątem równobocznym to to samo* są użyte predykaty rzędu drugiego, ponieważ argumentami predykatu „*wykluczają się*” są nazwy własności, czyli predykaty rzędu pierwszego „*jest człowiekiem*” i „*jest ptakiem*”, a argumentami predykatu „*to to samo*” są predykaty pierwszego rzędu „*jest kwadratem*” oraz „*jest prostokątem równobocznym*”. Zauważmy, że to samo wyrażenie, np. znak $=$ może być użyte jako predykat różnych rzędów: w wyrażeniu $x = y$, w którym są użyte zmienne indywiduowe, jest orzecznikiem pierwszego rzędu, natomiast w wyrażeniu ze zmiennymi predykatowymi $P = Q$ jest predykatem (co najmniej) drugiego rzędu (liczba oznaczająca rząd tego predykatu jest o jeden większa niż niemniejsza spośród liczb oznaczających rzędy predykatów P oraz Q). Zakres predykatu identity jest więc określony jedynie wtedy, gdy jest zdefiniowane uniwersum, do którego należą zakresy jego argumentów (zmiennych). Ponieważ w rachunkach logicznych (tzw. z identity) zakresu tego, ze względu na ogólność, się nie zawęża (jest nieokreślony), predykat ten nie jest traktowany jako orzecznik opisowy, lecz jako stała logiczna.

Z kolei kwantyfikatory (wyrażenia określające ilość) należą do tzw. operatorów, czyli do funktorów wiążących zmienne (*RV.2). W rachunkach predykatów kwantyfikatory są stałymi logicznymi właściwymi dla tych rachunków, dlatego rachunki predykatów nazywa się również rachunkami

kwantyfikatorów. Najczęściej są stosowane dwa spośród kwantyfikatorów, tj. wyrażenie *dla każdego*, które – warto przypomnieć przyjętą umowę – będzie w tych analizach symbolizowane przez: \wedge , a nazywane kwantyfikatorem ogólnym (dużym), oraz wyrażenie *dla pewnego*, brane w znaczeniu – *istnieje co najmniej jedno takie, że ...*, oznaczane symbolem \vee i nazywane kwantyfikatorem szczegółowym (małym, egzystencjalnym).

W prosty sposób można wprowadzić symbole odpowiadające uszczegółowieniom kwantyfikatora egzystencjalnego, tj.:

\vee_1 = *dla dokładnie jednego jest tak, że ... albo istnieje dokładnie jedno takie, że ...*

\vee_2 = *dla dokładnie dwóch albo istnieją dokładnie dwa takie, że ...*

\vee_k = *dla dokładnie k jest tak, że ... albo istnieje dokładnie k takich, że ...*

Napisy: $(\wedge x, y) \dots$, $(\vee z) \dots$ są odczytywane: *dla każdego x i dla każdego y ...* (albo krócej: *dla każdego x i y ...*) oraz *istnieje z takie, że ...*. Kwantyfikator użyty w pierwszym napisie wiąże zmienne x oraz y , a w drugim – zmienną z . Jeśli zmienne występujące w formule są związane różnymi kwantyfikatorami, to symbole kwantyfikatorów i związanych przez nie zmiennych będą wpisywane w jednym nawiasie poprzedzającym daną formułę, np. $(\wedge x, y \vee z) \dots$, co będzie odczytywane: *dla każdego x i y istnieje z takie, że ...*

Zmienne wypisane w nawiasie bezpośrednio po kwantyfikatorze są objęte tym kwantyfikatorem, czyli są przez kwantyfikator związane w miejscach należących do zasięgu kwantyfikatora, tj. w wyrażeniu następującym po kwantyfikatorze albo w jego części. Zasięg kwantyfikatora musi być jednoznacznie wskazany w zapisie formuły. Dlatego są potrzebne umowy notacyjne co do zaznaczania zasięgu kwantyfikatorów, zwłaszcza gdy zasięg jest częścią właściwą wyrażenia, które następuje po kwantyfikatorze. Rezygnując z innych umów upraszczających takie napisy (np. że kwantyfikatory wiążą mocniej niż spójniki prawdziwościowe KRZ), przyjmijmy, że do zaznaczania zasięgu będą używane wyłącznie nawiasy kwadratowe, a przy tym nie trzeba zaznaczać zasięgu tylko wtedy, gdy bez nawiasów kwadratowych jest on jednoznacznie określony.

1.3 Rachunki predykatów są dzielone ze względu na **(i)** liczbę argumentów związanych przez predykaty, **(ii)** uwzględnione w rachunku stałe logiczne oraz **(iii)** kategorię zmiennych, które są związane kwantyfikatorami. Jak widać, kryterium pierwsze i trzecie dotyczą rodzaju predykatów stosowanych w danym rachunku: rodzaju ze względu na liczbę argumentów

oraz rodzaju ze względu na rząd predykatów, który jest wyznaczony przez kategorię zmiennych wiązanych kwantyfikatorami.

Ad. (i). Jeśli chodzi o liczbę argumentów wiązanych przez predykat, to w jednoargumentowych rachunkach predykatów uwzględnia się tylko orzeczniki o jednym argumencie (*x jest studentem, y jest liczbą pierwszą*), w rachunkach wieloargumentowych pojawiają się predykaty oznaczające relacje dwuczłonowe (*x jest większy niż y, y jest starszy niż x*), trójczłonowe (*x leży między y a z*) itd. Podstawowe wyrażenia rachunków jednoargumentowych mają postać $P(x)$, gdzie P reprezentuje predykaty jednoargumentowe, a x jest zmienną indywidualową, za którą można podstawiać jednostkowe nazwy. W podstawowych formułach rachunków wieloargumentowych może być więcej zmiennych indywidualowych, np. $P(x, y), Q(x, y, z), R(x, y, z, t), S(x_i), i = 1, 2, \dots, n$.

Ad. (ii). Obok stałych logicznych przejętych z rachunku zdań (ogólnie: klasycznego bądź nieklasycznego) stałymi specyficznymi każdego rachunku predykatów są kwantyfikatory, a ponadto mogą być dołączane inne stałe (np. znaki identyczności, deskrypcji, abstrakcji) wprowadzane jako pierwotne, tj. do słownika, bądź definiowane za pomocą funktorów KRZ i kwantyfikatorów. Na przykład dołączając znak identyczności (abstrakcji, deskrypcji), otrzymuje się tzw. rachunek predykatów z identycznością (znakiem abstrakcji, deskrypcji).

Ad. (iii). W rachunku predykatów pierwszego rzędu kwantyfikatory wiążą jedynie zmienne indywidualowe, np. $(\forall x) \dots, (\exists z) \dots$. Natomiast w rachunkach rzędów wyższych są również wiązane zmienne predykato-
we, np. $(\forall P) \dots, (\exists Q) \dots$, a rząd rachunku zależy od tego, czy predykaty związane kwantyfikatorami są orzekane o indywidualach (rachunek predykatów rzędu drugiego), o zbiorach indywidualów (rząd trzeci), klasach zbiorów (czwarty) itd. Na przykład formuła $(\forall P) [x = y \Rightarrow (P(x) \Leftrightarrow P(y))]$ należy do rachunku predykatów drugiego rzędu – o ile wiadomo, co warto ponownie podkreślić, że za x i y można podstawiać nazwy indywidualów – wyrażeniem trzeciego rzędu jest np. $(\forall Q) [(\forall x) (S(x) \Leftrightarrow P(x)) \Rightarrow (Q(S) \Leftrightarrow Q(P))]$ itd. Rachunek predykatów o nieskończonej liczbie rzędów jest zwany rachunkiem rzędu ω .

Określone wyżej własności rachunków mogą być łączone, np. jednoargumentowy rachunek predykatów pierwszego rzędu (zwany też jednoargumentowym węższym rachunkiem funkcyjnym), wieloargumentowy rachunek predykatów pierwszego rzędu, rachunek predykatów pierwszego rzędu z identycznością.

1.4 Dla wyrażeń rachunku predykatów nie ma uniwersalnej metody sprawdzania ich tautologiczności, analogicznej do metody zero-jedynkowej dla wyrażeń KRZ; rozstrzygalne są tylko pewne typy wyrażeń, czyli pewne fragmenty rachunków predykatów. Dlatego rachunki predykatów są budowane metodą dowodową – założeniową lub aksjomatyczną.

2. Klasyczny rachunek predykatów

Rachunkiem predykatów klasycznym jest nazywany każdy system nadbudowany nad klasycznym rachunkiem zdań. Rozumiany wężziej klasyczny rachunek predykatów to – podstawowy również w niniejszej prezentacji – tzw. węższy rachunek predykatów (WRP), czyli wsparty na KRZ rachunek predykatów pierwszego rzędu. Po prezentacji systemu WRP są w końcowej części tego podrozdziału udowodnione podstawowe twierdzenia, w których jest użyte pojęcie identyczności (WRP z identycznością).

2.1 Węższy rachunek predykatów (WRP)

Węższy rachunek predykatów jest ograniczony do predykatów pierwszego rzędu, tj. orzekanych o indywidualach, o dowolnej liczbie argumentów, a jego stałymi logicznymi swoistymi, tj. nie licząc stałych przejętych z KRZ, są wyłącznie kwantyfikatory, które wiążą wyłącznie zmienne indywidualowe. Po charakterystyce języka WRP jest w części 2.1.2 rozwinięty założeniowy system tego rachunku: jego reguły i definicje wyjściowe, a następnie dowody wybranych tez.

2.1.1 Słownik, składnia i formuły WRP

a) Ponieważ dowolny rachunek predykatów jest oparty na KRZ, dlatego w słowniku WRP występują wszystkie symbole klasycznego rachunku zdań, a ponadto:

(i) symbole stałych specyficznych dla rachunku predykatów, tj. symbole kwantyfikatorów: ogólnego \wedge oraz szczegółowego \vee ;

(ii) symbole nazwowe:

- symbole zmienne, zwane zmiennymi indywidualnymi, tj. reprezentujące nazwy jednostkowe: $x, y, z, \dots, x_1, \dots$;
- stałe (tylko w wierszach dowodów) oznaczające indywidua: $a, b, \dots, a_1, a_2, \dots, a_{x_1}$;

(iii) symbole reprezentujące predykaty pierwszego rzędu, tj. zmienne predykatowe:

- jednoargumentowe: $A, B, C, \dots, A_1, \dots$;
- wieloargumentowe: $P, Q, R, S, \dots, P_1, \dots$.

Tak samo jak w KRZ przyjmujemy, że: symboli zmiennych (tu – nazwowych) jest nieskończenie (lecz – przeliczalnie) wiele, zbiór symboli nazwowych stałych może być skończony (a nawet pusty, co znaczy, że nie ma ich w języku), natomiast zbiór symboli predykatów jest niepusty.

Z kolei w metajęzyku WRP są używane:

- zmienne $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ – reprezentujące symbole nazw jednostkowych, czyli reprezentujące zmienne indywidualne;
- zmienne $\Phi, \Psi, X, \dots, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ – reprezentujące dowolne wyrażenia zdaniowe WRP.

W metajęzyku mogą być również używane – tak samo jak w metajęzyku KRZ – cudzysłowowe nazwy jednostkowe dowolnych formuł WRP oraz quasi-cudzysłowowe nazwy ogólne formuł zdaniowych, oznaczające formuły o wskazanej nazwą cudzysłowową budowie, tj. formuły podpadające pod schemat napisu ujętego (znajdującego się pomiędzy znakami ' oraz '.

b) Jeśli chodzi o składnię, to można powiedzieć, że do wyrażeń (formuł) WRP należą wszystkie i tylko:

- tzw. formuły elementarne (atomiczne), tj. napisy złożone z predykatu i następujących po nim zmiennych reprezentujących argumenty tego predykatu, np. $P(x), Q(x, y, z)$; ogólnie – wyrażenia postaci: $P(x_1, \dots, x_n)$, gdzie P jest n -argumentowym predykatem 1-rzędu;
- wyrażenia otrzymane w wyniku łączenia formuł WRP spójnikami KRZ, co znaczy, że wyrażeniami WRP są formuły $\sim(\Phi), (\Phi) \wedge (\Psi), (\Phi) \vee (\Psi), (\Phi) \underline{\vee} (\Psi), (\Phi) \Rightarrow (\Psi)$ itd., w których Φ oraz Ψ są formułami tego rachunku;
- wyrażenie otrzymane w wyniku związania kwantyfikatorem co najmniej jednej zmiennej występującej w danej formule WRP, np. wyrażenie $(\wedge x) [Q(x, y, z)]$ otrzymane z $Q(x, y, z)$; ogólniej: jeśli

Φ jest wyrażeniem WRP, a α jest zmienną indywidualową występującą w Φ , to do wyrażeń tego rachunku należą także $(\wedge \alpha) \Phi$ oraz $(\vee \alpha) \Phi$.

Stosując te reguły składni, da się rozstrzygnąć, że nie są formułami WRP na przykład napisy:

$$(\wedge x) \Rightarrow (\vee y) P(x, y) \text{ oraz } (\vee x) P(x) \vee Q(x).$$

Poprzednik tej implikacji nie jest formułą WRP, natomiast drugie wyrażenie nie jest – o ile nie przyjmie się dodatkowych umów – jednoznaczne, można je bowiem odczytać jako $(\vee x) [P(x)] \vee Q(x)$ albo też $(\vee x) [P(x) \vee Q(x)]$. Tak jak w innych rachunkach dla usunięcia wieloznaczności są tu używane wyłącznie nawiasy (każde z ostatnich dwóch wyrażeń jest formułą WRP), z których można w zapisie formuł zrezygnować tylko wtedy, gdy i bez nich wyrażenie jest jednoznaczne.

W kontekście funkcji zdaniowych była już mowa o zmiennych wolnych i związanych kwantyfikatorem (*RIII.4), tu warto dodać, że występująca w formule WRP zmienna może być związana w pewnych miejscach swojego w niej występowania, a w pozostałych miejscach może być zmienną wolną. Na przykład w wyrażeniu:

$$((\wedge x \vee y) [P(x, y)] \wedge Q(x)) \Rightarrow (Q(y) \wedge (\vee y) R(y))$$

zmienna x jest związana na pierwszym miejscu, wolna na miejscu drugim, a zmienna y jest związana na miejscu pierwszym, wolna na drugim i związana na miejscu trzecim. Dlatego tak ważne jest zaznaczanie zasięgu kwantyfikatora, tj. tego fragmentu wyrażenia, który jest objęty jego „działaniem”, fragmentu, w którym zmienne wyliczone po znaku kwantyfikatora są związane.

c) O zmiennej występującej w wyrażeniu Φ mówimy, że jest w tym wyrażeniu wolna wtedy i tylko, gdy jest wolna w jakimś (co najmniej jednym) miejscu swojego występowania w Φ ; w przeciwnym razie, tj. gdy zmienna jest związana w każdym miejscu swojego występowania w Φ , mówimy, że jest w tym wyrażeniu związana.

Formuły, których wszystkie zmienne są w tym mocniejszym sensie związane, tj. związane w każdym miejscu swojego występowania, to tzw. formuły zamknięte, czyli zdania WRP. Pozostałe formuły, zwane otwartymi, należą do funkcji zdaniowych, czyli zawierających zmienne wolne schematów zdań, które są przekształcane w zdania w wyniku wyeliminowania zmiennych wolnych, a można to zrobić, podstawiając zamiast zmiennej stałą, tj. nazwę przedmiotu z zakresu danej zmiennej,

lub wiążąc zmienną kwantyfikatorem (oba te sposoby można stosować w jednej funkcji – zob. *RIII.4).

Zdania (formuły zamknięte) sformułowane w symbolicznym języku WRP mogą być przekształcane w zdania języka naturalnego w wyniku interpretacji, tj. podstawienia stałych za występujące w formule zmienne predykatowe, tj. konkretnych orzeczników. Na przykład interpretując formułę $(\forall x) [P(x) \wedge \sim Q(x)]$ w sposób *P/logik* (dokładniej: *jest logikiem*), *Q/rozsądny* otrzymuje się (po odpowiednich poprawkach językowych) zdanie *Niektórzy logicy nie są rozsądni*. Da się również budować formuły WRP, które są schematami zdań języka naturalnego, choć czasami może to prowadzić do napisów o wiele bardziej złożonych niż ich naturalne odpowiedniki. W schemacie takim trzeba uwzględnić wszystkie predykaty, spójniki i kwantyfikatory użyte, nie zawsze wprost, w wypowiedzi języka naturalnego. Na przykład schematem zdania *Każdy student zdał jakiś egzamin* jest formuła $(\forall x) [S(x) \Rightarrow (\exists y) [E(y) \wedge Z(x, y)]]$; schemat ten odczytujemy: dla każdego x , jeżeli x jest studentem, to istnieje y takie, że y jest egzaminem i x zdał y . Z kolei zdanie *Niektórzy narciarze lubią tylko twarde stoki* jest w logice predykatów reprezentowane formułą: $(\forall x) [N(x) \wedge (\forall y) [(S(y) \wedge (L(x, y) \Rightarrow T(y)))]$, tj. istnieje x takie, że x jest narciarzem i dla każdego y , jeśli y jest stokiem i x lubi y , to y jest twardy.

Analiza schematów zdań języka naturalnego, schematów sformułowanych w rachunku predykatów, ułatwia wykrycie ich wieloznaczności, a sprawdzenie schematów wnioskowań – wykrycie ich wadliwości bądź potwierdzenie poprawności logicznej. Na przykład zdanie: *Wszyscy ludzie nie są lubiani* można rozumieć zgodnie ze schematem $(\forall x) [C(x) \Rightarrow \sim L(x)]$, czyli w znaczeniu *Każdy człowiek nie jest lubiany (jest nielubiany)* albo też według formuły $\sim(\forall x) [C(x) \Rightarrow L(x)]$, a więc w sensie *Nieprawda, że każdy człowiek jest lubiany*, tzn. *Są tacy, którzy nie są lubiani*.

Niektóre formuły WRP mają tę własność, że dowolna ich interpretacja przekształca je w zdania prawdziwe. Formuły takie nazywamy prawami WRP. Prawami są np. formuły:

$$(\forall x) \sim P(x) \Rightarrow \sim(\exists x) P(x)$$

$$(\exists x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow \sim(\forall x) [P(x) \wedge \sim Q(x)]$$

$$(\forall x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow ((\forall x) P(x) \Rightarrow (\forall x) Q(x))$$

$$(\forall x, y) [Q(x, y) \Rightarrow P(x)] \Rightarrow ((\forall x, y) Q(x, y) \Rightarrow (\forall x) P(x))$$

$$(\exists x) [P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow ((\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)).$$

Z pierwszej z tych formuł – odczytywanej: jeżeli istnieje x takie, że nie p od x , to nieprawda, że dla każdego x p od x – można otrzymać, podstawiając za zmienną P konkretny predykat, takie np. zdania: *Jeżeli ktoś jest nieuczciwy, to nie każdy jest uczciwy; Jeśli coś nie jest interesujące, to nie wszystko jest interesujące* itd. Drugą formułę – jeśli dla dowolnego x jest tak, że jeśli P od x , to Q od x , to nieprawda, że istnieje x takie, by P od x i nie Q od x – można zamienić w zdanie prawdziwe, podstawiając np. *Ponieważ jeśli coś jest czerwone, to jest kolorowe, więc nie ma czegoś, co byłoby czerwone, a nie było kolorowe*. Podstawiając te same predykaty w formule trzeciej (Jeśli dla każdego x jest tak, że o ile P od x , to Q od x , to jeśli istnieje x takie, że P od x , to istnieje też x takie, że Q od x) otrzymujemy zdanie: *Ponieważ jeśli coś jest czerwone, to jest kolorowe, więc jeśli istnieje coś czerwonego, to istnieje coś kolorowego*. Formułę czwartą (Jeśli dla dowolnych x oraz y jest tak, że o ile Q od x , y to P od x , to jeśli istnieją x oraz y takie, że Q od x , y , to istnieje x , takie że P od x) można skonkretyzować np. zdaniem: *Ponieważ jeśli ktoś jest czyimś ojcem, to jest mężczyzną, więc jeśli istnieje ktoś, kto jest ojcem kogoś, to istnieje mężczyzna*. Podstawieniem formuły ostatniej (Jeżeli dla każdego x P od x i Q od x , to dla każdego x P od x oraz dla każdego x Q od x) jest np. *Jeśli każda bombka jest kulista i kolorowa, to każda bombka jest kulista i każda bombka jest kolorowa* (podstawienie to zawęża zakres zmiennej x).

2.1.2 Założeniowy system WRP

Zostaną najpierw sformułowane reguły pierwotne – dowodzenia oraz dołączania nowych wierszy do dowodu – uzupełnione specyficznymi definicjami przyjmowanymi u podstaw budowania systemu WRP, a następnie są w nim dowodzone wybrane tezy³.

³ Prezentowany tu system WRP – podobnie jak założeniowy system KRZ – jest oparty na opracowanym przez Słupeckiego i Borkowskiego (zob. J. Słupecki, L. Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, dz. cyt.; L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt.). Modyfikacje systemu oryginalnego polegają na ulepszeniach symbolicznego zapisu, innym doborze i układzie tez oraz na uproszczeniu niektórych dowodów.

2.1.2.1 Reguły i definicje wyjściowe

W punkcie wyjścia systemu są przyjęte:

- (i) reguły systemu założeniowego KRZ – reguły dołączania wierszy do dowodu i budowania dowodów, zarówno reguły pierwotne, jak i wtórne – rozszerzone (wzmocnione) na wyrażenia WRP;
- (ii) reguły pierwotne dołączania i opuszczania kwantyfikatorów;
- (iii) definicje tzw. kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie⁴.

Ad. (i) Wzmocnienie reguł systemu założeniowego KRZ polega na dołączeniu wyrażeń WRP do zakresu zmiennych metajęzykowych Φ, Ψ, \dots , występujących w schematach lub opisach reguł. Na przykład korzystając z tak rozumianej reguły odrywania (pierwotnej w systemie założeniowym KRZ), można na podstawie implikacji

$$(\Lambda x) [P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow \sim(\vee x) [P(x) \wedge \sim Q(x)] \text{ oraz jej poprzednika } (\Lambda x) [P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

uznać następnik $\sim(\vee x) [P(x) \wedge \sim Q(x)]$;

albo – korzystając kolejno z w tym sensie wzmocnionych reguł **DA**, **NK** i **TOL** – uznać negację $\sim(\Lambda x) [P(x) \wedge Q(x)]$ na podstawie wyrażenia $\sim(\Lambda x) P(x)$ i tezy $(\Lambda x) [P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow ((\Lambda x) P(x) \wedge (\Lambda x) Q(x))$.

Ad. (ii) Do sformułowania reguł dołączania i opuszczania kwantyfikatorów niezbędne jest właściwe dla rachunku predykatów pojęcie wyrażenia uzyskanego wskutek prawidłowego podstawienia. Otóż jeśli Φ jest wyrażeniem rachunku predykatów, to $\Phi(\alpha/\beta)$ jest wynikiem prawidłowego podstawienia *wtw*:

(1a) α jest zmienną wolną w wyrażeniu Φ ;

(1b) β jest wyrażeniem tej samej kategorii składniowej co α (wyrażenie podstawiane β może być złożone);

(1c) podstawienia α/β dokonano w każdym miejscu, w którym α występuje jako zmienna wolna w wyrażeniu Φ ;

⁴ Na marginesie warto zauważyć, że różnica między założeniowymi i aksjomatycznymi systemami rachunku predykatów jest pochodną różnicy między systemami dedukcyjnymi KRZ budowanymi założeniowo albo aksjomatycznie. Mianowicie u podstaw aksjomatycznego systemu rachunku predykatów można przyjąć wybraną aksjomatykę KRZ rozszerzoną na formuły rachunku predykatów, a reguły wyprowadzania wzmocnić specyficznymi dla wyrażeń z kwantyfikatorami (zob. J. Słupecki, L. Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 96–98). Najprostszym sposobem nawiązania do aksjomatyki KRZ jest uznanie za aksjomaty rachunku predykatów podstawień wszystkich tez zakładanego systemu KRZ – zob. np. T. Batóg, *Podstawy logiki*, dz. cyt., s. 112–118.

(2) żadna zmienna wolna wyrażenia β nie staje się w wyniku podstawienia związana w wyrażeniu $\Phi(\alpha/\beta)$.

Jeśli nie jest spełniony warunek (1a) powyższej definicji, to wyrażenie $\Phi(\alpha/\beta)$ jest identyczne z Φ , np.: $(\forall x) x > y (x/y + 1) = (\forall x) x > y$. Z Φ jest również identyczny wynik prawidłowego podstawienia $\Phi(\alpha/\alpha)$. Jeśli natomiast nie jest spełniony któryś z warunków (1b)–(2), to symbol $\Phi(\alpha/\beta)$ nie oznacza żadnego wyrażenia. Jest tak dla (nieprawidłowego) podstawienia według schematu $(\forall x) x > y (y/x + 1)$, którego wynikiem jest napis $(\forall x) [x > x + 1]$; podstawienie to nie spełnia warunku 2, zmienna x , która jest wolna w wyrażeniu $x + 1$, po podstawieniu, tj. w wyrażeniu $(\forall x) [x > x + 1]$, staje się zmienną związaną.

Pojęcie prawidłowego podstawienia daje podstawę dla sformułowania reguł dołączania i opuszczania kwantyfikatorów.

Reguła opuszczania kwantyfikatora ogólnego

$$\text{O}\Lambda \quad \frac{(\Lambda \alpha) \Phi}{\Phi(\alpha/\beta)}$$

Widoczne w tym schemacie wyrażenie $\Phi(\alpha/\beta)$ jest wynikiem prawidłowego podstawienia za zmienną wolną α występującą w Φ . Oto przykłady zastosowania tej reguły:

$(\Lambda x) A(x)$	$(\Lambda x) A(x)$	$(\Lambda x) A(x)$	$(\Lambda x) x R y$	$(\Lambda x) x R y$	$(\Lambda x) [A(x) \vee \sim A(x)]$
$A(x)$	$A(y)$	$A(a)$	$x R y$	$y R y$	$A(x) \vee \sim A(x)$

Jak widać, reguła ta obejmuje również przypadki wnioskowań od $(\Lambda \alpha) \Phi$ do wyrażenia Φ (przykłady w kolumnach pierwszej, czwartej i piątej), jako że prawidłowe podstawienie $\Phi(\alpha/\alpha)$ jest identyczne z Φ .

Reguła dołączania kwantyfikatora ogólnego

$$\text{D}\Lambda \quad \frac{\Phi}{(\Lambda \alpha) \Phi}$$

Bez ograniczeń wolno stosować tę regułę tylko do tez rachunku predykatów, np. od wyrażenia $x \cdot 1 = x$ można przejść do $(\Lambda x) x \cdot 1 = x$. Natomiast w przypadku wyrażeń pojawiających się w wierszach dowodów, a niebędących tezami, kwantyfikator ogólny wiążący zmienną α można dołączyć,

tylko gdy α nie jest zmienną wolną w założeniach dowodu (także – w założeniach dodatkowych). Jeśli bowiem α jest w założeniach wolna, to nie jest dowolna, jako że jej zakres jest ograniczony zgodnie z formułą, w której zmienna ta występuje w założeniach. Na przykład od przyjętego w założeniu warunku $x < 0$ nie można przejść do twierdzenia: $(\wedge x) x < 0$.

Reguła dołączania kwantyfikatora szczegółowego

$$\mathbf{DV} \quad \frac{\Phi(\alpha/\beta)}{(\forall \alpha) \Phi}$$

Nie ma szczególnych ograniczeń związanych ze stosowaniem tej reguły, nie licząc wymagań związanych z prawidłowym podstawianiem: wyrażenie $\Phi(\alpha/\beta)$ jest wynikiem prawidłowego podstawienia za zmienną α w wyrażeniu Φ . Oto przykłady zastosowania tej reguły.

$A(a)$	$A(y)$	$A(x)$	$y R y$	$2 \in \mathcal{N}$
$(\forall x) A(x)$	$(\forall x) A(x)$	$(\forall x) A(x)$	$(\forall x) x R x$	$(\forall x) x \in \mathcal{N}$

Tak jak w przypadku reguły **OL** i tą regułą są objęte sytuacje (przykład w kolumnie trzeciej), w których od wyrażenia Φ przechodzi się do $(\forall \alpha) \Phi$: prawidłowe podstawienie $\Phi(\alpha/\alpha)$ jest identyczne z Φ , teraz jednak – przeciwnie niż w przypadku reguły **OL** – kierunek podstawiania jest przeciwny do kierunku wnioskowania.

Reguła opuszczania kwantyfikatora szczegółowego

W dowodach są stosowane dwie odmiany tej reguły – z wprowadzaniem symboli stałych oraz bez ich wprowadzania. Dowody z wprowadzaniem stałych są bardziej intuicyjne, choć dowody niektórych wyrażen (np. tez sformułowanych metasystemowo) są prostsze, gdy stosuje się sposób bez wprowadzania stałych.

– z wprowadzaniem stałych

$$\mathbf{OV} \quad \frac{(\forall \alpha) \Phi}{\Phi(\alpha/\tau_{\beta_1}, \dots, \beta_n)}$$

W schemacie tym β_1, \dots, β_n to zmienne wolne wyrażenia Φ różne od α .

– Jeśli $n \geq 1$, to τ jest funktorem nazwotwórczym argumentów nazwowych β_1, \dots, β_n , a $\tau_{\beta_1, \dots, \beta_n}$ jest nazwą jednostkową przedmiotu (zależnego od β_1, \dots, β_n) spełniającego Φ ;

– Jeśli $n = 0$, to schemat **OV** upraszcza się do:

$$\frac{(\forall \alpha) \Phi}{\Phi(\alpha/\tau)}$$

gdzie τ jest nazwą jednostkową oznaczającą przedmiot spełniający Φ .

Konieczne jest przy tym, by w każdym stosowaniu reguły **OV** w tym samym dowodzie stosować nowy symbol stałej ($a_1, a_2 \dots$; albo a, b, \dots).

$(\forall y) x < y < z$	$(\forall y) 2 < y < z$	$(\forall y) 2 < y < 5$	$(\forall x, y) x < y < z$
$x < a_{x,z} < z$	$2 < a_z < z$	$2 < a < 5$	$a_z < b_z < z$

Pierwsze trzy kolumny mają ilustrować malejącą zależność wprowadzanej stałej od pozostałych zmiennych ($n = 2, 1, 0$), a kolumna ostatnia – konieczność wprowadzania odrębnych symboli stałych w każdorazowym stosowaniu reguły **OV**.

– **bez wprowadzania stałych**

Aby zastosować do wyrażenia $(\forall \alpha) \Phi$ regułę **OV** bez wprowadzania stałych indywidualnych, potrzebne w dowodzie wyrażenie Ψ – czyli odpowiednik $\Phi(\alpha/\tau)$ z wersji ze zmiennymi – uzyskuje się, wychodząc od założenia dodatkowego Φ .

$$\text{OV} \quad \frac{(\forall \alpha) \Phi}{\Phi \Rightarrow \Psi}$$

Tę odmianę reguły **OV** wolno stosować, o ile zmienna α nie jest wolna ani w założeniach dowodu, ani w wyrażeniu Ψ .

Ad. (iii) Pojęcie kwantyfikatora o ograniczonym zakresie jest określone w następujących definicjach (w alternatywnych jest użyty metajęzykowy znak równości definicyjnej).

D1.a $(\wedge \Phi(\alpha)) \Psi \Leftrightarrow (\wedge \alpha) [\Phi(\alpha) \Rightarrow \Psi]$
 albo $(\wedge \Phi(\alpha)) \Psi =_{\text{df}} (\wedge \alpha) [\Phi(\alpha) \Rightarrow \Psi]$;

D1.b $(\vee \Phi(\alpha)) \Psi \Leftrightarrow (\vee \alpha) [\Phi(\alpha) \wedge \Psi]$
 albo $(\vee \Phi(\alpha)) \Psi =_{\text{df}} (\vee \alpha) [\Phi(\alpha) \wedge \Psi]$.

Sens tych definicji sformułowanych w języku symbolicznym łatwo jest oddać także w języku naturalnym: kwantyfikatory takie różnią się od zwykłych tym, że prawdziwość ogłoszona w wyrażeniu poprzedzonym takim kwantyfikatorem obowiązuje w zakresie zawężonym formułą Φ , czyli dotyczy tych tylko indywiduów, które spełniają warunek Φ .

Oto przykłady zastosowania tych definicji (będą oznaczane także jako **df** Λ_{ogr} i **df** \forall_{ogr}).

$$(\wedge x > 0) |x| = x \Leftrightarrow (\wedge x) [x > 0 \Rightarrow |x| = x];$$

$$(\forall x \neq 0) a \cdot x = a \Leftrightarrow (\forall x) [x \neq 0 \wedge a \cdot x = a];$$

$$\text{Jeżeli } y \neq 0, \text{ to } \frac{x}{y} = z \Leftrightarrow x = y \cdot z \Leftrightarrow (\wedge y \neq 0) \left[\frac{x}{y} = z \Leftrightarrow x = y \cdot z \right].$$

2.1.2.2 Tezy WRP

W dowodach tez są stosowane takie same jak w KRZ umowy dodatkowe, wedle analogicznych kryteriów dowodzone wyrażenia są także dobrane, uporządkowane i pogrupowane (**RI.3).

$$\mathbf{T1} \quad (\wedge x) A(x) \Rightarrow A(y).$$

Dowód:

$$\begin{array}{ll} 1. & (\wedge x) A(x) & \{\text{zał.}\} \\ & A(y) & \{\mathbf{OA}: 1\}. \end{array}$$

$$\mathbf{T2} \quad A(y) \Rightarrow (\forall x) A(x).$$

Dowód:

$$\begin{array}{ll} 1. & A(y) & \{\text{zał.}\} \\ & (\forall x) A(x) & \{\mathbf{DV}: 1\}. \end{array}$$

W dowodach formuł WRP dogodnie jest korzystać z metajęzykowych odpowiedników tez **T1** oraz **T2** (dowody tych metatez są analogiczne do dowodów **T1** i **T2**):

$$\mathbf{MT1} \quad \vdash (\wedge \alpha) \Phi \Rightarrow \Phi(\alpha/\beta);$$

$$\mathbf{MT2} \quad \vdash \Phi(\alpha/\beta) \Rightarrow (\forall \alpha) \Phi.$$

Zgodnie z **M1** oraz z **M2** tezą WRP jest każde formuła tego rachunku równokształtna z, odpowiednio, $(\wedge \alpha) \Phi \Rightarrow \Phi(\alpha/\beta)$ oraz $\Phi(\alpha/\beta) \Rightarrow (\forall \alpha) \Phi$.

T3 $\sim(\wedge x) A(x) \Leftrightarrow (\vee x) \sim A(x)$.

Dowód:

Oba dowody, zarówno implikacji prostej \Rightarrow , jak i odwrotnej \Leftarrow , są nie-wprost.

\Rightarrow

- | | |
|---|-------------|
| 1. $\sim(\wedge x) A(x)$ | {zał.} |
| 2. $\sim(\vee x) \sim A(x)$ | {zdn.} |
| 3. $\sim A(x) \Rightarrow (\vee x) \sim A(x)$ | {MT2} |
| 4. $A(x)$ | {TOL: 3, 2} |
| 5. $(\wedge x) A(x)$ | {DL: 4} |

Sprz.: 1, 5.

Reguła dołączenia kwantyfikatora ogólnego jest w wierszu 5. zastosowana poprawnie, ponieważ związana nim zmienna x nie jest w założeniach dowodu wolna.

\Leftarrow

- | | |
|-------------------------|---------|
| 1. $(\vee x) \sim A(x)$ | {zał.} |
| 2. $(\wedge x) A(x)$ | {zdn.} |
| 3. $\sim A(a)$ | {OV: 1} |
| 4. $A(a)$ | {OL: 2} |

Sprz.: 3, 4.

Teza **T3** daje podstawę wtórnej regule dołączania nowych wierszy do dowodu, zwanej regułą negowania kwantyfikatora ogólnego, w skrócie $\sim\wedge$:

$$\sim\wedge \quad \frac{\sim(\wedge a) \Phi}{(\vee a) \sim\Phi}$$

T4 $\sim(\vee x) A(x) \Leftrightarrow (\wedge x) \sim A(x)$.

Dowód:

\Rightarrow

- | | |
|-------------------------------------|-------------|
| 1. $\sim(\vee x) A(x)$ | {zał.} |
| 2. $A(x) \Rightarrow (\vee x) A(x)$ | {MT2} |
| 3. $\sim A(x)$ | {TOL: 2, 1} |
| $(\wedge x) \sim A(x)$ | {DL: 3} |

Reguła dołączenia kwantyfikatora ogólnego jest w ostatnim wierszu dowodu zastosowana poprawnie, bo zmienna x nie jest w założeniach dowodu wolna.

\square

- | | |
|---------------------------|---------|
| 1. $(\wedge x) \sim A(x)$ | {zał.} |
| 2. $(\vee x) A(x)$ | {zdn.} |
| 3. $A(a)$ | {OV: 2} |
| 4. $\sim A(a)$ | {OΛ: 1} |

Sprz.: 3, 4.

Na tezie **T4** jest oparta reguła wtórna negowania kwantyfikatora szczegółowego:

$$\sim V \quad \frac{\sim(V a) \Phi}{(\wedge a) \sim \Phi}$$

Uogólnieniem reguł $\sim \Lambda$ i $\sim V$ jest tzw. reguła negowania wyrażeń z układem kwantyfikatorów, która będzie oznaczana skrótem $\sim \Lambda V$. Pod regułę tę podpadają m.in. następujące dwa schematy wnioskowań do nowego wiersza dowodu:

$$\frac{\sim(\wedge \alpha_1)(\vee \alpha_2)(\wedge \alpha_3) \dots (K \alpha_k) \Phi}{(\vee \alpha_1)(\wedge \alpha_2)(\vee \alpha_3) \dots (K' \alpha_k) \sim \Phi} \quad \frac{\sim(\vee \alpha_1)(\wedge \alpha_2)(\vee \alpha_3) \dots (K \alpha_k) \Phi}{(\wedge \alpha_1)(\vee \alpha_2)(\wedge \alpha_3) \dots (K' \alpha_k) \sim \Phi}$$

W schematach tych K oraz K' są zmiennymi kwantyfikatorowymi, za które można podstawiać symbole \wedge oraz \vee , a przy: tym jeśli k jest liczbą nieparzystą, to za zmienne K oraz K' trzeba podstawić symbol kwantyfikatora wiążącego zmienną α_1 w tym szeregu, w którym występuje dana zmienna kwantyfikatorowa (K występuje w szeregu nad kreską, K' jest w szeregu dolnym); natomiast jeśli k jest liczbą parzystą, to za obie te zmienne jest podstawiany symbol kwantyfikatora, który w odpowiednim szeregu wiąże zmienną α_2 .

W zakresie stosowania tych dwóch schematów wnioskowań są na przykład wszystkie równoważności o budowie:

$$\begin{aligned} \sim(\wedge x)(\vee y)(\wedge z) \Phi &\Leftrightarrow (\vee x)(\wedge y)(\vee z) \sim \Phi, \\ \sim(\vee x)(\wedge y) \Phi &\Leftrightarrow (\wedge x)(\vee y) \sim \Phi. \end{aligned}$$

Reguła $\sim \Lambda V$ dotyczy jednak sytuacji negowania formuł WRP rozpoczynających się od dowolnego układu kwantyfikatorów, tj. nie tylko takiego, że kwantyfikatory \wedge oraz \vee występują naprzemiennie. Jeśli \mathbf{K} jest ciągiem K_1, K_2, \dots, K_k kwantyfikatorów poprzedzających formę zdaniową Φ , w którym K_1 jest kwantyfikatorem, ogólnym albo szczegółowym, wiążącym zmienną α_1 , tj. reprezentuje napis $(\wedge \alpha_1)$ albo $(\vee \alpha_1)$, K_2 wiąże zmienną α_2 itd., to odpowiednikiem tego układu kwantyfikatorów uzyskanym w wyniku negacji jest ciąg kwantyfikatorów \mathbf{K}' , w którym kolejne

kwantyfikatory wiążą te same zmienne, co odpowiadające im kwantyfikatory z **K**, lecz z ogólnych są zamieniane na szczegółowe i odwrotnie.

Korzystając z tych skrótów notacyjnych można stwierdzić, że:

$$\mathbf{MMT1} \quad \vdash \sim(\mathbf{K}) \Phi \Leftrightarrow \mathbf{K}' \sim \Phi.$$

Twierdzenie to daje podstawy do uznania takich np. metajęzykowych równoważności:

$$\sim(\wedge \alpha_1)(\wedge \alpha_2)(\vee \alpha_3) \Phi \Leftrightarrow (\vee \alpha_1)(\vee \alpha_2)(\wedge \alpha_3) \sim \Phi;$$

$$\sim(\vee \alpha_1)(\wedge \alpha_2)(\wedge \alpha_3)(\vee \alpha_4) \Phi \Leftrightarrow (\wedge \alpha_1)(\vee \alpha_2)(\vee \alpha_3)(\wedge \alpha_4) \sim \Phi.$$

Pod pierwszą z tych równoważności podpada między innymi zapisana w języku przedmiotowym WRP równoważność $\sim(\wedge x)(\wedge y)(\vee z) \Phi \Leftrightarrow (\vee x)(\vee y)(\wedge z) \sim \Phi$ oraz każda z jej interpretacji (konkretyzacji), na przykład interpretacji Φ (zakresem zmiennych x, y, z jest zbiór liczb rzeczywistych) takiej: $\sim(\wedge x)(\wedge y)(\vee z) x = y \cdot z \Leftrightarrow (\vee x)(\vee y)(\wedge z) x \neq y \cdot z$.

Kolejną grupę tez WRP można nazwać ogólnie prawami rozkładania kwantyfikatorów na argumenty spójników prawdziwościowych (człony koniunkcji, alternatywy, implikacji itd.) oraz wyciągania kwantyfikatorów z członów wyrażeń złożonych przed takie wyrażenia. Prawa tej grupy są też nazywane – prościej, lecz nie tak dokładnie – prawami rozkładu kwantyfikatora.

$$\mathbf{T5} \quad (\wedge x) [A(x) \wedge B(x)] \Leftrightarrow ((\wedge x) A(x) \wedge (\wedge x) B(x)).$$

Dowód:

□

- | | |
|--|----------------------|
| 1. $(\wedge x) [A(x) \wedge B(x)]$ | {zał.} |
| 2. $A(x) \wedge B(x)$ | { OL : 1} |
| 3. $A(x)$ | { OK : 2} |
| 4. $B(x)$ | { OK : 2} |
| 5. $(\wedge x) A(x)$ | { DL : 3} |
| 6. $(\wedge x) B(x)$ | { DL : 4} |
| $(\wedge x) A(x) \wedge (\wedge x) B(x)$ | { DK : 5, 6}. |

Dowód implikacji odwrotnej jest analogiczny (korzysta się w nim z tych samych reguł).

Zgodnie z **T5** kwantyfikator ogólny można rozkładać (implikacja prosta) na człony koniunkcji oraz wyciągać (implikacja odwrotna) przed jej człony – stąd nazwa: prawo rozkładania i wyciągania kwantyfikatora ogólnego na/przed człony koniunkcji. Tak samo nazywa się wtórną regułę

wnioskowania opartą na tej tezie (wtórną ze względu na **T5**), która będzie oznaczana jako $\Lambda\wedge$.

$$\Lambda\wedge \quad \frac{(\wedge \alpha) [\Phi \wedge \Psi]}{(\wedge \alpha) \Phi \wedge (\wedge \alpha) \Psi}$$

T6 $(\wedge x) [A(x) \Rightarrow B(x)] \Rightarrow ((\wedge x) A(x) \Rightarrow (\wedge x) B(x))$.

Dowód:

1. $(\wedge x) [A(x) \Rightarrow B(x)]$ {zał.}
2. $(\wedge x) A(x)$ {zał.}
3. $A(x) \Rightarrow B(x)$ {O \wedge : 1}
4. $A(x)$ {O \wedge : 2}
5. $B(x)$ {RO: 3, 4}
- $(\wedge x) B(x)$ {D \wedge : 5}.

Reguła **D \wedge** jest w ostatnim wierszu dowodu zastosowana poprawnie, ponieważ zmienna x nie jest w założeniach wolna. Zgodnie z **T6** kwantyfikator ogólny można rozłożyć na człony implikacji. Ponieważ jednak implikacja odwrotna nie jest prawdziwa, więc kwantyfikator ten nie może być wyciągany przed człony implikacji. Tak samo będzie nazywana reguła wnioskowania wtórna względem **T6**, skrótowo oznaczana przez $\Lambda|\Rightarrow$.

$$\Lambda|\Rightarrow \quad \frac{(\wedge \alpha) [\Phi \Rightarrow \Psi]}{(\wedge \alpha) \Phi \Rightarrow (\wedge \alpha) \Psi}$$

T7 $(\wedge x) [A(x) \Rightarrow B(x)] \Rightarrow ((\vee x) A(x) \Rightarrow (\vee x) B(x))$.

Dowód:

1. $(\wedge x) [A(x) \Rightarrow B(x)]$ {zał.}
2. $(\vee x) A(x)$ {zał.}
3. $A(a) \Rightarrow B(a)$ {O \wedge : 1}
4. $A(a)$ {O \vee : 2}
5. $B(a)$ {RO: 3, 4}
- $(\vee x) B(x)$ {D \vee : 5}.

Teza **T7** jest zwana prawem rozkładania kwantyfikatora ogólnego na szczegółowy w implikacji. Oparta na tej tezie reguła będzie oznaczana jako $\Lambda|\vee\Rightarrow$.

$$\Lambda|V_{\Rightarrow} \quad \frac{(\wedge \alpha) [\Phi \Rightarrow \Psi] \quad (\vee \alpha) \Phi}{(\vee \alpha) \Psi}$$

Analogiczne do tez **T6** i **T7**, które mówią o prawidłowościach rozkładania kwantyfikatora ogólnego w implikacji, są tezy dotyczące rozkładania tego kwantyfikatora w równoważności.

T8 $(\wedge x) [A(x) \Leftrightarrow B(x)] \Rightarrow ((\wedge x) A(x) \Leftrightarrow (\wedge x) B(x))$.

Dowód:

1. $(\wedge x) [A(x) \Leftrightarrow B(x)]$ {zał.}
2. $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ {**OL**: 1}
 - 1.1 $(\wedge x) A(x)$ {zd.}
 - 1.2 $A(x)$ {**OL**: 1.1}
 - 1.3 $B(x)$ {**RO**_⇔: 2, 1.2}
 - 1.4 $(\wedge x) B(x)$ {**DL**: 1.3}
3. $(\wedge x) A(x) \Rightarrow (\wedge x) B(x)$ {1.1 \Rightarrow 1.4}

Analogicznie, wychodząc od założenia 2.1 $(\wedge x) B(x)$, uzyskuje się implikację odwrotną:

4. $(\wedge x) B(x) \Rightarrow (\wedge x) A(x)$ {2.1 \Rightarrow 2.4}
- $(\wedge x) A(x) \Leftrightarrow (\wedge x) B(x)$ {**DR**: 3, 4}. ■

Dowód kolejnego twierdzenia różni się tym tylko, że korzysta się w nim także z reguły opuszczania i dodawania kwantyfikatora szczegółowego.

T9 $(\wedge x) [A(x) \Leftrightarrow B(x)] \Rightarrow ((\vee x) A(x) \Leftrightarrow (\vee x) B(x))$.

Analogiczne do schematów wnioskowania $\Lambda|\Rightarrow$ oraz $\Lambda|V_{\Rightarrow}$ są także oparte na **T8** i **T9** wtórne reguły dołączania nowych wierszy do dowodu (będą oznaczane jako $\Lambda|\Leftrightarrow$ oraz $\Lambda|V_{\Leftrightarrow}$).

$$\Lambda|\Leftrightarrow \quad \frac{(\wedge \alpha) [\Phi \Leftrightarrow \Psi]}{(\wedge \alpha) \Phi \Leftrightarrow (\wedge \alpha) \Psi} \quad \Lambda|V_{\Leftrightarrow} \quad \frac{(\wedge \alpha) [\Phi \Leftrightarrow \Psi]}{(\vee \alpha) \Psi \Leftrightarrow (\vee \alpha) \Phi}$$

Prawa **T8** i **T9** podpadają pod metatezę głoszącą, że tezą WRP jest każda formuła o następującym, opisanym w metajęzyku kształcie:

MT3 $(\wedge \alpha) [\Phi \Leftrightarrow \Psi] \Rightarrow ((K \alpha) \Phi \Leftrightarrow (K \alpha) \Psi)$.

W metatezie tej K jest zmienną kwantyfikatorową, tj. reprezentuje kwantyfikator ogólny albo szczegółowy.

Metateza **MT3** podpada pod tzw. prawo ekstensjonalności dla kwantyfikatorów. Aby zapisać to prawo w sposób ogólny i skrótowy, przyjmijmy ponownie, że **K** jest ciągiem K_1, K_2, \dots, K_k kwantyfikatorów poprzedzających formę zdaniową, w którym K_1 jest kwantyfikatorem, ogólnym albo szczegółowym, wiążącym zmienną α_1 , tj. reprezentuje napis $(\wedge \alpha_1)$ albo $(\vee \alpha_1)$, kwantyfikator K_2 wiąże zmienną α_2 itd., czyli: dla każdego $1 \leq i \leq k$, K_i jest kwantyfikatorem ogólnym albo szczegółowym wiążącym zmienną α_i . Korzystając z tych skrótów notacyjnych, można napisać:

$$\mathbf{MMT2} \quad \vdash (\wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) [\Phi \Leftrightarrow \Psi] \Rightarrow (\mathbf{K} \Phi \Leftrightarrow \mathbf{K} \Psi).$$

Dowód tej tezy jest indukcyjny ze względu na $1 \leq i \leq k$. Dla $k = 1$ twierdzenie **MMT2** upraszcza się do formuły:

$$(\wedge \alpha_1) [\Phi \Leftrightarrow \Psi] \Rightarrow ((K \alpha_1) \Phi \Leftrightarrow (K \alpha_1) \Psi),$$

której dowód jest oparty na jednokrotnym zastosowaniu **RO** do metatezy **MT3** i poprzednika tej uproszczonej formuły. Pełny dowód wymaga przyjęcia w charakterze założenia dowodzonego twierdzenia ogólnej postaci poprzednika **MMT2** oraz zapisania i udowodnienia warunku indukcyjnego⁵.

Na prawie ekstensjonalności dla kwantyfikatorów oraz prawie ekstensjonalności dla równoważności (regule zastępowania członów równoważnych) jest oparta reguła ekstensjonalności dla kwantyfikatorów.

$$\mathbf{RZ}_{\wedge \Leftrightarrow} \quad \frac{(\wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) [\Phi \Leftrightarrow \Psi] \quad X}{X(\Phi // \Psi)}$$

Zgodnie z tą regułą na podstawie wyrażenia $(\wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) [\Phi \Leftrightarrow \Psi]$, w którym $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są wszystkimi zmiennymi wolnymi wyrażen Φ oraz Ψ – co znaczy, że w Φ oraz Ψ nie ma innych zmiennych wolnych oprócz związanych kwantyfikatorem ogólnym w formule $(\wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) [\Phi \Leftrightarrow \Psi]$ – a także uznanego wyrażenia X można w kolejnym wierszu dowodu uznać wyrażenie $X(\Phi // \Psi)$, tj. wynik prawidłowego zastąpienia w X jednego z członów równoważności $\Phi \Leftrightarrow \Psi$ jej drugim członem. Jak widać, regułę tę można potraktować jako wzmocnienie znanej z KRZ reguły zastępowania członów równoważności (zwanej też regułą ekstensjonalności dla równoważności) – wzmocnienie, tj. uogólnienie na wyrażenia WRP.

⁵ Zob. L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 104–105.

$$\mathbf{RZ}_{\Leftrightarrow} \quad \frac{\Phi \Leftrightarrow \Psi}{X} \\ \frac{\quad}{X(\Phi // \Psi)}$$

T10 $((\wedge x) A(x) \vee (\wedge x) B(x)) \Rightarrow (\wedge x) [A(x) \vee B(x)]$.

Dowód:

- | | |
|---|------------|
| 1. $(\wedge x) A(x) \vee (\wedge x) B(x)$ | {zał.} |
| 1.1 $(\wedge x) A(x)$ | {zd.} |
| 1.2 $A(x)$ | {OΛ: 1.1} |
| 1.3 $A(x) \vee B(x)$ | {DA: 1.2} |
| 1.4 $(\wedge x) [A(x) \vee B(x)]$ | {DΛ: 1.3}. |

Ponieważ z założenia 2.1 $(\wedge x) B(x)$ również uzyskuje się, stosując te same reguły, wyrażenie 1.4 (w pełnym dowodzie wiersz ten byłby oznaczony jako 2.4), więc dowód tej formuły – zgodnie z regułą budowania dowodów rozgałęzionych wprost – można uznać za zakończony. ■

Prawo **T10** pozwala wyciągać kwantyfikator ogólny przed człony alternatywy, ponieważ jednak implikacja odwrotna jest fałszywa, nie wolno rozkładać tego kwantyfikatora na człony alternatywy. Na prawie tym jest wsparta, tak samo nazywana, reguła (będzie oznaczana jako $\vee|\wedge$).

$$\vee|\wedge \quad \frac{(\wedge \alpha) \Phi \vee (\wedge \alpha) \Psi}{(\wedge \alpha) [\Phi \vee \Psi]}$$

T11 $(\vee x) [A(x) \wedge B(x)] \Rightarrow ((\vee x) A(x) \wedge (\vee x) B(x))$.

Dowód:

- | | |
|--------------------------------------|-------------|
| 1. $(\vee x) [A(x) \wedge B(x)]$ | {zał.} |
| 2. $A(a) \wedge B(a)$ | {OΛ: 1} |
| 3. $A(a)$ | {OK: 2} |
| 4. $B(a)$ | {OK: 2} |
| 5. $(\vee x) A(x)$ | {DV: 3} |
| 6. $(\vee x) B(x)$ | {DV: 4} |
| $(\vee x) A(x) \wedge (\vee x) B(x)$ | {DK: 5, 6}. |

Na podstawie **T11** można rozkładać kwantyfikator szczegółowy na człony koniunkcji, ale nie odwrotnie, tj. na podstawie tego, że istnieje coś o jakiejś cesze (A) oraz istnieje coś o cesze (B), nie można uznać, że istnieje coś, czemu przysługują obie te cechy. Implikacji **T11** (zwana prawem rozkładania kwantyfikatora szczegółowego na człony koniunkcji) odpowiada reguła wnioskowania (tak samo nazywana, a oznaczana jako $\vee|\wedge$).

$$\forall \wedge \frac{(\forall \alpha) [\Phi \wedge \Psi]}{(\forall \alpha) \Phi \wedge (\forall \alpha) \Psi}$$

T12 $(\forall x) [A(x) \vee B(x)] \Leftrightarrow ((\forall x) A(x) \vee (\forall x) B(x)).$

Dowód:

□

- | | | |
|-----|--|------------|
| 1. | $(\forall x) [A(x) \vee B(x)]$ | {zał.} |
| 2. | $A(a) \vee B(a)$ | {OV: 1} |
| 1.1 | $A(a)$ | {zd.} |
| 1.2 | $(\forall x) A(x)$ | {DV: 1.1} |
| 1.3 | $(\forall x) A(x) \vee (\forall x) B(x)$ | {DA: 1.2}. |

Zakładając jako kolejny wiersz dowodu: 2.1 $B(a)$, uzyskuje się tę samą (1.3) alternatywę, stosując te same reguły, co znaczy, że dowód implikacji prostej – zgodnie z regułą budowania dowodów rozgałęzionych wprost – jest zakończony.

□

- | | | |
|-----|--|------------|
| 1. | $(\forall x) A(x) \vee (\forall x) B(x)$ | {zał.} |
| 1.1 | $(\forall x) A(x)$ | {zd.} |
| 1.2 | $A(a)$ | {OV: 1.1} |
| 1.3 | $A(a) \vee B(a)$ | {DA: 1.2} |
| 1.4 | $(\forall x) [A(x) \vee B(x)]$ | {DV: 1.3}. |

Tak samo (korzystając z tych samych schematów wnioskowania) da się wyprowadzić alternatywę 1.4, przyjmując jako założenie dodatkowe drugi ze składników alternatywy 1., co – zgodnie z regułą dotyczącą dowodów rozgałęzionych wprost – wystarczy, by uznać **T12** za tezę WRP. ■

Zgodnie z **T12** kwantyfikator szczegółowy można i rozkładać (implikacja prosta) na człony alternatywy i wyciągać (implikacja odwrotna) przed jej człony – stąd nazwa: prawo rozkładania i wyciągania kwantyfikatora szczegółowego na/przed człony alternatywy. Równoważność **T12** ma łatwo uchwytnie znaczenie intuicyjne: jeśli istnieje coś o cesze (A) lub istnieje coś o cesze (B), to istnieje coś, co ma cechę pierwszą lub drugą ($A \vee B$) – i odwrotnie. Tak samo jak prawo nazywa się wtórną (ze względu na **T12**) regułą wnioskowania, którą będzie oznaczana jako $\forall \vee$.

$$\forall \vee \frac{(\forall \alpha) [\Phi \vee \Psi]}{(\forall \alpha) \Phi \vee (\forall \alpha) \Psi}$$

Kolejna grupa tez (**T13–T20**) dotyczy prawidłowości przenoszenia kwantyfikatorów przed człony wyrażenia złożonego, w którym jeden z członów nie zawiera jako zmiennej wolnej zmiennej związanej przez ten kwantyfikator w członie drugim. Nazywa się je prawami przenoszenia kwantyfikatorów w wyrażeniach złożonych ze zmienną zdaniową albo krócej – prawami przenoszenia kwantyfikatorów. Na prawach **T13–T20** są oparte wtórne reguły wnioskowania/dołączania nowych wierszy do dowodu (ich schematy nie będą formułowane).

T13 $(\wedge x) [p \vee A(x)] \Leftrightarrow (p \vee (\wedge x) A(x))$.

Dowód:

□

- | | |
|-------------------------------|-----------------------|
| 1. $(\wedge x) [p \vee A(x)]$ | {zał.} |
| 2. $p \vee A(x)$ | { OA : 1} |
| 1.1 p | {zd.} |
| 1.2 $p \vee (\wedge x) A(x)$ | { DA : 1.1} |
| 2.1 $\sim p$ | {zd.} |
| 2.2 $A(x)$ | { OA : 2, 2.1} |
| 2.3 $(\wedge x) A(x)$ | { DA : 2.2}. |

Warto zauważyć, że regułę **DA** można zastosować do wiersza 2.2, ponieważ zmienna x nie jest wolna w założeniach – ani dowodzonej formuły, tj. w założeniu 1., ani w założeniu dowodu (dodatkovym), tj. w 2.1. Dlatego nie można w 2.1 założyć drugiego członu alternatywy 2, tj. formuły $A(x)$, bo zmienna x byłaby w tym założeniu wolna i nie można by jej uogólnić do $(\wedge x) A(x)$.

- | | |
|------------------------------|--------------------|
| 2.4 $p \vee (\wedge x) A(x)$ | { DA : 2.3} |
|------------------------------|--------------------|

Ponieważ następnik dowodzonej implikacji, tj. napis $p \vee (\wedge x) A(x)$, został uzyskany z każdego z członów alternatywy, która jest w dowodzie lub którą można doń dołączyć – a chodzi o zasadę wyłączonego środka: $p \vee \sim p$ – więc, zgodnie z regułą budowania rozgałęzionych dowodów wprost, dowód implikacji prostej jest zakończony.

□

- | | |
|-----------------------------|--------------------|
| 1. $p \vee (\wedge x) A(x)$ | {zał.} |
| 1.1 p | {zd.} |
| 1.2 $p \vee A(x)$ | { DA : 1.1} |
| 2.1 $(\wedge x) A(x)$ | {zd.} |
| 2.2 $A(x)$ | { OA : 2.1} |
| 2.3 $p \vee A(x)$ | { DA : 2.2} |

Jako że alternatywa: $p \vee A(x)$ została uzyskana z każdego założeń dodatkowych, których alternatywa jest w wierszu 1., więc – korzystając z prawa dylematu konstrukcyjnego prostego – można w głównym toku dowodu uznać:

2. $p \vee A(x)$ {DKP: 1, 1.1 \Rightarrow 1.2, 2.1 \Rightarrow 2.3}.
 Formułę 2. można uogólnić, bo zmienna x nie jest w założeniach wolna:
 $(\wedge x) [p \vee A(x)]$. ■

T14 $(\vee x) [p \wedge A(x)] \Leftrightarrow (p \wedge (\vee x) A(x))$.

Dowód:

□

- | | |
|-------------------------------|------------|
| 1. $(\vee x) [p \wedge A(x)]$ | {zał.} |
| 2. $p \wedge A(a)$ | {OV: 1} |
| 3. p | {OK: 2} |
| 4. $A(a)$ | {OK: 2} |
| 5. $(\vee x) A(x)$ | {DV: 4} |
| $p \wedge (\vee x) A(x)$ | {DK: 3, 5} |

□

- | | |
|----------------------------|------------|
| 1. p | {zał.} |
| 2. $(\vee x) A(x)$ | {zał.} |
| 3. $A(a)$ | {OV: 2} |
| 4. $p \wedge A(a)$ | {DK: 1, 3} |
| $(\vee x) [p \wedge A(x)]$ | {DV: 4}. |

T15 $(\wedge x) [p \Rightarrow A(x)] \Leftrightarrow (p \Rightarrow (\wedge x) A(x))$.

Dowód:

□

- | | |
|--------------------------------------|------------|
| 1. $(\wedge x) [p \Rightarrow A(x)]$ | {zał.} |
| 2. p | {zał.} |
| 3. $p \Rightarrow A(x)$ | {OΛ: 1} |
| 4. $A(x)$ | {RO: 3, 2} |
| $(\wedge x) A(x)$ | {DΛ: 4} |

□

- | | |
|------------------------------------|--------------|
| 1. $p \Rightarrow (\wedge x) A(x)$ | {zał.} |
| 1.1 p | {zd.} |
| 1.2 $(\wedge x) A(x)$ | {RO: 1, 1.1} |
| 1.3 $A(x)$ | {OΛ: 1.2} |

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------|
| 2. $p \Rightarrow A(x)$ | {1.1 \Rightarrow 1.3} |
| $(\wedge x) [p \Rightarrow A(x)]$ | {DL: 2}. |

T16 $(\forall x) [p \Rightarrow A(x)] \Leftrightarrow (p \Rightarrow (\forall x) A(x))$.

Dowód tego prawa jest analogiczny do dowodu **T15**, z tym że korzysta się w nim z reguł opuszczania i dołączania dla kwantyfikatora szczegółowego.

Teza **T16** dotyczy praw przenoszenia kwantyfikatora szczegółowego w implikacji: kwantyfikator ten można przenosić sprzed implikacji do jej następnika (\exists) oraz wyciągać go przed implikację z jej następnika (\exists). Oczywiście i w przypadku tego prawa jest spełniony warunek sformułowany dla praw przenoszenia, tj. że jeden z członów wyrażenia złożonego (tu – poprzednik implikacji) nie zawiera jako zmiennej wolnej zmiennej związanej przez kwantyfikator w członie drugim.

T17 $(\wedge x) [A(x) \Rightarrow p] \Leftrightarrow ((\forall x) A(x) \Rightarrow p)$.

Dowód:

\square

- | | |
|--------------------------------------|-------------|
| 1. $(\wedge x) [A(x) \Rightarrow p]$ | {zał.} |
| 2. $(\forall x) A(x)$ | {zał.} |
| 3. $A(a) \Rightarrow p$ | {OL: 1} |
| 4. $A(a)$ | {OV: 2} |
| p | {RO: 3, 4}. |

\square

- | | |
|---|-------------|
| 1. $(\forall x) A(x) \Rightarrow p$ | {zał.} |
| 2. $\sim(\wedge x) [A(x) \Rightarrow p]$ | {zdn.} |
| 3. $(\forall x) \sim[A(x) \Rightarrow p]$ | {~L: 2} |
| 4. $(\forall x) [A(x) \wedge \sim p]$ | {NK: 3} |
| 5. $\sim p \wedge (\forall x) A(x)$ | {T14: 4} |
| 6. $\sim p$ | {OK: 5} |
| 7. $A(a)$ | {OK: OV: 5} |
| 8. $(\forall x) A(x)$ | {DV: 7} |
| 9. p | {RO: 1, 8} |
| sprz.: 6, 9. | |

T18 $(\forall x) [A(x) \Rightarrow p] \Leftrightarrow ((\wedge x) A(x) \Rightarrow p)$.

Dowód:

□

- | | |
|---------------------------------------|------------|
| 1. $(\forall x) [A(x) \Rightarrow p]$ | {zał.} |
| 2. $(\wedge x) A(x)$ | {zał.} |
| 3. $A(a) \Rightarrow p$ | {OV: 1} |
| 4. $A(a)$ | {OA: 2} |
| p | {RO: 3, 4} |

□

- | | |
|------------------------------------|-------------------------|
| 1. $(\wedge x) A(x) \Rightarrow p$ | {zał.} |
| 1.1 $\sim p$ | {zd.} |
| 1.2 $\sim(\wedge x) A(x)$ | {TOL: 1, 1.1} |
| 1.3 $(\forall x) \sim A(x)$ | { $\sim\wedge$: 1.2} |
| 1.4 $\sim A(a)$ | {OV: 1.3} |
| 2. $\sim p \Rightarrow \sim A(a)$ | {1.1 \Rightarrow 1.4} |
| 3. $A(a) \Rightarrow p$ | {TR \Rightarrow : 2} |
| $(\forall x) [A(x) \Rightarrow p]$ | {DV: 3}. ■ |

Jak widać, prawa **T17** i **T18** różnią się od udowodnionych wcześniej praw przenoszenia kwantyfikatorów tym, że przenoszeniu kwantyfikatora (z członu wyrażenia przed wyrażenie i odwrotnie) towarzyszy zmiana kwantyfikatora (ogólnego na szczegółowy i odwrotnie).

Prawami WRP są także implikacje **T19** i **T20** (w ich dowodach korzysta się z reguł opuszczania kwantyfikatora, odpowiednio, ogólnego lub szczegółowego):

T19 $(\wedge x) [A(x) \Rightarrow p] \Rightarrow ((\wedge x) A(x) \Rightarrow p)$;

T20 $((\forall x) A(x) \Rightarrow p) \Rightarrow (\forall x) [A(x) \Rightarrow p]$.

Implikacje odwrotne do tez **T19** i **T20** są fałszywe.

2.2 WRP z identycznością

Jak wskazuje użyta w **2.2** nazwa „WRP z identycznością”, język tego rachunku jest rozszerzeniem języka WRP o termin (symbol) identyczności. Dlatego charakterystyka tak rozszerzonego WRP jest skupiona na własnościach relacji identyczności.

2.1.1 Skracający nazwę relacji identyczności symbol $=$ jest odczytywany nie tylko jako „jest identyczne z”, lecz także „jest równe”, „równa się”. Na przykład formuły $a = b$, $x = y$ itp. odczytujemy: a jest identyczne z b (równe z b , równa się b); x jest równe (równa się, jest identyczne z) y . Negacje wyrażeń stwierdzających identyczność, np. $\sim(x = y)$ są również zapisywane z użyciem symbolu \neq , odczytywanego jak wyrażenia „nie jest identyczne z” lub „nie równa się” lub „jest różne/różni się”⁶.

Analogicznie jest wzbogacony metajęzyk tego rachunku, tj. w metajęzykowych zmiennych reprezentujących wyrażenia zdaniowe tego rachunku, w cudzysłowowych nazwach jednostkowych jego formuł oraz w ogólnych nazwach quasi-cudzysłowowych może być używany symbol relacji identyczności.

Rozszerzone są również reguły składni języka tego rachunku. Do formuł elementarnych – oprócz wszystkich, które spełniają reguły składniowe języka WRP – należą bowiem także wszystkie wyrażenia o budowie $\langle \alpha = \beta \rangle$, a do jego formuł złożonych wyrażenia utworzone z formuł elementarnych przy użyciu spójników prawdziwościowych KRZ, kwantyfikatorów wiążących zmienne indywidualowe oraz symbolu relacji identyczności, przy czym relacja $=$ może wiązać indywidua oznaczane nazwami jednostkowymi wprowadzonymi zgodnie z regułą **OV**, tj. nazwami podpadającymi pod ogólny schemat $\tau_{\beta_1, \dots, \beta_n}$ (uwagi do tej reguły są sformułowane w części 2.1.2.1).

W WRP z identycznością obowiązują wszystkie reguły WRP (pierwotne i wtórne), a więc także wszystkie tezy WRP, rozszerzone na wyrażenia z symbolem identyczności (analogicznie jak reguły KRZ były rozszerzone, „wzmocnione” tak, by objąć wyrażenia WRP).

2.1.2 Relacja identyczności jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, czyli jest relacją równoważnościową. Te własności relacji $=$ były już w tym opracowaniu wykorzystywane, gdy była mowa o definicjach równościowych (*RVII.1.3). Warto podkreślić, że własności te przysługują relacji identyczności w dowolnym zbiorze, tj. dla dowolnych zakresów zmiennych użytych w napisach wskazujących na te własności. Dlatego w poniższych formułach nie jest potrzebne relatywizowanie tych własności do jakiegoś określonego zbioru. Prawdziwe są zatem następujące prawa:

⁶ Warto także zapowiedzieć, że relacja identyczności jest także oznaczana, zwłaszcza w ogólnych rozważaniach dotyczących relacji (**RIV.2), symbolem I , a wtedy zamiast np. $x = x$ jest napis $x I x$.

$$\begin{array}{ll} x = x & \text{(zwrotność);} \\ x = y \Rightarrow y = x & \text{(symetryczność);} \\ x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z & \text{(przechodniość).} \end{array}$$

W systemie dedukcyjnym prawa odpowiadające tym własnościom relacji identyczności powinny być jednak uznane na podstawie reguł aksjomatycznych lub dowodzenia. W tym celu wystarczy przyjąć w charakterze aksjomatu prawo zwrotności dla identyczności oraz dołączyć do reguł pierwotnych systemu WRP z identycznością regułę zastępowania dla identyczności (**RZ**₌).

A1 $x = x$.

Stosując do **A1** regułę dołączania kwantyfikatora szczegółowego, uznajemy za tezę:

T21 $(\forall y) y = x$.

Jeśliby za zmienne nazwowe można było podstawiać nazwy puste, wtedy każda konkretyzacja **T21**, w której za x zostałaby podstawiona nazwa pusta, byłaby zdaniem fałszywym, jak np. zdanie *Istnieje przedmiot identyczny z liczbą dodatnią mniejszą od zera*, a prościej: *Istnieje liczba dodatnia mniejsza od 0*. W kontekście **T21** widać więc wyraźnie, że – zgodnie z przyjętym wyżej warunkiem – za zmienne indywidualowe rachunku predykatów nie wolno podstawiać nazw pustych.

$$\mathbf{RZ}_= \quad \frac{\tau_1 = \tau_2 \quad \Phi}{\Phi(\tau_1 // \tau_2)}$$

Wyrażenie $\Phi(\tau_1 // \tau_2)$ jest uzyskane z Φ w wyniku prawidłowego zastąpienia występującego w nim n -krotnie napisu τ_1 napisem τ_2 ($n \geq 0$), przy czym – jak wiadomo (zob. 2.1, uwagi do **RZ** _{$\wedge \Leftrightarrow$} oraz **RI.3.2.2, uwagi do **RZ** _{\Leftrightarrow}) – dokonując zastępowania, nie trzeba – przeciwnie niż w przypadku podstawiania – zastępować τ_1 przez τ_2 w każdym miejscu występowania τ_1 w formule Φ . Jednakże w miejscach, w których dokonuje się zastępowania, musi być tak, że:

- (i) każda zmienna zastępowanego wyrażenia τ_1 występuje w Φ jako zmienna wolna;
- (ii) żadna zmienna wolna wyrażenia zastępującego τ_2 nie może zostać związana w wyrażeniu $\Phi(\tau_1 // \tau_2)$.

Jeśli τ_1 nie występuje w Φ lub gdy nie zostało zastąpione na żadnym miejscu swojego występowania, to $\Phi(\tau_1//\tau_2) = \Phi$.

Zgodnie z **RZ_≡** można w kolejnym wierszu dowodu uznać wyrażenie $\Phi(\tau_1//\tau_2)$ na tej podstawie, że jest wcześniej uznana (okazana) równość $\tau_1 = \tau_2$ oraz jest uznane wyrażenie Φ .

Dowód prawa symetryczności dla identyczności jest oparty na regule **RZ_≡** zastosowanej do **A1**, czyli identyczności $x = x$, w której lewą stronę zastępuje się na podstawie założenia $x = y$ dowodzonej implikacji symbolem y .

$$\mathbf{T22} \quad x = y \Rightarrow y = x \qquad \{\mathbf{RZ}_{\equiv}: \mathbf{A1}, x = y\}.$$

Reguła **RZ_≡** wystarczy też do udowodnienia prawa przechodności dla identyczności.

$$\mathbf{T23} \quad x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z \qquad \{\mathbf{RZ}_{\equiv}: x = y, y = z\}.$$

oraz do udowodnienia implikacji:

$$\mathbf{T24} \quad (P(x) \wedge x = y) \Rightarrow P(y) \qquad \{\mathbf{RZ}_{\equiv}: x = y, P(x)\}.$$

Interpretując tę implikację, można powiedzieć, że jeżeli dowolna formuła jest spełniona dla jakiegoś przedmiotu, to jest też spełniona dla przedmiotu z nim identycznego; albo: cokolwiek jest prawdą dla jakiegoś przedmiotu, jest też prawdą dla każdego przedmiotu z nim identycznego, tzn. prawdziwe orzekanie o jakimkolwiek przedmiocie nie zależy od nazw używanych na oznaczenie danego przedmiotu.

Stosując do **T24** regułę (prawo) transpozycji dla implikacji (**RI.3: **T7**), otrzymujemy prawo równoważne z implikacją **T24**:

$$\sim P(y) \Rightarrow \sim(P(x) \wedge x = y),$$

w którego kontekście założenie, że $P(x)$ oraz $\sim P(y)$ implikuje negację $\sim(x = y)$:

$$\mathbf{T25} \quad (P(x) \wedge \sim P(y)) \Rightarrow \sim(x = y).$$

Zgodnie z implikacją **T25** można twierdzić, że jeśli jakakolwiek formuła jest spełniona przez przedmiot x , a nie jest spełniona przez przedmiot y , to przedmioty te nie są identyczne; lub, krócej: jeśli coś jest prawdą o x , a nie jest prawdą o y , to przedmioty x oraz y są różne.

$$\mathbf{T26} \quad P(x) \Leftrightarrow (\forall y = x) P(y).$$

Dowód:

Zastosowanie w dowodzie implikacji prostej reguły **DV** do koniunkcji $x = x \wedge P(x)$ {**DK**: zał., **A1**} prowadzi do uznania formuły:

(*) $(\forall y) [y = x \wedge P(y)]$,

równoważnej z

$(\forall y = x) P(y)$ $\{\mathbf{RZ}_{\Leftrightarrow}: (*), \mathbf{dfV}_{\text{ogr}}\}$.

W dowodzie implikacji odwrotnej: założenie $(\forall y = x) P(y)$ jest równoważne z

(**) $(\forall y) [y = x \wedge P(y)]$ $\{\text{zał.}, \mathbf{dfV}_{\text{ogr}}\}$,

wobec czego

(***) $a_x = x \wedge P(a_x)$ $\{\mathbf{OV}: (**)\}$ – przedmiot a_x jest zależny od zmiennej x ,

a zatem: $P(x)$ $\{\mathbf{RZ}_{=} : (***)\}$. ■

Zgodnie z **T26** jeżeli o danym (dowolnym) przedmiocie można prawdziwie orzec P , to istnieje przedmiot identyczny z danym, o którym P można prawdziwie orzec; i odwrotnie: jeżeli wiadomo, że istnieje przedmiot, o którym można prawdziwie orzec P oraz że przedmiot ten jest identyczny z danym, to można prawdziwie orzec P o danym przedmiocie.

T27 $P(x) \Leftrightarrow (\wedge y = x) P(y)$.

Dowód:

□ Zastosowanie reguły $\mathbf{RZ}_{=}$ do założenia 1. $P(x)$ i założenia dodatkowego 1.1 $y = x$ daje podstawy do uznania, że 1.2 $P(y)$, czyli do przyjęcia implikacji 2. $y = x \Rightarrow P(y)$ $\{1.1 \Rightarrow 1.2\}$, którą można uogólnić do

3. $(\wedge y) [y = x \Rightarrow P(y)]$ $\{\mathbf{DA}: 2\}$,

jako że założenie 1.1 dotyczy dowolnego przedmiotu y , formuła 3. jest równoważna z: $(\wedge y = x) P(y)$ $\{\mathbf{df}\wedge_{\text{ogr}}\}$.

□ Wynikiem zastosowania $\mathbf{RZ}_{\Leftrightarrow}$ do założenia implikacji odwrotnej i $\mathbf{df}\wedge_{\text{ogr}}$ jest formuła: $(\wedge y) [y = x \Rightarrow P(y)]$, której uszczegółowieniem jest m.in. napis (*) $x = x \Rightarrow P(x)$. Na podstawie **RO** zastosowanej do (*) oraz **A1** uzyskuje się $P(x)$.

Według **T27**: jeśli coś (P) jest prawdą o jakimś, tj. dowolnym danym, przedmiocie, to jest też prawdą o każdym przedmiocie identycznym z danym; oraz coś, jeśli jest prawdą o każdym przedmiocie identycznym z danym, to jest też prawdą o danym⁷.

⁷ Twierdzenia **T25–T27** są zgodne ze sformułowaną przez G.W. Leibniza zasadą identyczności przedmiotów nierozróżnialnych: jeśli dowolne przedmioty mają wszystkie własności wspólne, to są one identyczne. Warto jednak dostrzec, że zdefiniowanie identyczności jako relacji spełnionej dla danych przedmiotów wtedy i tylko, gdy dla dowolnej własności jest tak, że o ile przysługuje ona pierwszemu, to przysługuje drugiemu przedmiotowi, i odwrotnie – wymaga logiki 2. rzędu,

Dołączenie do WRP symbolu identyczności daje możliwość zdefiniowania w systemie o tak wzbogaconym słowniku tzw. kwantyfikatorów ilościowych, tj. kwantyfikatora jednostkowego \forall_1 , jak również wzmiankowane wyżej (**RIII.1.2) uściślenia kwantyfikatora szczegółowego, tj. $\forall_2, \forall_3, \dots, \forall_k$.

MD1 $\vdash \ulcorner (\forall_1 \alpha) \Phi(\alpha) \Leftrightarrow (\forall \alpha) \Phi(\alpha) \wedge \sim(\forall \alpha, \beta) [\Phi(\alpha) \wedge \Phi(\beta) \wedge \alpha \neq \beta] \urcorner$.

Pod tę metajęzykową definicję podpadają wszystkie sformułowane w języku przedmiotowym równoważności o kształcie wskazanym w **MD1**, np.: $(\forall_1 x) P(x) \Leftrightarrow (\forall x) P(x) \wedge \sim(\forall x, y) [P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y]$.

Odczytując **MD1** w języku naturalnym, można powiedzieć, że istnieje dokładnie jeden przedmiot spełniający funkcję Φ , np. jedyny x o własności P , wtedy i tylko, gdy istnieje przedmiot spełniający funkcję Φ oraz nie istnieją dwa różne przedmioty spełniające tę funkcję. Udowodnienie tego twierdzenia – zwanego w teorii definicji warunkiem istnienia i jedyności – jest w metodologii nauk, nie tylko dedukcyjnych, koniecznym warunkiem budowania teorii dotyczących obiektu, który jest desygnatem nazwy zdefiniowanej w punkcie wyjścia danego systemu. Definicje niespełniające tego warunku prowadzą bowiem do sprzeczności (*RVII.2).

Na podstawie **MD1**, korzystając z reguł **TR**_⇐, **NK** i **ON**, można udowodnić prawo (regułę) negowania kwantyfikatora jednostkowego:

T28 $\sim(\forall_1 x) P(x) \Leftrightarrow \sim(\forall x) P(x) \vee (\forall x, y) [P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y]$.

Rozumienie formuły **T28** jest zgodne z interpretacją definicji **MD1**: jeżeli nie jest tak, że istnieje dokładnie jeden przedmiot o własności P , to nie istnieje żaden taki przedmiot lub istnieje więcej takich przedmiotów (a więc istnieją co najmniej dwa).

Stosując do **MD1** reguły $\sim\forall$ oraz **NK**, otrzymujemy:

MT4 $\vdash \ulcorner (\forall_1 \alpha) \Phi(\alpha) \Leftrightarrow (\forall \alpha) \Phi(\alpha) \wedge (\wedge \alpha, \beta) [(\Phi(\alpha) \wedge \Phi(\beta)) \Rightarrow \alpha = \beta] \urcorner$;

a korzystając z **MT4**, uzyskuje się:

MT5 $\vdash \ulcorner (\forall_1 \alpha) \Phi(\alpha) \Leftrightarrow (\forall \alpha) [\Phi(\alpha) \wedge (\wedge \beta) \Phi(\beta) \Rightarrow \beta = \alpha] \urcorner$.

D o w ó d:

☐ Połączenie 1. $(\forall_1 \alpha) \Phi(\alpha)$ z założeniem dowodu niewprost, tj.

w definicji tej trzeba bowiem związać kwantyfikatorem ogólnym także zmienne predykatowe.

2. $\sim(\forall \alpha) [\Phi(\alpha) \wedge (\forall \beta) [\Phi(\beta) \Rightarrow \beta = \alpha]]$

prowadzi do sprzeczności. Mianowicie założenie 1. jest – zgodnie z **MT4** – równoważne z koniunkcją:

3a. $(\forall \alpha) \Phi(\alpha) \wedge$ 3.b $(\forall \alpha, \beta) [\Phi(\alpha) \wedge \Phi(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta]$

Oznaczmy przedmiot, o którym mowa w 3a przez „a”:

4. $\Phi(a)$

Rozwinięcie negacji 2. według praw WRP i KRZ uzasadnia przyjęcie:

5. $(\forall \alpha) [\sim(\Phi(\alpha) \wedge (\forall \beta) [\Phi(\beta) \Rightarrow \beta = \alpha])] \quad \{\sim\mathbf{V}: 2\}$

oraz

6. $(\forall \alpha) [\sim(\Phi(\alpha) \vee \sim(\forall \beta) [\Phi(\beta) \Rightarrow \beta = \alpha])] \quad \{\mathbf{NK}: 5\}$.

Przyopuszczenie, że 1.1 $(\forall \alpha) \sim\Phi(\alpha)$ {zd.}, równoważne z

1.2 $\sim(\forall \alpha) \Phi(\alpha)$ $\{\sim\mathbf{V} \sim\mathbf{V}: 1.1\}$, jest sprzeczne z 3a.

Natomiast przypuszczenie:

2.1 $(\forall \alpha) \sim(\forall \beta) [\Phi(\beta) \Rightarrow \beta = \alpha]$ {zd.}

daje podstawę do uznania:

2.2 $(\forall \alpha) (\forall \beta) [\Phi(\beta) \wedge \beta \neq \alpha]$ $\{\sim\mathbf{\Lambda}: 2.1\}$

Ponieważ 2.2 jest spełnione dla dowolnego α , więc także dla przedmiotu a :

2.3 $\Phi(b) \wedge b \neq a$ $\{\mathbf{O}\mathbf{\Lambda}, \mathbf{O}\mathbf{V}: 2.2\}$

Łącząc 2.3 z 4., można uznać, że

2.4 $\Phi(a) \wedge \Phi(b)$, co w kontekście 3b prowadzi jednak do równości

2.5 $a = b$ $\{\mathbf{RO}: \mathbf{O}\mathbf{\Lambda}: 3b, 2.4\}$,

sprzecznej z 2.3.

□ Z założenia

1. $(\forall \alpha) [\Phi(\alpha) \wedge (\forall \beta) [\Phi(\beta) \Rightarrow \beta = \alpha]]$

implikacji odwrotnej równoważności **MT4** wynikają formuły:

2. $(\forall \alpha) \Phi(\alpha)$;

3. $(\forall \alpha) (\forall \beta) [\Phi(\beta) \Rightarrow \beta = \alpha]$ $\{\mathbf{OK}: \mathbf{V}|\mathbf{v}: 1\}$;

4. $(\forall \beta) [\Phi(\beta) \Rightarrow \beta = \alpha]$ $\{\mathbf{OV}: 3\}$.

Ponieważ przypuszczenie, że

1.1 $\sim(\forall \alpha, \beta) [(\Phi(\alpha) \wedge (\Phi(\beta)) \Rightarrow \alpha = \beta)]$ {zd.}

prowadzi do sprzeczności:

1.2 $\Phi(\alpha) \wedge \Phi(\beta) \wedge \alpha \neq \beta$ $\{\mathbf{OV}: \sim\mathbf{\Lambda}: 1.1\}$;

1.3 $\alpha = \beta$ $\{\mathbf{RO}: 4., \mathbf{OK}: 1.2\}$;

sprz.: 1.3, 1.2, więc:

5. $(\forall \alpha, \beta) [(\Phi(\alpha) \wedge \Phi(\beta)) \Rightarrow \alpha = \beta]$ $\{1.1 \Rightarrow \text{sprz.}\}$

6. $(\forall \alpha) \Phi(\alpha) \wedge (\forall \alpha, \beta) [(\Phi(\alpha) \wedge \Phi(\beta)) \Rightarrow \alpha = \beta]$ $\{\mathbf{DK}: 2, 5\}$ oraz $(\forall_1 \alpha) \Phi(\alpha)$ $\{\mathbf{RO}_{\Rightarrow}: \mathbf{MT4}, 6\}$. ■

Tezą WRP z identycznością jest (wyżej oznaczone jako **T21**) twierdzenie:

$$\mathbf{T29.a} \quad (\forall y) y = x \quad \{\mathbf{DV: A1}\},$$

które można, używając kwantyfikatora jednostkowego, wzmocnić do:

$$\mathbf{T29.b} \quad (\forall_1 y) y = x,$$

w którego dowodzie niewprost korzysta się z **T28** oraz **A1** i które – zgodnie z **MT4** – jest równoważne tezie:

$$\mathbf{T30.a} \quad (\forall y) y = x \wedge (\forall y, z) [(y = x \wedge z = x) \Rightarrow y = z],$$

uogólnialnej do

$$\mathbf{T30.b} \quad (\forall x) [(\forall y) y = x \wedge (\forall y, z) [(y = x \wedge z = x) \Rightarrow y = z]].$$

W myśl **T30.b** dla dowolnego danego przedmiotu jest prawdą, że istnieje dokładnie jeden przedmiot identyczny z danym.

Prawo (reguła) ekstensjonalności dla kwantyfikatorów (**MT3**) obejmuje również kwantyfikator jednostkowy:

$$\mathbf{T31} \quad (\forall x) [P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \Rightarrow ((\forall_1 x) P(x) \Leftrightarrow (\forall_1 x) Q(x)) \{\mathbf{RP: MT3}(K/\forall_1)\}.$$

3. Teoria wynikania zdań kategorycznych

Teoria badająca związki logiczne między tzw. klasycznymi zdaniami kategorycznymi (zapoczątkowana przez Arystotelesa) jest tradycyjnie nazywana sylogistyką, a także klasycznym rachunkiem nazw⁸. Ponieważ obok wnioskowań zwanych sylogizmami są w tej teorii badane także tzw. wnioskowania bezpośrednie (z jednej przesłanki), więc lepsza dla tej teorii jest nazwa opisowa, użyta w tytule niniejszego podrozdziału. Teoria wynikania zdań kategorycznych obejmuje bowiem dowolne wnioskowania, których przesłanki i wniosek są zdaniami kategorycznymi, a więc także wnioskowania bezpośrednie i sylogizmy. We współczesnych ujęciach logiki

⁸ Zob. J. Łukasiewicz, *Sylogistyka Arystotelesa z punktu widzenia współczesnej logiki formalnej*, Warszawa 1988; L. Gumański, *Wprowadzenie w logikę współczesną*, dz. cyt., s. 74–101.

teoria ta jest ujmowana jako fragment węższego, jednoargumentowego rachunku predykatów⁹.

W podrozdziale tym są uwzględnione: podstawowe prawa wynikania zdań kategorycznych, stosowane metody sprawdzania poprawności wnioskowań z takimi zdaniami – zarówno tradycyjne, jak i nowsze – a także interpretacja zdań kategorycznych w WRP¹⁰.

3.1 Podstawowe prawa wynikania

Po uwagach nawiązujących do rodzajów zdań kategorycznych oraz umów co do zapisu takich zdań i reprezentowania ogłaszanych w nich związków logicznych zostaną omówione prawa kwadratu logicznego (także w porównaniu z prawami logiki modalnej i deontycznej) oraz prawa konwersji, obwersji, kontrapozycji i inwersji.

3.1.1 Jak wiadomo (*RIII.1.2.1), są cztery rodzaje tzw. klasycznych zdań kategorycznych:

ogólnotwierdzące, postaci: <i>każde S jest P</i>	(krócej: <i>S a P</i>)
ogólnoprzeczące, o schemacie: <i>żadne S nie jest P</i>	(<i>S e P</i>)
szczegółotwierdzące, o budowie: <i>niektóre S są P</i>	(<i>S i P</i>)
szczegółowoprzeczące, kształtu: <i>niektóre S nie są P</i>	(<i>S o P</i>).

Zdaniami kategorycznymi są np. *Każdy kot jest ptakiem; Żaden mężczyzna nie jest teściową; Niektóre wykłady są nudne; Niektórzy studenci nie są abstynentami*; lecz także, co nie jest już widoczne wprost: *Kto pije, ten śpi; Bywa, że człowiek się potknie; Głupi, kto czeka na lepszy dzień; Nie będzie zbawiony, kto nie miłował; Są uprzejmi celnicy; Jeżeli bogaty, to szczęśliwy; Nie wszystko złoto, co się świeci* itd.

Litery *a*, *e*, *i*, *o* są symbolami stałych logicznych specyficznych dla teorii wynikania zdań kategorycznych, tj. funktorów *każde jest*; *żadne nie jest*; *niektóre są*; *niektóre nie są*. W zdaniach sformułowanych w języku potocznym funktory te są często zastępowane, głównie dla zwięzłości,

⁹ W: P. Kulicki, *Aksjomatyczne systemy rachunku nazw* (Lublin 2011) są zaprezentowane i omówione różne – zróżnicowane logicznie (semantycznie) i metalogicznie – systemy z intencją ukazania rachunku nazw jako dyscypliny w logice autonomicznej względem rachunków predykatów i zbiorów.

¹⁰ Obecne ujęcie jest rozwinięciem części 7.3.3 w: A. Jonkisz, *Elementy logiki stosowanej*, dz. cyt., s. 115–122.

przez inne wyrażenia (*kto...*, *ten...*; *bywa, że; są tacy ...; nie jest ..., kto jest; jeżeli ktoś jest ..., to jest ...* itd.)¹¹. Łączniki te należą do kategorii funktorów zdaniotwórczych dwóch argumentów nazwowych (wskaźnik kategorii: $\frac{Z}{n,n}$).

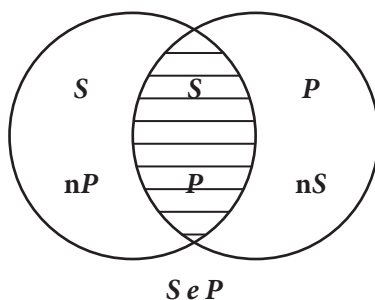
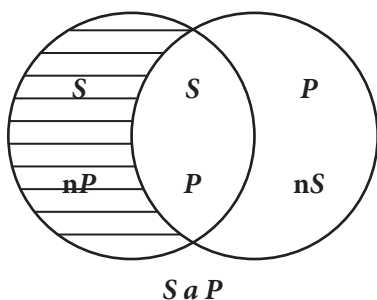
Symbole zmienne (najczęściej *S, P, M, N* itd.) używane w schematach zdań kategoriycznych są zmiennymi predykatowymi. Ponieważ jednak reprezentują predykaty jednoargumentowe, można je traktować jako zmienne nazwowe, co w niektórych zdaniach kategoriycznych widać wprost (*kot, ptak, mężczyzna, teściowa, nudne, student, abstynent*), a w innych – po przeformułowaniu, które nie zmienia relacji ogłoszonej w zdaniu kategoriycznym: *kto pije = taki, który pije; potknie się = taki, który się potyka* itd. Nazwy podstawiane za te zmienne to tzw. terminy: pierwszy z nich jest podmiotem zdania kategoriycznego, drugi jego orzecznikiem.

Zdania utworzone za pomocą tych czterech funktorów nazywa się kategoriycznymi, ponieważ są w nich opisywane związki między kategoriami, np. kategoriami *S* oraz *P*. Odróżnia się przy tym jakość zdania kategoriycznego (twierdzące, przeczące) oraz ilość (ogólne, szczegółowe).

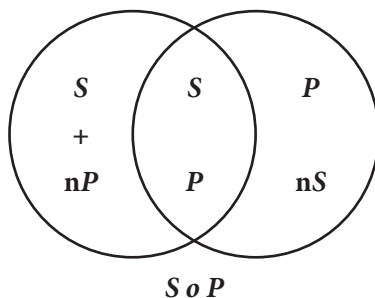
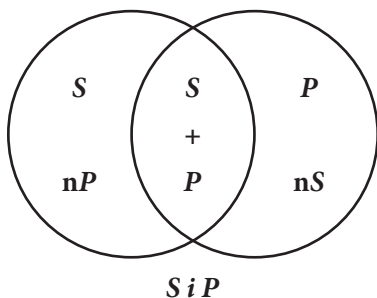
Związki ogłaszane w zdaniach kategoriycznych można w prosty sposób przedstawić na diagramach Venna (były używane do badania relacji między zakresami nazw – *RIV.4). Na rysunkach obrazujących relacje między zakresami nazw niepustość zbioru jest zaznaczana znakiem +, natomiast te części rysunku, które odpowiadają zbiorom pustym, będą wykreślane (rysunek jest wtedy czytelniejszy), choć można w nich także być postawiony znak minus (dla uproszczenia trudniejszych rysunków). Stosując te umowy, można tak oto przedstawić prawdziwość kolejnych zdań kategoriycznych (pominięte są symbole w otoczeniu zakresów).

Ze zdań kategoriycznych ogólnych wynika, że pewne zbiory są puste. Skoro *S a P = nie istnieją S, które nie są P*, to wykreślamy tę część rysunku, na której są jednocześnie symbole *S* i *nP*. Zaznaczając prawdziwość zdania ogólnopreczającego (*S e P*), wskazujemy, że puste jest pole, na którym są jednocześnie *S* oraz *P* (*nie istnieją S, które są P*).

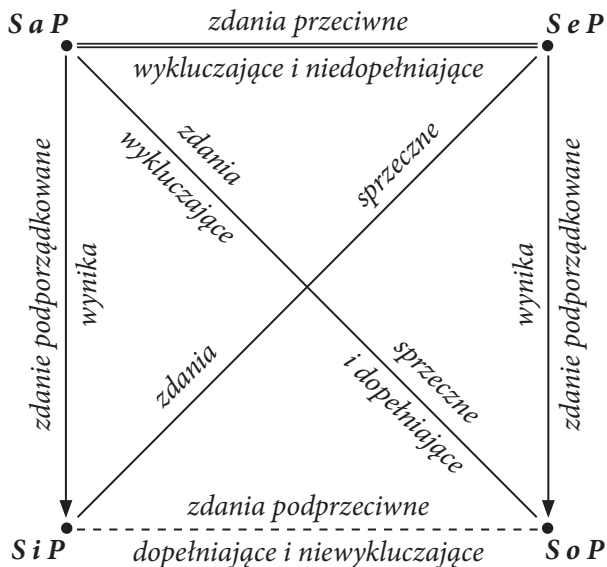
¹¹ Symbole tych stałych, dla uproszczenia zapisu zdań kategoriycznych, będą pisane kursywą (co przyjęte w opracowaniach z logiki), natomiast symbol negacji przednazwowej, także w symbolach zdań kategoriycznych – drukiem zwykłym, co potrzebne także dla odróżnienia od litery *n* stosowanej w pierwszej części całego opracowania jako skrótu tzw. uogólnionej negacji *non* (zob. *RIII.3.2.1).



Natomiast prawdziwość zdań szczegółowych jest ugruntowana w niepustości pewnych zbiorów, dlatego wstawiamy znak plus tam, gdzie są razem symbole S oraz P (dla zdania $S i P$) albo tam, gdzie występują symbole S oraz nP (dla zdania $S o P$).



3.1.2 Korzystając z przyjętej interpretacji zdań kategorycznych i odpowiednich praw rachunku kwantyfikatorów, można wskazać związki między zdaniami kategorycznymi oraz sformułować podstawowe prawa wynikania zdań kategorycznych, tradycyjnie zwane prawami kwadratu logicznego.



Na powyższym wykresie (a także na kolejnym) linią pojedynczą są połączone pary zdań sprzecznych, linią podwójną zdania przeciwne, linią pojedynczą przerywaną zdania tzw. podprzeciwne, a strzałka wskazuje na kierunek wynikania od zdania ogólnego do zdania podporządkowanego¹².

Cztery pierwsze prawa kwadratu logicznego mówią o sprzecznych zdaniach kategoriycznych:

$\sim(S a P) \Leftrightarrow S o P$	$\sim(S e P) \Leftrightarrow S i P$	$\sim(S i P) \Leftrightarrow S e P$	$\sim(S o P) \Leftrightarrow S a P$
-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

W zapamiętaniu tych praw pomaga reguła: zaprzeczenie zmienia ilość i jakość zdania kategoriycznego. Zgodnie z tą regułą: zdanie ogólnotwierdzące jest po zaprzeczeniu (równoważnościowo) zastępowane zdaniem szczegółowozaprzeczającym, ogólnoprzeczające zdaniem szczegółowotwierdzącym – i odwrotnie. W zapisie zdań kategoriycznych znaczy to, że w wyniku zaprzeczania wymieniane są funktory *a z o* oraz *e z i*. Sprzeczność zachodzi zatem pomiędzy zdaniami *S a P* oraz *S o P*, a także między zdaniami pary *S e P* oraz *S i P*. Zdania sprzeczne wzajemnie się wykluczają i dopełniają, tzn. nie mogą być jednocześnie ani prawdziwe,

¹² Wykresy opracowane na podstawie Z. Ziemiński, *Logika praktyczna*, Warszawa 1974, s. 127–128 i 175.

ani fałszywe, jak na przykład: *Każdy student jest muzykiem* oraz *Niektórzy studenci nie są muzykami*; *Żaden student nie jest bogaty* oraz *Niektórzy studenci są bogaci*.

Kolejne prawa kwadratu logicznego mówią o związkach logicznych między tzw. zdaniami przeciwnymi (ogólnotwierdzącym i ogólnoprzeczącym), podprzeciwymi (szczegółowotwierdzące i szczegółowoprzeczące) oraz podporządkowanymi (zdaniami ogólne i zdaniami szczegółowe).

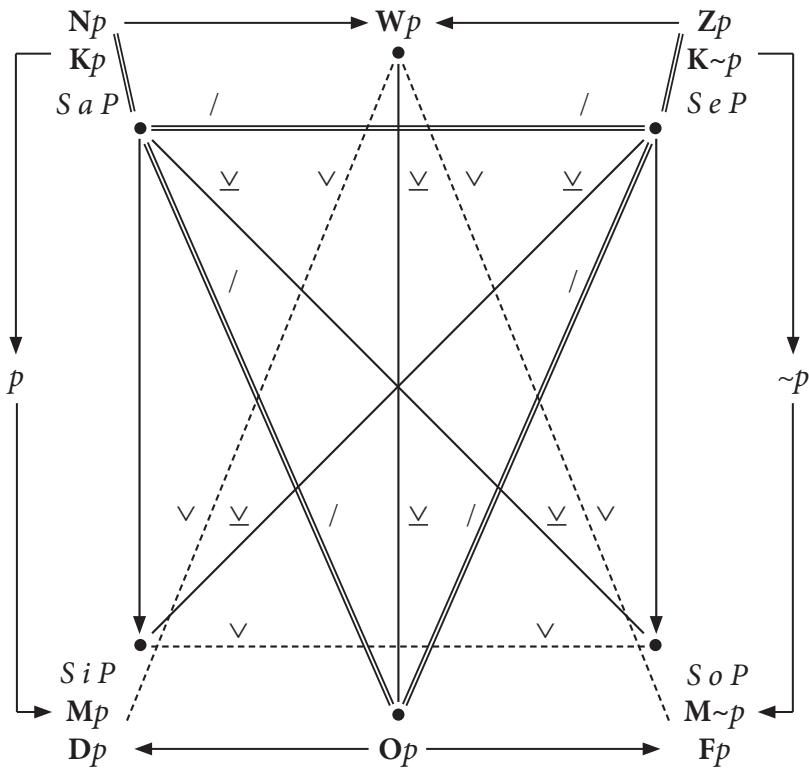
zдания przeciwnе	zдания podprzeciwnе	zдания podporządkowane
$S a P \Rightarrow \sim(S e P)$ $S e P \Rightarrow \sim(S a P)$	$\sim(S i P) \Rightarrow (S o P)$ $\sim(S o P) \Rightarrow (S i P)$	$S a P \Rightarrow S i P$ $S e P \Rightarrow S o P$

Zdania przeciwnе wykluczają się, tj. nie mogą być jednocześnie prawdziwe, lecz nie dopełniają się, co znaczy, że mogą być jednocześnie fałszywe, jak np. zdania: *Każdy student jest muzykiem* i *Żaden student nie jest muzykiem*.

Zdania podprzeciwnе nie wykluczają się, bo mogą być zarazem prawdziwe (*Niektórzy studenci są muzykami*; *Niektórzy studenci nie są muzykami*), lecz się dopełniają, tzn. nie mogą być zarazem fałszywe (o ile nazwy podstawiane w schematach za zmienne nie są puste).

Co się natomiast tyczy zdań podporządkowanych (zdanie $S i P$ jest podporządkowane zdaniu $S a P$, a zdanie $S o P$ – zdaniu $S e P$), to ze zdania ogólnego wynika logicznie zdanie szczegółowe, co znaczy, że jeśli prawdziwe jest zdanie ogólne, to zdanie podporządkowane też jest prawdziwe, a więc jeśli fałszywe jest zdanie podporządkowane, to fałszywe jest także zdanie ogólne.

3.1.3 Warto także porównać prawa kwadratu logicznego dla zdań kategorycznych z prawami dla zdań modalnych i deontycznych. Na poniższym wykresie ustalenia znane z klasycznego kwadratu logicznego są uzupełnione o prawidłowości dotyczące zdań modalnych i deontycznych.



Linie łączące pary zdań – rozumiane jak na wykresie dla zdań kategorycznych – są uzupełnione symbolami spójników prawdziwościowych, które oddają związki logiczne między zdaniami danej pary – związki zgodne z prawami bezpośredniego wynikania dla zdań kategorycznych oraz dla zdań modalnych i deontycznych (zob. **RII.2 i **RII.3). Jak widać, oprócz znanych z kwadratu logicznego sprzecznych zdań SaP i SoP oraz SeP i SiP , sprzeczne są także zdania modalne Kp i $M\sim p$ oraz $K\sim p$ i Mp ; oraz zdania deontyczne Np i Fp , Zp i Dp , a także Wp i Op , czyli zdania stwierdzające deontologiczną ważność vs obojętność tego, co ogłoszone w p (co oczywiste, jako że pierwszy z tych funktorów jest zdefiniowany alternatywą $Np \vee Zp$, a drugi koniunkcją $\sim Np \wedge \sim Zp$). Do zdań przeciwnych, obok SaP i SeP , należą również zdania modalne Kp i $K\sim p$ oraz deontyczne Np i Zp , a także Np , Op i Zp , Op . Z kolei w kategorii zdań podprzeciwnych są, obok SiP i SoP , Mp i $M\sim p$, Dp i Fp , a także Wp i Dp oraz Wp i Fp . Natomiast relacja wynikania wiąże, oprócz par SaP ,

$S i P$ oraz $S e P, S o P$, także zdania (kolejność ważna) Kp, p, Mp i $K\sim p, \sim p, M\sim p$ oraz pary zdań deontycznych $Np, Wp; Zp, Wp; Op, Dp; Op, Fp$.

Relacje logiczne między zdaniami: sprzecznymi oddaje spójnik alternatywy rozłącznej; przeciwnymi – funktor dysjunkcji, a podprzeciwnymi – alternatywy zwykłej. Dlatego są prawami logiki formuły: $S a P \vee S o P, S e P \vee S i P, Kp \vee M\sim p, Np \vee Fp$ itd.; $S a P / S e P, Kp / K\sim p, Np / Zp$ itd.; $S i P \vee S o P, Mp \vee M\sim p, Dp \vee Fp$ itd. Prawami logiki są także wszystkie formuły implikacyjne zgodne z relacją wynikania zaznaczoną na wykresie, np.: $S a P \Rightarrow S i P, S e P \Rightarrow S o P, Kp \Rightarrow p, p \Rightarrow Mp, Kp \Rightarrow Mp, Np \Rightarrow Wp; Zp \Rightarrow Wp, Op \Rightarrow Dp, Op \Rightarrow Fp$; oraz prawa uzyskana z takich implikacji w wyniku transpozycji, np. $\sim(S i P) \Rightarrow \sim(S a P), \sim(S o P) \Rightarrow \sim(S e P), \sim p \Rightarrow \sim Kp$ itd.

3.1.4 Prawa wynikania zdań kategorycznych oraz oparte na nich schematy/reguły niezawodnego wnioskowania uzyskuje się także w wyniku odpowiednich przekształceń schematów zdań kategorycznych, obejmujących przestawianie podmiotu z orzecznikiem, ich negowanie oraz zmianę ilości bądź jakości zdania. Odmiany tych przekształceń to tzw. konwersja, obwersja, kontrapozycja i inwersja; tak samo są nazywane prawa wynikania między zdaniami uzyskanymi w wyniku takich przekształceń, tj. prawa konwersji, obwersji, kontrapozycji i inwersji.

Konwersja polega na przestawieniu podmiotu z orzecznikiem, z zachowaniem ilości zdań (konwersja zwykła), albo na przestawieniu i zmianie ilości zdania na szczegółową (konwersja z ograniczeniem). W jej wyniku uzyskuje się następujące prawa:

- konwersja zwykła: $S e P \Leftrightarrow P e S, S i P \Leftrightarrow P i S,$
- konwersja ograniczona: $S a P \Rightarrow P i S, S e P \Rightarrow P o S,$

na których można oprzeć dwanaście schematów (reguł) niezawodnego wnioskowania.

Na przykład prawo $S e P \Leftrightarrow P e S$ daje podstawę czterem niezawodnym schematom:

$$\frac{S e P}{P e S}, \frac{P e S}{S e P}, \frac{\sim P e S}{\sim S e P} \text{ i } \frac{\sim S e P}{\sim P e S},$$

a prawo $S e P \Rightarrow P o S$ – dwóm: $\frac{S e P}{P o S} \text{ i } \frac{\sim P o S}{\sim S e P}.$

W wyniku obwersji, polegającej na negacji orzecznika i zmianie jakości zdania, uzyskuje się cztery tak przekształcone zdania i cztery równoważnościowe prawa:

$S a P \Leftrightarrow S e n P$, $S i P \Leftrightarrow S o n P$, $S e P \Leftrightarrow S a n P$, $S o P \Leftrightarrow S i n P$
(czyli szesnaście niezawodnych reguł wnioskowania).

Dokonując kontrapozycji, zawsze przedstawiamy podmiot i orzecznik oraz negujemy i podmiot, i orzecznik (kontrapozycja zupełna) albo negujemy tylko podmiot (kontrapozycja częściowa, ograniczona); może się przy tym zmieniać ilość i jakość funktorów (zdań kategorycznych). Oto relacje między zdaniami kategorycznymi a uzyskanymi z nich w wyniku kontrapozycji:

– kontrapozycja zupełna:

$S a P \Leftrightarrow n P a n S$, $S o P \Leftrightarrow n P o n S$, $S e P \Rightarrow n P o n S$,

– kontrapozycja ograniczona:

$S a P \Leftrightarrow n P e S$, $S o P \Leftrightarrow n P i S$, $S e P \Rightarrow n P i S$.

Prawa te dają podstawę dwudziestu schematom niezawodnego wnioskowania (dla zdania $S i P$ nie ma analogicznych praw).

Inwersja polega na zmianie, a dokładniej – na ograniczeniu ilości zdania oraz zaprzeczeniu podmiotu i orzecznika (inwersja zupełna) albo na ograniczeniu ilości i zmianie jakości zdania oraz zaprzeczeniu podmiotu (inwersja częściowa, niezupełna). W wyniku tych przekształceń uzyskuje się cztery prawa sylogistyki:

– inwersja zupełna: $S a P \Rightarrow n S i n P$, $S e P \Rightarrow n S o n P$,

– inwersja niezupełna: $S a P \Rightarrow n S o P$, $S e P \Rightarrow n S i P$.

Prawa te dają podstawę ośmiu schematom niezawodnego wnioskowania.

3.2. Sprawdzanie poprawności logicznej wnioskowań ze zdaniami kategorycznymi

Sylogizmem będziemy nazywali, rozszerzając tradycyjne znaczenie tego terminu, implikację zbudowaną ze zdań kategorycznych taką, że następnik jest zdaniem kategorycznym, a poprzednik albo jest zdaniem kategorycznym zawierającym te same terminy co następnik, albo jest koniunkcją dwóch zdań kategorycznych, które (i) mają jeden termin wspólny, niewystępujący w następniku, (ii) ich terminy różne są podmiotem lub orzecznikiem następnika; a przy tym wszystkie zdania kategoryczne danej implikacji, jak i występujące w nich terminy mogą być zanegowane.

Sylogizmem – a mówiąc ściślej i w terminologii tradycyjnej – trybem sylogistycznym będziemy nazywać także schematy wnioskowań zbudowanych ze zdań kategorycznych, w których zdania z poprzednika takiej implikacji są założeniami, a następnik jest wnioskiem.

3.2.1 Tradycyjne metody sylogistyki

Tradycyjne metody wymagają dokładniejszego opisu sylogizmów. Trzeba, po pierwsze, znać rodzaje terminów oraz przesłanek występujących w sylogizmie. Mianowicie:

- termin większy to orzecznik (*P*) wniosku, mniejszy to jego podmiot (*S*), a średni (*M*) to termin wspólny dla przesłanek;
- przesłanka większa to zawierająca termin większy, a przesłanka mniejsza zawiera termin mniejszy.

3.2.1.1 Niezawodne tryby wnioskowania

Tryby sylogistyczne są dzielone na rodzaje, zwane tradycyjnie figurami (od I do IV). By podział ten był jednoznaczny, przyjmuje się umowy co do kolejności zapisu przesłanek (schematów przesłanek) w trybie, tj. najpierw w schemacie ma być zapisana przesłanka większa, po niej mniejsza. Kryterium podziału trybów na rodzaje jest rola, jaką termin średni pełni w przesłankach, tzn. czy jest w nich podmiotem, czy orzecznikiem. Mianowicie:

- w tzw. figurze pierwszej są wszystkie tryby, w których termin średni jest podmiotem w przesłance większej, a orzecznikiem w mniejszej;
- w schematach figury drugiej termin ten jest orzecznikiem w obu przesłankach;
- w figurze trzeciej jest w schematach wnioskowania podmiotem w obu przesłankach;
- a w zbiorze trybów zebranych w figurze czwartej jest orzecznikiem w przesłance większej i podmiotem w przesłance mniejszej.

Kryterium tego podziału jest schematycznie wskazane w poniższej tabeli.

I	II	III	IV
<i>MfP</i> <i>SfM</i>	<i>PfM</i> <i>SfM</i>	<i>MfP</i> <i>MfS</i>	<i>PfM</i> <i>MfS</i>
<i>SfP</i>	<i>SfP</i>	<i>SfP</i>	<i>SfP</i>

W schematach tych *f* jest zmienną funktorową, za którą można podstawić symbole stałe ze zbioru $\{a, e, i, o\}$. Spośród 256 trybów (tzw. klasycznych), uzyskanych w wyniku wszystkich możliwych podstawień w przesłankach i wniosku, tylko 24 są niezawodne (poprawne, słuszne). Dla ich rozpoznawania są stosowane ułatwiające zapamiętanie nazwy: użyte w nich samogłoski jednoznacznie wskazują na stałą podstawianą za *f* w kolejnych zdaniach kategoriycznych sylogizmu, tj. w przesłance większej, mniejszej oraz we wniosku (istotna jest taka właśnie kolejność, zgodna z umową co do zapisu trybów).

I tak, pośród trybów figury I poprawne są: **Barbara**, **Celarent**, **Darii**, **Ferio** oraz **Barbari** i **Celaront**. Dwa ostatnie tryby są tzw. osłabionymi wersjami dwóch trybów pierwszych – w tym sensie, że zamiast uprawnionego wniosku ogólnego jest w nich przyjmowany podporządkowany wnioskowi ogólnemu wniosek szczegółowy.

Barbara	Celarent	Darii	Ferio	Barbari	Celaront
<i>MaP</i> <i>SaM</i>	<i>MeP</i> <i>SaM</i>	<i>MaP</i> <i>SiM</i>	<i>MeP</i> <i>SiM</i>	<i>MaP</i> <i>SaM</i>	<i>MeP</i> <i>SaM</i>
<i>SaP</i>	<i>SeP</i>	<i>SiP</i>	<i>SoP</i>	<i>SiP</i>	<i>SoP</i>

- Niezawodne tryby figury II są wskazane mnemotechnicznymi słowami: Cesare, Camestres, Festino, Baroco oraz Cesaro i Camestros.
- Odpowiednie wskaźniki dla trybu trzeciego to Darapti, Disamis, Datisi, Felapton, Bocardo, Ferison.
- Niezawodne schematy wnioskowań podpadających pod figurę IV to odpowiedniki słów Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison oraz Calemos.

Poprawne formalnie są także wszystkie wnioskowania, których schematy da się sprowadzić do któregoś z trybów niezawodnych na podstawie praw kwadratu logicznego i przekształcania zdań kategoriycznych oraz po ich zapisaniu zgodnie z kolejnością: przesłanka większa, przesłanka mniejsza. Na przykład, dopiero gdy w zapisie wnioskowań o schematach:

$$(NaS \wedge NeP) \Rightarrow SoP,$$

$$(SaP \wedge PaM) \Rightarrow SaM,$$

oraz $(S a M \wedge S e P) \Rightarrow M o P$

zmieni się kolejność przesłanek, uzyskuje się tryby:

<i>N e P</i>	<i>P a M</i>	<i>S e P</i>
<i>N a S</i>	<i>S a P</i>	<i>S a M</i>
<i>S o P</i>	<i>S a M</i>	<i>M o P</i>

które można rozpoznać jako Felapton z figury III (wnioskowanie pierwsze i trzecie) oraz Barbara z figury I¹³.

3.2.1.2 Dyrektywy (warunki) dla przesłanek i wniosku

Do sprawdzania poprawności formalnej wnioskowań sylogistycznych są także stosowane dyrektywy (warunki), które wnioskowanie poprawne logicznie musi spełniać. Są one rozmaicie formułowane, w zaproponowanym tu ujęciu są podzielone na wymagania dotyczące przesłanek oraz warunki nakładane na wniosek. Mianowicie:

- D(i)** Pośród przesłanek ma być (co najmniej jedna) przesłanka twierdząca oraz przesłanka ogólna, a termin średni musi być w przesłankach (w co najmniej jednej) rozłożony;
- D(ii)** wniosek może być twierdzący, tylko gdy obie przesłanki są twierdzące, a ogólny, tylko gdy obie przesłanki są ogólne oraz termin rozłożony we wniosku musi być rozłożony w przesłankach.

¹³ W nazwach trybów figur II–IV są także wskazane sposoby sprowadzania danego trybu do odpowiedniego z figury I, której tryby są traktowane jako podstawowe. Pierwsza litera nazwy trybu wskazuje, że dany tryb jest sprowadzalny do tego trybu figury I, który rozpoczyna się na tę samą literę, np. Cesare i Camestres do Celarent, Festino do Ferio itd. Jeśli w nazwie trybu jest litera *r*, to należy przeprowadzić dowód założeniowy niewprost, uzyskując sprzeczność z odpowiednim trybem figury I, pozostałe tryby są sprowadzane do figury I sposobem założeniowym wprost. Z kolei występujące po samogłoskach w nazwie trybu (czyli po symbolach *a*, *e*, *i*, *o* właściwych dla sylogistyki) spółgłoski *s*, *p* wskazują, że: daną przesłankę (tj. z samogłoską poprzedzającą spółgłoskę wskaźnikową) trzeba przekształcić zgodnie z prawem konwersji prostej (litera *s*) albo konwersji ograniczonej (litera *p*); a spółgłoska *m* wskazuje, że należy w dowodzonym trybie przestawić przesłanki (mniejszą potraktować jako większą). Zob.: L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 179–180; M. Lechniak, *Elementy logiki dla prawników*, Lublin 2012, s. 206–208, gdzie jest pełniejszy opis i przykłady wykorzystania tych wskaźników.

Przy tym: termin rozłożony (in. użyty w pełnym zakresie) to taki, który jest podmiotem zdania ogólnego lub orzecznikiem zdania przeczącego.

Każdy z warunków składowych **D(i)**–**(ii)** jest konieczny dla uznania wnioskovania za poprawne logicznie, a prawdziwa koniunkcja tych warunków wystarcza do ogłoszenia poprawności logicznej.

Można sprawdzić, że dyrektywy **D(i)**–**(ii)** są spełnione dla każdego z wyżej wskazanych 24 trybów, tj. *Barbara*, *Celarent*, ..., *Fresison*, *Celmos*. Stosując ten zestaw warunków, można także, bez dodatkowych przekształceń, sprawdzić poprawność wnioskowań, których przesłanki są zapisane w dowolnej kolejności, o ile nie zawierają negacji.

Na przykład warunki poprawności **D(i)** oraz **D(ii)** są spełnione dla wnioskowań:

$$(N a S \wedge N e P) \Rightarrow S o P;$$

$$(S a P \wedge P a M) \Rightarrow S a M;$$

$$(S a M \wedge S e P) \Rightarrow M o P.$$

D(i): W każdym wnioskowaniu jest przesłanka twierdząca (w drugim obie są twierdzące), jest przesłanka ogólna (w każdym są dwie ogólne) i jest rozłożony termin średni (*N* w pierwszym wnioskowaniu, *P* w drugim i *S* w trzecim są podmiotami zdania ogólnego).

D(ii): Gdy chodzi o wymagające uzasadnienia własności wniosku, to twierdzący, a także ogólny jest tylko wniosek drugiego rozumowania, jest to jednak uprawnione, bo obie jego przesłanki też są twierdzące i obie też są ogólne; co się z kolei tyczy rozłożenia terminów we wnioskach tych rozumowań, to w pierwszym wniosku terminem rozłożonym jest *P* (jest orzecznikiem przeczącego wniosku) – i jest on również rozłożony w przesłankach (w drugiej jest orzecznikiem zdania przeczącego); w drugim wniosku rozłożony jest termin *S* (jako podmiot zdania ogólnego) i jest też rozłożony w przesłankach (jest podmiotem ogólnej przesłanki pierwszej); a w trzecim wniosku rozłożony jest termin *P* (jako orzecznik zdania przeczącego) i jest on też rozłożony w przesłance drugiej tego wnioskowania.

By natomiast zastosować te tradycyjne sposoby (mnemotechniczny i dyrektywalny) do wnioskowań zawierających negacje przedzdaniowe lub przednazwowe, trzeba najpierw schematy takich wnioskowań sprowadzić – korzystając z praw kwadratu logicznego i przekształcania zdań kategoriycznych – do schematów równoważnych z oryginalnymi, a niezawierających negacji. Oto przykłady:

► Schemat wnioskowania:

$$(P a n M \wedge S e n P) \Rightarrow \sim(M i S)$$

da się przekształcić – stosując do tej implikacji regułę zastępowania dla równoważności oraz podstawienia prawa obwersji: $P a n M \Leftrightarrow P e M$ oraz $S e n P \Leftrightarrow S a P$, a także prawo $\sim(M i S) \Leftrightarrow M e S$ – do równoważnej z nim implikacji: $(P e M \wedge S a P) \Rightarrow M e S$.

Wnioskowanie to spełnia warunki **D(i)–(ii)**: pośród przesłanek jest ogólna i twierdząca, termin średni (P) jest w przesłankach rozłożony (w pierwszej jest podmiotem zdania ogólnego); wniosek ogólny jest uprawniony, bo obie przesłanki są ogólne, oba terminy wniosku są w nim rozłożone i są też rozłożone w przesłankach (M jest orzecznikiem zdania przeczącego, a S jest podmiotem zdania ogólnego).

Gdy w schemacie dla tego wnioskowania zmieni się kolejność przesłanek (zgodnie z umową co do zapisu trybów), uzyskuje się schemat:

$$(S a P \wedge P e M) \Rightarrow M e S,$$

podpadający pod tryb Calemes figury IV.

► Równoważnościowego wyeliminowania negacji wymaga również implikacja: $(\sim(S o P) \wedge \sim(M a P)) \Rightarrow \sim(M e n S)$.

Zgodnie z prawami kwadratu logicznego $\sim(S o P) \Leftrightarrow S a P$, $\sim(M a P) \Leftrightarrow M o P$, $\sim(M e n S) \Leftrightarrow M i n S$ oraz prawem obwersji $M i n S \Leftrightarrow M o S$ implikacja ta jest równoważna z: $(S a P \wedge M o P) \Rightarrow M o S$.

Wnioskowanie to ma przesłankę twierdzącą i przesłankę ogólną (pierwszą), termin średni jest rozłożony (w drugiej przesłance); wniosek nie jest ogólny ani twierdzący, a rozłożony w nim termin S jest też rozłożony w przesłankach (w pierwszej jest podmiotem zdania ogólnego). Schemat tego wnioskowania jest zgodny z trybem Baroco figury II.

► Stosując do $(\sim S o n P \wedge M o n P) \Rightarrow M i n S$ regułę zastępowania, korzysta się z równoważności (prawa kwadratu i praw obwersji): $\sim(S o n P) \Leftrightarrow S a n P$, $S a n P \Leftrightarrow S e P$, $M o n P \Leftrightarrow M i P$, $M i n S \Leftrightarrow M o S$ – uzyskując implikację równoważną z wyjściową: $(S e P \wedge M i P) \Rightarrow M o S$.

Wnioskowanie ma przesłankę twierdzącą i przesłankę ogólną, termin P jest rozłożony w pierwszej przesłance; wniosek nie jest ogólny ani twierdzący, rozłożony w nim termin S jest także rozłożony w pierwszej przesłance (podmiot zdania ogólnego) – wnioskowanie jest więc niezawodne wg reguł **D(i)–(ii)**. Jego schemat jest niezawodnym trybem figury II, tj. Festino.

► Przekształceń umożliwiających stosowanie tradycyjnych metod sprawdzania poprawności logicznej wymagają także schematy:

$P e n M$ $M a n S$	$\sim(R o M)$ $\sim(S a M)$	$\sim(T o n S)$ $E o n S$	$M a n R$ $M o n S$
$\sim(S i P)$	$\sim(S e n R)$	$E i n T$	$\sim(S e n R)$

Można je zapisać równoważnie – zgodnie z prawami sprzeczności z kwadratu i prawami obwersji – w postaci schematów:

$P a M$ $M e S$	$R a M$ $S o M$	$T e S$ $E i S$	$M e R$ $M i S$
$S e P$	$S o R$	$E o T$	$S o R$

w których widać, że są to tryby niezawodnego wnioskowania, kolejno: Calemes figury IV, Baroco i Festino figury II oraz Ferison figury III.

► Zastosowanie praw kwadratu logicznego i obwersji do implikacji:

$$(S o n P \wedge \sim M e P) \Rightarrow M e S \quad \text{oraz} \quad (S e n P \wedge P o n M) \Rightarrow \sim(S e M)$$

prowadzi do ich zapisania w postaci równoważnej bez negacji:

$$(S i P \wedge M i P) \Rightarrow M e S \quad \text{oraz} \quad (S a P \wedge P i M) \Rightarrow S i M.$$

Schematy te nie spełniają warunków **D(i)–(ii)**: w pierwszym nie ma przesłanki ogólnej, a w drugim jest wprawdzie przesłanka i ogólna, i twierdząca, lecz termin średni (P) nie jest w przesłankach rozłożony. Wnioskowania o tych schematach nie są więc poprawne logicznie, a potwierdza tę ocenę fakt, że pośród trybów figury II, do której należy schemat pierwszego wnioskowania, nie ma trybu niezawodnego zgodnego z tym schematem; tak samo pośród trybów figury I – bo do niej należy schemat wnioskowania drugiego zapisany w kolejności przesłanek ($P i M \wedge S a P$) – nie ma trybu niezawodnego o układzie funktorów: i, a, i .

► Nie są także poprawne logicznie wnioskowania podpadające pod takie na przykład schematy:

$E o n W$ $\sim(T e W)$	$S a n M$ $n D a n S$
$T e E$	$\sim(D i M)$

Równoważne odpowiedniki tych schematów – uzyskane na podstawie praw sprzeczności oraz obwersji i kontrapozycji ($n D a n S \Leftrightarrow S a D$ jest podstawieniem prawa kontrapozycji $S a P \Leftrightarrow n P a n S$) – nadające się do ich oceny metodami tradycyjnymi, wyglądają tak:

$E i W$	$S e M$
$T i W$	$S a D$
$T e E$	$D e M$

W figurze II, do której należy schemat pierwszego wnioskowania, nie ma niezawodnego trybu o układzie funktorów i, i, e . Widać także, że wnioskowanie to nie spełnia warunku poprawności $\mathbf{D(i)}$, brak w nim bowiem przesłanki ogólnej. Z kolei schemat drugiego wnioskowania należy do figury II, w której nie ma trybu niezawodnego e, a, e . Co do sprawdzania na podstawie dyrektyw $\mathbf{D(i)-(ii)}$ to wnioskowanie o takim schemacie spełnia wprawdzie warunek $\mathbf{D(i)}$, bo jest przesłanka twierdząca i jest przesłanka ogólna oraz termin średni jest rozłożony (w obu przesłankach), spełnia także częściowo wymóg $\mathbf{D(ii)}$, tj. w części wymagającej dla wniosku ogólnego dwóch ogólnych przesłanek, lecz nie spełnia wymagania, by termin rozłożony we wniosku był rozłożony także w przesłankach: oba terminy wniosku są bowiem rozłożone (D jest podmiotem zdania ogólnego, M jest orzecznikiem przeczącego), natomiast w przesłankach rozłożony jest tylko termin M (jest orzecznikiem zdania przeczącego).

3.2.2 Udoskonalona metoda Venna

Metoda Venna (zwana także metodą Eulera) też jest od dawna znanym sposobem sprawdzania relacji logicznych między zdaniami. Zastosowana do wnioskowań sylogistycznych jest oparta na opisanych wyżej sposobach zaznaczania na rysunkach relacji logicznych ogłaszanych w zdaniach kategorycznych. Metoda ta, zmodyfikowana odpowiednio do jej stosowania do sprawdzania poprawności logicznej wnioskowań zbudowanych ze zdań kategorycznych, może być używana zarówno do wnioskowań bezpośrednich (z jednej przesłanki), do klasycznych sylogizmów, jak również do wnioskowań z więcej niż dwiema przesłankami, choć im więcej jest w nich terminów, tym trudniej jest wykonać potrzebny rysunek. Formułowane w języku naturalnym wnioskowania zbudowane ze zdań kategorycznych najczęściej jednak mają jedną lub dwie przesłanki. Proste wnioskowania da się wprawdzie łatwiej sprawdzić którymś ze sposobów tradycyjnych, zmodyfikowana dla potrzeb sylogistyki metoda diagramów Venna jest jednak szczególnie przydatna,

gdy trzeba oceniać sylogizmy z wieloma negacjami (przednazwowymi lub przedzdaniowymi)¹⁴.

Opis tej metody warto połączyć z przykładami jej zastosowania do sprawdzenia konkretnych sylogizmów. Sprawdzanie poprawności logicznej konkretnych rozumowań ze zdaniemi kategorycznymi jest jednocześnie sprawdzaniem niezawodności schematów i ogólnej ważności implikacji, pod które podpadają dane rozumowania.

(1) Ponieważ niektórzy studenci są bogaci, więc niektórzy studenci nie są bogaci.

(2) Ponieważ nie wszystkie teściowe nie są złośliwe, a każda teściowa jest kobietą, więc niektóre kobiety są złośliwe.

W pierwszym rozumowaniu wniosek jest wyprowadzony z jednej tylko przesłanki (tzw. wnioskowanie bezpośrednie), drugie wnioskowanie jest klasycznym sylogizmem, tj. wnioskowaniem z dwóch przesłanek o odpowiednio dobranych i rozmieszczonych terminach.

Oto opis kolejnych działań składających się na tę metodę.

I. Zbudować schemat rozumowania i wyeliminować negacje przedzdaniove.

U w a g i:

(i) W schematach zdań lepiej jest rozpocząć od wpisania symbolu funktora oraz używać pierwszej (dużej) litery nazw jako ich skrótów, nie zapominając o zaznaczeniu negacji przednazwowych występujących w rozumowaniu.

Schematy wnioskowań (1) i (2), wykonane zgodnie z tą uwagą, wyglądają następująco:

$$\begin{array}{r} \frac{S i B}{S o B} \qquad \frac{\sim(T a n Z)}{T a K} \\ \qquad \qquad \qquad \frac{K i Z}{\qquad \qquad \qquad} \end{array}$$

¹⁴ Metoda zwana tu zmodyfikowaną jest oparta na opisanej w: L. Gumański, *Wprowadzenie w logikę współczesną*, dz. cyt., s. 92–100, a modyfikacja polega na: wskazanym w kroku I.ii eliminowaniu negacji, upraszczającym odpowiedni diagram i sprawdzanie wynikania, oraz zaproponowanym sposobie reprezentowania pól bez ich rysowania (jest opisany w końcowej części niniejszej prezentacji), który jest przydatny zwłaszcza wtedy, gdy trudno jest wykonać rysunek odpowiedni dla ocenianego wnioskowania, jak jest w przypadku każdego wnioskowania zawierającego więcej niż trzy terminy.

(ii) wyeliminować negacje przedzdaniowe znaczy zastąpić w schemacie rozumowania zdania categoryczne poprzedzone negacją zdaniami równoważnymi bez negacji – zgodnie z prawami kwadratu logicznego.

$\sim(S a P) \Leftrightarrow S o P$	$\sim(S e P) \Leftrightarrow S i P$	$\sim(S i P) \Leftrightarrow S e P$	$\sim(S o P) \Leftrightarrow S a P$
-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

W schemacie pierwszego wnioskowania nie ma zdań zaprzeczonych, natomiast w drugim schemacie trzeba zastąpić zdanie $\sim(T a n Z)$ zdaniem równoważnym, tj. $T o n Z$:

$$\frac{\begin{array}{c} T o n Z \\ T a K \\ \hline K i Z \end{array}}$$

(iii) Podstawą dla kolejnych czynności jest schemat otrzymany po wyeliminowaniu negacji przedzdaniowych.

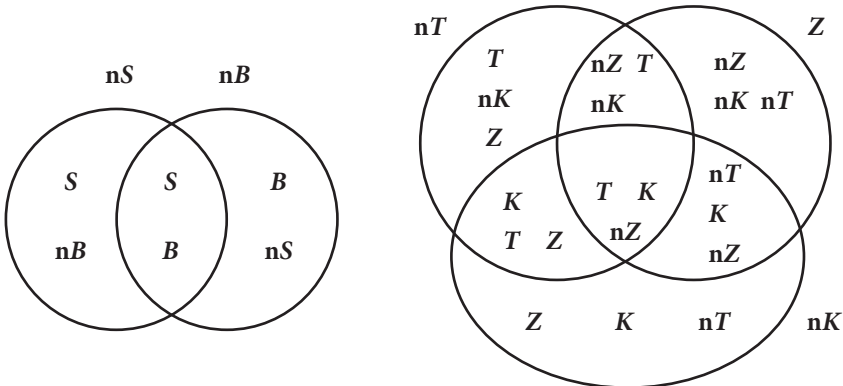
II. Wykonać rysunek odpowiedni do schematu wnioskowania.

U w a g i:

(i) Na rysunku powinno być tyle krzyżujących się zakresów (okręgów), ile jest terminów w schemacie. W pierwszym wnioskowaniu są dwa terminy (S oraz B), w drugim są trzy (T , nZ , K). Nie są odrębnymi terminami symbol nazwy i jego negacja (np. nZ oraz Z).

(ii) W każdej części rysunku (wliczając otoczenie) powinien być wpisany termin bądź jego zaprzeczenie. Jeśli są dwa terminy, każdy z nich jest wpisany w dwóch częściach rysunku i zaprzeczenie każdego z nich w dwóch; dla trzech terminów – w czterech częściach rysunku.

Oto rysunki odpowiednie dla powyższych wnioskowań.



drugiej przesłanki, wykreślamy oba pola, na których T jest z nK , w tym również pole T , nK , Z , na którym jest postawiony znak plus.

IV. Odczytać z rysunku, czy wniosek wynika z przesłanek, stosując odpowiednią dla wniosku regułę wynikania; sformułować końcową ocenę wnioskowania.

Mówiąc ogólnikowo, wniosek wynika z przesłanek, gdy po zaznaczeniu ich prawdziwości są na rysunku spełnione związki ogłoszone we wniosku. Mówiąc dokładniej, wniosek wynika wtedy i tylko, gdy jest spełniona reguła wynikania właściwa dla danego wniosku. Sprawdzając, czy jest spełniona reguła, bierzemy pod uwagę wszystkie pola, łącznie z otoczeniem, lecz tylko pola niezakreskowane. Reguły dla poszczególnych rodzajów zdań są następujące:

1. Zdanie ogólnotwierdzące wynika wtedy i tylko, gdy jest na rysunku pole, na którym znajduje się i podmiot, i orzecznik wniosku, a przy tym podmiot znajduje się tylko na tym polu;
2. wniosek ogólnoprzeczący wynika wtedy i tylko, gdy nie ma takiego pola, na którym podmiot i orzecznik występują razem;
3. zdanie szczegółowotwierdzące wynika zawsze i tylko wtedy, gdy jest takie pole tzw. jednoznaczne, na którym są podmiot i orzecznik wniosku;
4. wniosek szczegółowoprzeczący – gdy jest pole jednoznaczne, na którym jest podmiot, a nie ma orzecznika, czyli jest zaprzeczenie orzecznika wniosku.

W regułach dla wniosków szczegółowych pojawia się pojęcie tzw. pola jednoznacznego. Otóż pole jednoznaczne to takie, które jest wyróżnione przez jakiś symbol; „wyróżnione” w tym sensie, że dany symbol występuje wyłącznie na tym polu (warto przypomnieć – spośród pól niezakreskowanych); a symbole to: terminy, zaprzeczenia terminów oraz znak plus. Lepiej jest odrębnie zaznaczyć symbol wyróżniający pole (np. otoczeniem lub podkreśleniem), bo tym samym zaznacza się pole jednoznaczne, na którym trzeba sprawdzać, czy jest spełniona odpowiednia reguła wynikania.

Proste jest sprawdzenie wynikania w pierwszym z przykładowych rozumowań. Ponieważ jego wniosek jest zdaniem szczegółowoprzeczącym, stosujemy czwartą regułę, czyli sprawdzamy najpierw, czy w ogóle jest pole jednoznaczne, a następnie dopiero, czy na polu jednoznacznym jest tak, jak tego wymaga reguła. Stwierdzamy, że na rysunku jest wprawdzie pole jednoznaczne, tj. część wspólna zakresów S i B , wyróżniona przez

znak plus, lecz na polu tym są i podmiot S , i orzecznik B wniosku, a powinny się znajdować, zgodnie z regułą czwartą, podmiot i zaprzeczenie orzecznika, czyli S i nB . Zatem reguła wynikania nie jest spełniona, co znaczy, że wniosek nie wynika z przesłanek, a zatem schemat nie jest niezawodny, a jeszcze inaczej mówiąc – implikacja ($S i B \Rightarrow S o B$) nie jest prawem sylogistyki, czy ogólniej – WRP. Wnioskowanie to nie jest więc poprawne pod względem logicznym, mimo że i jego założenie, i wniosek są zdaniem prawdziwymi. Sprawdzana była jednak nie prawdziwość, lecz poprawność logiczna, czyli relacja wynikania między przesłankami a wnioskiem.

Oceniając drugie wnioskowanie, korzystamy z reguły trzeciej. Jak w poprzednim przykładzie szukamy najpierw pola jednoznaczego: jest nim część rysunku z symbolami T , K , Z oraz z wyróżniającym symbolem plus (znak plus był wprawdzie postawiony także na polu T , Z , nK , lecz nie jest teraz brany pod uwagę, ponieważ pole to jest wykreślone). Sprawdzamy więc, czy na tym polu występują podmiot i orzecznik wniosku. Rzeczywiście, znajdują się tam symbole K i Z , co świadczy o wynikaniu wniosku, a więc o tym, że schemat tego wnioskowania jest prawem, a samo wnioskowanie jest poprawne pod względem logicznym.

Zaletą metody Venna opisanej w punktach **I–IV** – widoczną zwłaszcza gdy się ją porówna z metodą mnemotechniczną (figur i trybów) oraz dyrektywalną – jest to, że można ją stosować bezpośrednio do oceny wnioskowań ze zdaniemi kategorycznymi: „bezpośrednio”, tj. bez uprzedniego nadawania schematowi wnioskowania formy nadającej się do jego oceny innymi metodami (porównawcze przykłady zastosowania tych metod są analizowane także w kolejnym paragrafie). Natomiast wadą tej metody jest wymóg wykonania odpowiedniego rysunku, co jest uciążliwe już przy trzech terminach, a nasila się, gdy w zdaniach kategorycznych ocenianego wnioskowania terminów jest więcej. Już bowiem dla wnioskowań z czterema terminami na odpowiednim dla nich rysunku jest 16 pól, przy pięciu terminach są 32 części rysunku itd. (ogólnie pól jest 2^n , gdzie n to liczba terminów). Wykonanie takich rysunków jest możliwe, lecz trudności z tym związane właściwie wykluczają zastosowanie metody rysunków Venna dla wnioskowań z więcej niż czterema terminami. W takich sytuacjach można jednak zastosować tę metodę w wersji skróconej, polegającej na reprezentowaniu pól bez ich rysowania.

Na przykład dla wnioskowanie o schemacie (zgodnym z rozbudowanym trybem *Barbara*):

$$(A a B \wedge B a C \wedge C a D) \Rightarrow A a D$$

odpowiedni rysunek zawiera 16 pól, które są reprezentowane następującymi zbiorami symboli $\{A, B, C, D\}$, $\{nA, B, C, D\}$, $\{A, nB, C, D\}$, $\{A, B, nC, D\}$, $\{A, B, C, nD\}$, $\{nA, nB, C, D\}$, $\{nA, B, nC, D\}$, $\{nA, B, C, nD\}$, $\{A, nB, nC, D\}$, $\{A, nB, C, nD\}$, $\{A, B, nC, nD\}$, $\{nA, nB, nC, D\}$, $\{nA, nB, C, nD\}$, $\{A, nB, nC, nD\}$. Zanaczenie na rysunku kolejnych przesłanek ogólnych wymaga wykreślenia pól odpowiadającym zbiorom, które – zgodnie z daną przesłanką – są puste, co w opisywanej teraz metodzie skróconej można zaznaczać wykreśleniem odpowiedniego zbioru symboli. I tak, zgodnie z pierwszą przesłanką, pusty jest każdy zbiór współoznaczany przez symbole A i nB , tj.:

$\{A, B, C, D\}$, $\{nA, B, C, D\}$, $\{\overline{A}, nB, \overline{C}, \overline{D}\}$, $\{A, B, nC, D\}$, $\{A, B, C, nD\}$, $\{nA, nB, C, D\}$, $\{nA, B, nC, D\}$, $\{nA, B, C, nD\}$, $\{\overline{A}, nB, nC, \overline{D}\}$, $\{\overline{A}, nB, \overline{C}, nD\}$, $\{A, B, nC, nD\}$, $\{nA, nB, nC, D\}$, $\{nA, nB, C, nD\}$, $\{nA, B, nC, nD\}$, $\{\overline{A}, nB, nC, nD\}$, $\{nA, nB, nC, nD\}$.

Uwzględnienie drugiej przesłanki wymaga uznania za puste zbiorów oznaczanych przez symbole B i nC :

$\{A, B, C, D\}$, $\{nA, B, C, D\}$, $\{\overline{A}, nB, \overline{C}, \overline{D}\}$, $\{\overline{A}, \overline{B}, nC, \overline{D}\}$, $\{A, B, C, nD\}$, $\{nA, nB, C, D\}$, $\{\overline{nA}, \overline{B}, nC, \overline{D}\}$, $\{nA, B, C, nD\}$, $\{\overline{A}, nB, nC, \overline{D}\}$, $\{\overline{A}, nB, \overline{C}, nD\}$, $\{\overline{A}, \overline{B}, nC, nD\}$, $\{nA, nB, nC, D\}$, $\{nA, nB, C, nD\}$, $\{\overline{nA}, \overline{B}, nC, nD\}$, $\{\overline{A}, nB, nC, nD\}$, $\{nA, nB, nC, nD\}$,

a zgodnie z przesłanką trzecią puste są zbiory oznaczane przez symbole C i nD :

$\{A, B, C, D\}$, $\{nA, B, C, D\}$, $\{\overline{A}, nB, \overline{C}, \overline{D}\}$, $\{\overline{A}, \overline{B}, nC, \overline{D}\}$, $\{\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, nD\}$, $\{nA, nB, C, D\}$, $\{\overline{nA}, \overline{B}, nC, \overline{D}\}$, $\{\overline{nA}, \overline{B}, \overline{C}, nD\}$, $\{\overline{A}, nB, nC, \overline{D}\}$, $\{\overline{A}, nB, \overline{C}, nD\}$, $\{\overline{A}, \overline{B}, nC, nD\}$, $\{nA, nB, nC, D\}$, $\{\overline{nA}, nB, \overline{C}, nD\}$, $\{\overline{nA}, \overline{B}, nC, nD\}$, $\{\overline{A}, nB, nC, nD\}$, $\{nA, nB, nC, nD\}$.

Na odpowiednim rysunku niezakreskowane pozostałyby więc jedynie pola reprezentowane teraz przez zbiory symboli $\{A, B, C, D\}$, $\{nA, B, C, D\}$, $\{nA, nB, nC, D\}$, $\{nA, nB, nC, nD\}$. Jak widać, reguła wynikania dla wniosku ogólnotwierdzącego $A a D$ jest spełniona, jako że jest pole (tu – pierwsze), na którym symbol A występuje razem z D , a przy tym A jest tylko na tym polu.

Dla wnioskowania o schemacie $(A a B \wedge B a C \wedge C a D) \Rightarrow A i D$ (rozbudowany tryb *Barbari*) uwzględnienie przesłanek prowadzi do tego samego zestawu „pól” niezakreskowanych, polem jednoznacznym, wyróżnionym przez symbol A , jest $\{A, B, C, D\}$ i są na tym polu, wymagane dla wniosku szczegółowotwierdzącego, symbole A oraz D .

Oczywiście tę metodę reprezentowania pól można stosować także w sytuacjach prostszych, tj. dla wnioskowań z mniejszą liczbą terminów. Na przykład dla sprawdzonych wyżej pełną metodą Venna schematów:

$S i B \Rightarrow S o B$ oraz $(T o nZ \wedge T a K) \Rightarrow K i Z$

odpowiednikami diagramów są:

$\{S, B\}, \{nS, B\}, \{S, nB\}, \{nS, nB\}$

oraz

$\{T, Z, K\}, \{nT, Z, K\}, \{T, nZ, K\}, \{T, Z, nK\}, \{nT, nZ, K\}, \{nT, Z, nK\},$
 $\{T, nZ, nK\}, \{nT, nZ, nK\}.$

Stosując metodę Venna skróconą do pierwszego z tych schematów, trzeba – zgodnie z przesłanką $S i B$ – wskazać znakiem + na niepustość zbioru oznaczonego symbolami S oraz B :

$\{S, B, +\}, \{nS, B\}, \{S, nB\}, \{nS, nB\}.$

Spośród powyższych symboli tylko znak + jest wyróżniający, więc tylko pole $\{S, B, +\}$ jest jednoznaczne (w sensie ustalonym w regułach wynikania dla wniosków szczegółowych) i na nim trzeba sprawdzać, czy występują – zgodnie z regułą 4. – symbole S oraz nB . Ponieważ nie ma drugiego z tych symboli, więc wniosek $S o B$ nie wynika ze zdania $S i B$.

W przypadku drugiego wnioskowania trzeba najpierw – zgodnie z przesłanką $T o nZ$ – zaznaczyć niepustość tych zbiorów spośród reprezentujących części diagramu Venna, które są oznaczone symbolami T oraz Z :

$\{T, Z, K, +\}, \{nT, Z, K\}, \{T, nZ, K\}, \{T, Z, nK, +\}, \{nT, nZ, K\}, \{nT, Z, nK\},$
 $\{T, nZ, nK\}, \{nT, nZ, nK\},$

a następnie – w myśl przesłanki $T a K$ – zaznaczyć pustość zbiorów oznaczanych symbolami T oraz nK :

$\{T, Z, K, +\}, \{nT, Z, K\}, \{T, nZ, K\}, \{\cancel{T}, Z, nK, +\}, \{nT, nZ, K\}, \{nT, Z, nK\},$
 $\{\cancel{T}, nZ, nK\}, \{nT, nZ, nK\}.$

Jak widać, reguła wynikania dla wniosku szczegółowotwierdzącego (reguła trzecia) jest spełniona, jako że jest pole jednoznaczne, wyróżnione znakiem +, tj. $\{T, Z, K, +\}$, i są na tym polu symbole K oraz Z ¹⁵.

¹⁵ Opisany sposób reprezentowania pól zaproponowałem po nieudanych próbach narysowania na zajęciach z logiki diagramu odpowiedniego dla wnioskowań z czterema terminami (błędy w kolejnych rysunkach trafnie dostrzegali p. Piotr Jastrzębski).

3.3 Interpretacja zdań kategorycznych w WRP

W zdaniach kategorycznych badanych w sylogistyce występują jedynie orzeczniki jednoargumentowe oraz stałe logiczne sylogistyki – symbolizowane przez a , e , i , o – które są wyrażeniami określającymi ilość, czyli kwantyfikatorami: każde (dla każdego), żadne (dla żadnego), niektóre (dla pewnego). Zdania kategoryczne da się więc zinterpretować w języku rachunku predykatów. Przyjmuje się zwykle następujący sposób przekładu zdań kategorycznych na zdania rachunku kwantyfikatorów (symbol S wskazuje na sylogistykę, choć interpretacja dotyczy dowolnych wnioskowań złożonych ze zdań kategorycznych):

S|WRP

$S a P \Leftrightarrow$ Nie istnieją S , które nie są $P \Leftrightarrow (\forall x) [S(x) \Rightarrow P(x)]$;

$S e P \Leftrightarrow$ Nie istnieją S , które są $P \Leftrightarrow (\forall x) [S(x) \Rightarrow \sim P(x)]$;

$S i P \Leftrightarrow$ Istnieją S , które są $P \Leftrightarrow (\exists x) [S(x) \wedge P(x)]$;

$S o P \Leftrightarrow$ Istnieją S , które nie są $P \Leftrightarrow (\exists x) [S(x) \wedge \sim P(x)]$.

Równoważności sformułowane w **S|WRP** dają podstawę tzw. słabej interpretacji sylogistyki. Dołączenie do tych równoważności warunku, że kategoria oznaczana przez S jest niepusta, tj. że: $(\exists x) S(x)$, jest interpretacją sylogistyki zwaną mocną. Sylogistykę można więc potraktować jako fragment klasycznego rachunku predykatów – mieści się w tej jego części, w której bada się relacje wynikania między zdaniami z predykatami jednoargumentowymi, a gdy się chce (zgodnie z ujęciem klasycznym) wykluczyć nazwy puste, wtedy w interpretacji zdań ogólnych trzeba dodać warunek istnienia (co najmniej jednego) indywiduum kategorii S .

Sylogizmy, zapisane w postaci formuł WRP, mogą być sprawdzane dowodowymi metodami tego rachunku. W pierwszym z poniższych przykładów są zapisane schematy wnioskowania, w języku sylogistyki i w języku WRP, w drugim implikacja zaczerpnięta z sylogistyki jest przełożona na implikację w języku WRP.

1) Schematy wnioskowania:

$$\frac{\begin{array}{l} S a P \\ P a M \end{array}}{S a M}$$

$$\frac{(\wedge x) [S(x) \Rightarrow P(x)] \quad (\wedge x) [P(x) \Rightarrow M(x)]}{(\wedge x) [S(x) \Rightarrow M(x)]}$$

Formuła WRP:

$$\{(\wedge x) [S(x) \Rightarrow P(x)] \wedge (\wedge x) [P(x) \Rightarrow M(x)]\} \Rightarrow (\wedge x) [S(x) \Rightarrow M(x)].$$

Dowód:

1. $(\wedge x) [S(x) \Rightarrow P(x)]$ {zał.}
2. $(\wedge x) [P(x) \Rightarrow M(x)]$ {zał.}

W wyniku opuszczenia kwantyfikatorów w założeniach:

3. $S(x) \Rightarrow P(x)$ {OΛ: 1}
4. $P(x) \Rightarrow M(x)$ {OΛ: 2}
5. $(S(x) \Rightarrow P(x)) \wedge (P(x) \Rightarrow M(x))$ {DK: 3, 4}

Korzystając z prawa przechodniości implikacji:

(*) $(\Phi \Rightarrow \Psi \wedge \Psi \Rightarrow X) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow X)$, uzyskuje się:

6. $S(x) \Rightarrow M(x)$ {RO: (*), 5}
- $(\wedge x) [S(x) \Rightarrow M(x)]$ {DΛ: 6}.

Dołączenie kwantyfikatora w ostatnim kroku jest poprawne, bo zmienna x nie jest wolna w założeniach (reprezentuje dowolny przedmiot).

2) Implikacja w języku sylogistyki: $(K a O \wedge K a S) \Rightarrow S i O$; przykład na język WRP: $((\wedge x) [K(x) \Rightarrow O(x)] \wedge (\wedge x) [K(x) \Rightarrow S(x)]) \Rightarrow (\vee x) [O(x) \wedge S(x)]$.

Dowód:

1. $(\wedge x) [K(x) \Rightarrow O(x)]$ {zał.}
2. $(\wedge x) [K(x) \Rightarrow S(x)]$ {zał.}

Przyjmujemy w dowodzie, zgodnie z mocną interpretacją sylogistyki, założenie:

3. $(\vee x) K(x)$

W wyniku opuszczenia kwantyfikatorów w założeniach:

4. $K(a)$ {OV: 3}
5. $K(a) \Rightarrow O(a)$ {OΛ: 1}
6. $K(a) \Rightarrow S(a)$ {OΛ: 2}
7. $O(a)$ {RO: 5, 4}
8. $S(a)$ {RO: 5, 6}
9. $O(a) \wedge S(a)$ {DK: 7, 8}
- $(\vee x) [O(x) \wedge S(x)]$ {DV: 9}.

*

Trafna ocena poprawności logicznej wnioskowania nie zależy, co oczywiste, od obranej metody jej sprawdzania. Łatwo jest sprawdzić, że niezawodne tryby sylogistyczne spełniają konieczne warunki poprawności stawiane w metodzie dyrektywnej oraz udowodnić w WRP implikacje odpowiadające niezawodnym schematom wnioskowania. Spośród dostępnych środków lepiej jest jednak wybrać ten, który najszybciej doprowadza do sformułowania oceny poprawności konkretnego wnioskowania.

Dla ilustracji niezależności oceny poprawności od metod i porównanie różnej ich wydajności warto każdą z nich zastosować do wybranych wnioskowań (rysunki wymagane w metodzie Venna będą jedynie opisywane).

a) Ponieważ niektóre zdania (Z) nie są nieobalane (nO) i niektóre dogmaty (D) nie są nieobalane, więc niektóre zdania są dogmatami.

Do oceny, że wnioskowanie **a)** nie jest poprawne logicznie, prowadzą i metody tradycyjne, i metoda Venna, a to wskazuje, że schemat tego wnioskowania nie jest prawem i szukanie jego dowodu w WRP bezzasadne.

– *Metoda figur/trybów*

Korzystając z praw obwersji, można implikację ($Z \text{ on } O \wedge D \text{ on } O$) $\Rightarrow Z i D$ zapisać w postaci równoważnej ($Z i O \wedge D i O$) $\Rightarrow Z i D$). By zastosować do niej sprawdzanie wg trybów niezawodnych, trzeba zapisać jej schemat w kolejności przesłanka większa, przesłanka mniejsza:

II
$D i O$ $Z i O$
$Z i D$

Pośród niezawodnych trybów figury II nie ma schematu i, i, i .

– *Metoda dyrektyw*

Wnioskowanie to spełnia wprawdzie dyrektywy dla wniosku, lecz nie spełnia warunku dotyczącego przesłanek, bo nie ma przesłanki ogólnej.

– *Metoda Venna*

Zastosowanie metody Venna do schematu ($Z \text{ on } O \wedge D \text{ on } O$) $\Rightarrow Z i D$ (tak samo, jak do równoważnego: ($Z i O \wedge D i O$) $\Rightarrow Z i D$) ujawnia, że nie są spełnione warunki wynikania dla wniosku szczegółowego, ponieważ nie ma na odpowiednim rysunku pola jednoznacznego.

b) Skoro każde przesłuchanie (P) jest moralnie niedopuszczalne (nD), a każdy egzamin (E) jest moralnie dopuszczalny, to niektóre egzaminy nie są przesłuchaniami.

Stosując dowolną z omówionych metod, da się uzasadnić ocenę, że wnioskowanie to jest poprawne logicznie (sprawa poprawności treściowej, tj. prawdziwości założeń, jest poza metodami logiki). Oryginalny schemat tego wnioskowania da się równoważnościowo przekształcić do postaci łatwiejszej do oceny. Mianowicie, zgodna ze schematem tego wnioskowania jest implikacja $(P a nD \wedge E a D) \Rightarrow E o P$, którą – w myśl prawa obwersji $P a nD \Leftrightarrow P e D$ – można równoważnie zapisać jako:

$$(P e D \wedge E a D) \Rightarrow E o P;$$

a stosując prawo konwersji $P e D \Leftrightarrow D e P$, uzyskuje się

$$(D e P \wedge E a D) \Rightarrow E o P.$$

– *Metoda figur/trybów*

Kolejność przesłanek jest taka, jak wymagana w tej metodzie. Jak widać, schemat wnioskowania $(P e D \wedge E a D) \Rightarrow E o P$ należy do figury II, a równoważny z nim schemat

$(D e P \wedge E a D) \Rightarrow E o P$ należy do figury I:

II	I
$P e D$	$D e P$
$E a D$	$E a D$
$E o P$	$E o P$
<i>Cesaro</i>	<i>Celaront</i>

Pośród niezawodnych trybów figury II jest tryb niezawodny Cesaro (osłabienie trybu Cesare), a w figurze I niezawodny tryb Celaront (osłabienie Celarent).

– *Metoda dyrektyw*

Oba schematy spełniają warunki dla przesłanek. Jest w nich przesłanka twierdząca (mniejsza) oraz ogólna (dwie są ogólne), a termin średni jest rozłożony: w pierwszym schemacie jest orzecznikiem zdania przeczącego, a w drugim jest podmiotem zdania ogólnego (oba rozłożenia w przesłance pierwszej). Schematy spełniają także wymagania stawiane wnioskom: rozłożony we wniosku termin P jest też rozłożony w pierwszej przesłance, bo w pierwszym schemacie jest podmiotem zdania ogólnego, a w drugim jest orzecznikiem zdania przeczącego (inne wymagania są „pusto spełnione”, bo wniosek nie jest ani twierdzący, ani ogólny).

– *Metoda Venna*

Metodę można zastosować bez przekształcania implikacji

$$(P a nD \wedge E a D) \Rightarrow E o P,$$

a także do równoważnych z nią implikacji $(P e D \wedge E a D) \Rightarrow E o P$ oraz $(D e P \wedge E a D) \Rightarrow E o P$. Niezależnie od wybranego do sprawdzania schematu są spełnione warunki wynikania dla wniosku $E o P$: jest bowiem na odpowiednim rysunku pole jednoznaczne (wyróżnione przez symbol E), na którym jest podmiot i jest zaprzeczenie orzecznika tego wniosku.

– *Metoda dowodowa*

Oto przekład implikacji $(D e P \wedge E a D) \Rightarrow E o P$ na język WRP:

$$((\wedge x) [D(x) \Rightarrow \sim P(x)] \wedge (\wedge x) [E(x) \Rightarrow D(x)]) \Rightarrow (\vee x) [E(x) \wedge \sim P(x)].$$

Dowód:

- | | |
|--|--------------------|
| 1. $(\wedge x) [D(x) \Rightarrow \sim P(x)]$ | {zał.} |
| 2. $(\wedge x) [E(x) \Rightarrow D(x)]$ | {zał.} |
| 3. $(\vee x) E(x)$ | {zał., int. mocna} |
| 4. $E(a)$ | {OV: 3} |
| 5. $E(a) \Rightarrow D(a)$ | {OA: 2} |
| 6. $D(a) \Rightarrow \sim P(a)$ | {OA: 1} |
| 7. $D(a)$ | {RO: 5, 4} |
| 8. $\sim P(a)$ | {RO: 6, 7} |
| 9. $E(a) \wedge \sim P(a)$ | {DK: 7, 8} |
| $(\vee x) [E(x) \wedge \sim P(x)]$ | {DV: 9}. |

Jak widać w powyższym przykładzie, łatwiej jest, jeśli przed dowodzeniem w WRP przekształci się schematy wnioskowań tak, by pozbyć się negacji przednazwowych (wykorzystując prawa obwersji), a w samym dowodzie może być potrzebna mocna interpretacja sylogistyki (założenie 3.)

c) Ponieważ żaden czyn sprawiedliwy (S) nie jest niemoralny (nM) oraz żadne przestępstwo (P) nie jest moralne, więc każde przestępstwo jest czynem niesprawiedliwym.

– *Metoda figur/trybów*

Korzystając z odpowiednich podstawień praw obwersji, mianowicie $S e nM \Leftrightarrow S a M$ oraz $P a nS \Leftrightarrow P e S$, można schemat tego wnioskowania, tj. $(S e nM \wedge P e M) \Rightarrow P a nS$ zastąpić implikacją równoważną, tj.: $(S a M \wedge P e M) \Rightarrow P e S$.

II
$S a M$
$P e M$
$P e S$

Kolejność przesłanek jest odpowiednia dla metody figur/trybów, schemat należy do figury II oraz jest zgodny z niezawodnym trybem Camestres.

– *Metoda dyrektyw (warunków)*

Schemat spełnia warunki **D(i)**: jest przesłanka twierdząca (pierwsza) i jest ogólna (obie), termin średni jest orzecznikiem przesłanki przeczącej (czyli jest rozłożony). Schemat spełnia także wymagania **D(ii)**: są wymagane dla wniosku ogólnego dwie przesłanki ogólne, a oba terminy rozłożone we wniosku (P podmiotem ogólnego, a S jest orzecznikiem przeczącego) są też rozłożone w przesłankach (oba są podmiotem zdania ogólnego).

– *Metoda Venna*

Można ją zastosować zarówno do schematu $(S e nM \wedge P e M) \Rightarrow P a nS$, jak i do równoważnego z nim $(S a M \wedge P e M) \Rightarrow P e S$ – uzyskując na obu odpowiednich rysunkach potwierdzenie niezawodności wnioskowań. Na pierwszym są spełnione warunki wynikania dla wniosku ogólnotwierdzącego $P a nS$ (jest pole, na którym P jest razem z nS oraz P jest tylko na tym polu), a na drugim rysunku – dla wniosku ogólnopreczącego $P e S$ (nie ma pola, na którym terminy tego wniosku występują razem).

– *Metoda dowodowa*

Przekład implikacji $(S a M \wedge P e M) \Rightarrow P e S$ na język WRP:

$((\wedge x) [S(x) \Rightarrow M(x)] \wedge (\wedge x) [P(x) \Rightarrow \sim M(x)]) \Rightarrow (\wedge x) [P(x) \Rightarrow \sim S(x)]$.

Dowód:

- | | |
|--|-------------------------|
| 1. $(\wedge x) [S(x) \Rightarrow M(x)]$ | {zał.} |
| 2. $(\wedge x) [P(x) \Rightarrow \sim M(x)]$ | {zał.} |
| 3. $S(x) \Rightarrow M(x)$ | { OA : 1} |
| 4. $P(x) \Rightarrow \sim M(x)$ | { OA : 2} |
| Przypuśćmy, dla dowolnego x , że | |
| 1.1 $P(x)$ | {zd.} |
| 1.2 $\sim M(x)$ | { RO : 4, 1.1} |
| 1.3 $\sim S(x)$ | { TOL : 3, 1.2} |
| 6. $P(x) \Rightarrow \sim S(x)$ | {1.1 \Rightarrow 1.3} |
| $(\wedge x) [P(x) \Rightarrow \sim S(x)]$ | { DA : 6}. |

ROZDZIAŁ IV

OGÓLNA TEORIA MNOGOŚCI

W prezentacjach wyników ogólnej teorii mnogości są zwykle uwzględniane: rachunek zbiorów, teoria relacji oraz teoria liczb kardynalnych. Do podstawowych wyników – zagadnień, pojęć, twierdzeń – tych trzech działów teorii mnogości są również zawężone analizy zawarte w kolejnych częściach niniejszego rozdziału. W punkcie wyjścia tych analiz są przyjęte wszystkie reguły dowodzenia – budowania dowodów i dołączanie wierszy do dowodu – oraz tezy założeniowych systemów KRZ i WRP scharakteryzowanych w **RI.3 i **RIII.2. Uzupełnieniem tych głównych działów ogólnej teorii mnogości – wartościowym nie tylko z perspektywy historycznej – jest zawarta w ostatnim podrozdziale charakterystyka antynomii oraz sposobów ich usuwania z podstaw teorii zbiorów (i matematyki).

1. Rachunek zbiorów

Po wprowadzeniu właściwej dla rachunku zbiorów terminologii i symboliki i uwagach dotyczących jego podstawowych pojęć (zbioru, zbioru pustego i uniwersalnego), są scharakteryzowane – definicjami i uzasadnionymi dowodowo twierdzeniami – relacje między zbiorami, działania na zbiorach, pojęcie zbiorów wyznaczonych przez funkcje zdaniowe, a w paragrafie końcowym jest podjęte zagadnienie interpretacji sylogistyki w rachunku zbiorów.

1.1. Podstawowe pojęcia rachunku zbiorów

W symbolicznym języku rachunku zbiorów będą używane wszystkie symbole znane z WRP (a więc także – wszystkie symbole KRZ)¹. Ponadto symbole: A, B, C, \dots, X, Y, Z , które najczęściej będą stosowane na oznaczenie zbiorów, symbole a, b, c, \dots, x, y, z na oznaczenie elementów zbioru (także symbole indeksowane, gdy będzie potrzeba, np. A_1, A_2, \dots, A_i i $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i$) oraz symbole \in oraz \notin skracające powiedzenie, że jakiś obiekt jest albo że nie jest elementem zbioru, np. $x \in A$, $a \notin Z$. Elementami zbiorów mogą być zbiory, zbiory zbiorów itd.; zbiory zawierające jako swoje elementy wyłącznie zbiory, będą też nazywane klasami lub rodzinami zbiorów i gdy będzie to ułatwiał odczytanie wzorów, będą oznaczane dużymi literami wytłuszczonymi, np. **A, B, ..., Z**.

Właściwe dla tego rachunku terminy zbioru oraz bycia elementem zbioru będą definiowane tylko nie wprost, tj. przez konteksty, w których będą używane. Dlatego warto w niniejszych uwagach wprowadzających podkreślić, że zbiór będzie w całym rozdziale rozumiany jako zbiór w sensie dystrybutywnym, a w tym podrozdziale – jako nieuporządkowany zbiór w sensie dystrybutywnym. O zbiorze rozumianym dystrybutywnie, tj. teoriomnogościowo (vs rozumianym kolektywnie, tj. mereologicznie), była już wzmianka w koncepcji podziału (*RVI.2). Tu warto dodać, że zbiór rozumiany dystrybutywnie jest zespołem wyznaczonym jednoznacznie wyłącznie przez określenie (wskazanie, zdefiniowanie) tych i tylko tych przedmiotów, które są jego elementami; natomiast zbiór pojmowany kolektywnie jest całością, do której należą przedmioty spełniające warunek bycia częścią. Dlatego można powiedzieć, że jeśli X jest częścią zbioru **A** rozumianego kolektywnie oraz x jest częścią X , to również x jest częścią tak rozumianego zbioru **A**; natomiast relacja bycia elementem zbioru rozumianego dystrybutywnie nie jest przechodnia, tj. elementy jego elementów mogą nie być (zwykle nie są) elementami tak rozumianego zbioru. Na przykład $a \notin \{\{a\}\}$, jako że jedynym elementem zbioru $\{\{a\}\}$ jest zbiór jednoelementowy $\{a\}$ – czyli, jeśli zbiór rozumie się dystrybutywnie, to prawdą jest jedynie, że $a \in \{a\}$ ².

¹ Rachunek zbiorów jest zwany również algebrą zbiorów, zwłaszcza wtedy, gdy jest prezentowany jako jedna z interpretacji algebry Boole'a.

² Rozumiejąc zbiór **A** mereologicznie, można powiedzieć np., że a jest częścią („elementem”) tego zbioru, o ile **A** jest złożone m.in. z a . Logiczna teoria „bycia częścią

Z kolei w kategorii rozumianych dystrybucywnie zbiorów: zbiór nieuporządkowany to taki, który jest jednoznacznie określony wyłącznie przez skład swoich elementów, w przeciwieństwie do zbioru uporządkowanego, który jest identyfikowany przez układ swoich elementów, tzn. ich skład i kolejność. Na oznaczenie zbioru nieuporządkowanego będą używane nawiasy klamrowe $\{ \}$, a w przypadku zbiorów uporządkowanych nawiasy ostre $\langle \rangle$. By zilustrować różnicę między zbiorami nieuporządkowanymi a uporządkowanymi (i użycie odmiennych symboli), można powiedzieć np. że $\{a, b\} = \{b, a\}$, $a \langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$ – o ile $a \neq b$.

Szczególne rodzaje zbiorów to zbiór pusty \emptyset , tj. niezawierający żadnego obiektu x jako swojego elementu: $(\forall x) x \notin \emptyset$ (twierdzenie o istnieniu zbioru pustego jest przyjmowane bez dowodu w każdym systemie rachunku zbiorów), oraz zbiór uniwersalny (zwany też pełnym) \mathbf{U} , tj. taki, którego elementem jest dowolny obiekt x badanej dziedziny: $(\forall x) x \in \mathbf{U}$. Na przykład gdy rozważania dotyczą liczb naturalnych, wtedy elementem uniwersum jest każda liczba naturalna ($\mathbf{U} = \mathcal{N}$); elementem uniwersum jest każda liczba rzeczywista, jeśli $\mathbf{U} = \mathcal{R}$; elementem uniwersum jest każdy przedmiot x_1, x_2, \dots, x_k , jeśli $\mathbf{U} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Warto powtórzyć (por. uwagi do pojęcia zbioru uniwersalnego sformułowane w *RIV.3), że mowa o ustalonym uniwersum, uniwersum zrelatywizowanym do danych rozważań, tj. gdy wiadomo, jaki jest zakres używanych w nich zmiennych, a więc że nie można, pod groźbą antynomii, mówić o zbiorze uniwersalnym jako takim, o uniwersum wszelkich możliwych obiektów (pośród nich – zbiorów). Stosowany w rachunku zbiorów symbol \mathbf{U} zbioru uniwersalnego można więc potraktować jako zmienną, za którą podstawia się nazwy jednostkowe uniwersów z poszczególnych dziedzin, tj. zakresów nazw lub zmiennych stosowanych w rozważaniach lub występujących w formułach określonego rachunku.

Zbiory \emptyset oraz \mathbf{U} można określić, korzystając z pojęcia klasy \mathbf{F} funkcji zdaniowych zawsze niespełnionych, tj. ogółu funkcji, które nie są spełnione przez żadną wartość występujących w nich zmiennych, oraz klasy \mathbf{V} funkcji zawsze spełnionych (por. *RIII. 4). Stosując operator abstrakcji (*RV.2), można powiedzieć, że zbiór pusty to ogół przedmiotów

całości”, zwana mereologią, należy – obok tzw. protetyki i ontologii – do systemów logicznych, których twórcą jest S. Leśniewski (zob. np.: J. Kopania, *Systemy Leśniewskiego*, w: *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny...*, dz. cyt., s. 397–405; A. Dąbrowski, M. Hoły-Łuczaj, A. Schumann i in., *Leksykon logików polskich 1900–1939*, dz. cyt., s. 193–203).

spełniających dowolną funkcję niespełnioną dla każdego elementu danej dziedziny, a zbiór uniwersalny to ogół elementów spełnionych przez dowolną funkcję dla każdego elementu spełnioną. W niniejszych, ogólnych rozważaniach warto dla ilustracji wybrać funkcję zawsze niespełnioną i zawsze spełnioną w dowolnej dziedzinie, na przykład: $x \neq x$ oraz $x = x$; można wtedy powiedzieć, że: $\emptyset = \{x: x \neq x\}$ oraz $\mathbf{U} = \{x: x = x\}$. Gdy z kolei dysponuje się pojęciem zbioru pustego \emptyset oraz zbioru uniwersalnego \mathbf{U} (oraz operatorem abstrakcji), wtedy da się w języku rachunku zbiorów uściślić intuicyjne rozumienie kwantyfikatora ogólnego i szczegółowego (**RIII.1). Zdanie $(\wedge x) \Phi(x)$ jest bowiem prawdziwe wtedy i tylko, gdy zbiór $\{x: \Phi(x)\}$ jest uniwersalny; a zdanie $(\vee x) \Phi(x)$ wtedy i tylko, gdy zbiór obiektów spełniających Φ jest niepusty:

$$(\wedge x) \Phi(x) \Leftrightarrow \{x: \Phi(x)\} = \mathbf{U} \text{ oraz } (\vee x) \Phi(x) \Leftrightarrow \{x: \Phi(x)\} \neq \emptyset.$$

Formułując definicje i twierdzenia rachunku zbiorów, zakładamy, że zakresem zmiennych x, y, z, x_1, \dots jest określony zbiór uniwersalny \mathbf{U} , a zakresem zmiennych $A, B, \dots, X, X_1, \dots$ jest ogół podzbiorów (dowolnego, lecz ustalonego) zbioru \mathbf{U} .

1.2 Relacje zakresowe między zbiorami

Gdy mowa o relacjach zakresowych między zbiorami, chodzi o uściślenie w języku teorii mnogości omawianych już związków między zakresami nazw, czyli między zbiorami desygnatów nazw (*RIV.4.1). W języku tamtych analiz zostały określone cztery podstawowe związki między zakresami (celowo nazywane w sposób zbliżony do terminologii rachunku zbiorów): rozłączności, krzyżowania, podporządkowania i tożsamości. Sformułowane niżej definicje i twierdzenia dotyczą relacji zakresowych między dowolnymi zbiorami, uściślają rozumienie tych związków oraz ich własności.

Pierwsze uściślenia dotyczą relacji tożsamości (identyczności) zbiorów oraz relacji bycia elementem zbioru.

D1.a $A = B \Leftrightarrow (\wedge x) [x \in A \Leftrightarrow x \in B];$

D1.b $y \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \Leftrightarrow y = x_1 \vee y = x_2 \vee \dots \vee y = x_k.$

Równoważność **D1.a** jest zwana zasadą ekstensjonalności (choć w aksjomatycznych ujęciach teorii mnogości zasadą ekstensjonalności nazywa się tylko implikację odwrotną tej równoważności). Zgodnie z tą

zasadą – będzie oznaczana jako **ZE** – dowolne zbiory są identyczne wtedy i tylko, gdy zawierają jako swoje elementy te same przedmioty. Zgodnie z **D1.b** dowolny przedmiot y jest elementem danego zbioru wtedy i tylko, gdy jest w tym zbiorze przedmiot identyczny z y . Bycie elementem zbioru jednoelementowego jest zatem rozumiane zgodnie z formułą:

$$y \in \{x\} \Leftrightarrow y = x.$$

Korzystając z tych uściśleń, można udowodnić podstawowe, zdroworozsądkowo oczywiste twierdzenia rachunku zbiorów.

$$\mathbf{T1} \quad \{a\} = \{b\} \Leftrightarrow a = b.$$

Dowód:

Obu implikacji składowych tej równoważności łatwo jest dowieść nie wprost.

□

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1. $\{a\} = \{b\}$ | {zał.} |
| 2. $(\wedge x) [x \in \{a\} \Leftrightarrow x \in \{b\}]$ | {ZE: 1} |
| 3. $a \in \{a\} \Leftrightarrow a \in \{b\}$ | {OA: 2} |
| 4. $a = a \Leftrightarrow a = b$ | {D1.b: 3} |
| $a = b$ | {RO _⇔ : 4, **RIII.2.: A1} |

□

- | | |
|---|---|
| 1. $a = b$ | {zał.} |
| 1.1 $x \in \{a\}$ | {zd.} |
| 1.2 $x \in \{b\}$ | {RZ _⊆ : 1, 1.1} |
| 2. $x \in \{a\} \Rightarrow x \in \{b\}$ | {1.1 \Rightarrow 1.2} |
| 3. $(\wedge x) [x \in \{a\} \Rightarrow x \in \{b\}]$ | {DA: 2} |
| 2.1 $x \in \{b\}$ | {zd.} |
| 2.2 $x \in \{a\}$ | {RZ _⊆ : 1, 2.1} |
| 4. $x \in \{b\} \Rightarrow x \in \{a\}$ | {2.1 \Rightarrow 2.2} |
| 5. $(\wedge x) [x \in \{b\} \Rightarrow x \in \{a\}]$ | {DA: 4} |
| 6. $(\wedge x) [x \in \{a\} \Leftrightarrow x \in \{b\}]$ | {DR, RO _⇔ : $\wedge\wedge$, DK: 3, 5} |
| $\{a\} = \{b\}$ | {ZE: 6}. |

Uzasadnienie wiersza 6 jest wskazane w stosowany już, skrócony sposób. Pełny zapis kroków dowodowych prowadzących do tego wiersza wygląda tak:

$$5'. (\wedge x) [x \in \{a\} \Rightarrow x \in \{b\}] \wedge (\wedge x) [x \in \{b\} \Rightarrow x \in \{a\}] \quad \{\mathbf{DK}: 3, 5\}$$

$$5''. (\wedge x) [(x \in \{a\} \Rightarrow x \in \{b\}) \wedge (x \in \{b\} \Rightarrow x \in \{a\})] \quad \{\mathbf{RO}_{\Leftrightarrow}: \wedge\wedge, 5'\}$$

gdzie $\wedge\wedge$ oznacza prawo wyciągania/rozdzielania kwantyfikatora przed/na człony koniunkcji (**RIII.2: T5);

6. $(\forall x) [(x \in \{a\} \Leftrightarrow x \in \{b\})]$ **{DR: 5"}**. ■

T2 W dowolnej dziedzinie \mathbf{U} istnieje dokładnie jeden zbiór pusty \emptyset .

Dowód:

Przypuśćmy, że istnieją dwa różne zbiory puste, tj. że $A = \emptyset$ i $B = \emptyset$ oraz $A \neq B$. Skoro zbiory A oraz B się różnią, to – zgodnie z **ZE** – musi istnieć co najmniej jeden obiekt, który jest elementem pierwszego z nich, a nie jest elementem drugiego lub odwrotnie. Założenie, że jest obiekt x należący do A , a nienależący do B prowadzi jednak do sprzeczności z definicją zbioru pustego: $(\forall x) x \notin \emptyset$ (skoro $x \in A = \emptyset$, to $\sim(\forall x) x \notin \emptyset$); tak samo do sprzeczności prowadzi założenie, że jest x należące do B , a nienależące do A . ■

Analogiczne uzasadnia się twierdzenie, że w określonej dziedzinie rozważań jest jeden zbiór uniwersalny (identyczny z daną dziedziną badań). Założenie, że istnieją dwa różne zbiory uniwersalne, tj. że $A = \mathbf{U}$ i $B = \mathbf{U}$ oraz że $A \neq B$ prowadzi do sprzeczności z definicją zbioru \mathbf{U} : gdyby bowiem istniał obiekt należący do A a niebędący elementem B , to B nie byłby zbiorem uniwersalnym (co sprzeczne z założeniem dowodu: $B = \mathbf{U}$), i *vice versa*. Można natomiast mówić, zgodnie z przyjętym w tych rozważaniach pragmatycznym rozumieniem zbioru uniwersalnego \mathbf{U} o istnieniu różnych uniwersów U_1 i U_2 określonych dla różnych rozważań/badań.

Kolejne pojęcia właściwe dla rachunku zbiorów dotyczą innych niż relacja = stosunków między zakresami zbiorów. Definicje relacji będą uzupełniane przykładami ich zastosowania do dowodów.

Definicja inkluzji, inaczej – zawierania się zbiorów, symbolizowana przez \subset , jest określona następująco:

D2 $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x) [x \in A \Rightarrow x \in B]$.

Równoważność ta, oznaczana przez **df \subset** , będzie w dowodach wykorzystywana bardzo często. Napis $A \subset B$ można odczytywać: zbiór A jest zawarty w zbiorze B ; zbiór A jest podzbiorem zbioru B ; albo mówić, że zbiory A oraz B (kolejność nazwanych zbiorów jest istotna) wiąże relacja inkluzji. Jeśli $A \subset B$ i $A \neq B$, to mówimy dokładniej, że A jest podzbiorem właściwym zbioru B , choć termin „podzbiór właściwy” jest też rozumiany wężiej, tj. stosowany tylko w sytuacji, gdy nie tylko $A \subset B$ i $A \neq B$, lecz nadto $A \neq \emptyset$. By zapisać, że relacja \subset nie jest spełniona, można użyć symbolu negacji: $\sim(A \subset B)$ albo napisać, że $A \not\subset B$.

Twierdzenia ilustrujące zastosowanie tej definicji są oczywiste, da się ich prawdziwość potwierdzić także innymi metodami, tu jednak chodzi o ilustrację zastosowania definicji inkluzji w metodzie dowodowej. Warto najpierw dostrzec, że zbiór pusty jest podzbiorem dowolnego zbioru, skoro bowiem $(\forall x) x \notin \emptyset$, to jest zawsze prawdziwa implikacja $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$, wymagana, zgodnie z **D2** do ogłoszenia, że $\emptyset \subset A$.

T3 $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

Dowód:

- | | |
|--|---|
| 1. $A \subset B$ | {zał.} |
| 2. $B \subset C$ | {zał.} |
| 3. $(\forall x) [x \in A \Rightarrow x \in B]$ | {df _c , 1} |
| 4. $(\forall x) [x \in B \Rightarrow x \in C]$ | {df _c , 2} |
| 1.1 $x \in A$ | {zd.} |
| 1.2 $x \in B$ | {RO: O \wedge : 3, 1.1} |
| 1.3 $x \in C$ | {RO: O \wedge : 4, 1.2} |
| 5. $x \in A \Rightarrow x \in C$ | {1.1 \Rightarrow 1.3} |
| 6. $(\forall x) [x \in A \Rightarrow x \in C]$ | {D \wedge : 5} |
| $A \subset C$ | {RO _⇐ : def _c , 1}. |

Zgodnie z **T3** relacja inkluzji jest przechodnia.

Dowody kolejnych twierdzeń (choć i powyższy nie jest dowodem formalnym pełnym) nie będą już tak szczegółowe, kolejne kroki dowodowe będą zapisywane skrótowo albo tylko opisywane poza tokiem formalnego dowodu.

T4 $(x \in A \wedge A \subset B) \Rightarrow x \in B$.

- | | |
|------------------|---------|
| 1. $x \in A$ | {zał.} |
| 2. $A \subset B$ | {zał.}. |

Odczytane zgodnie z definicją relacji inkluzji założenie 2. znaczy, że dowolny element zbioru A jest też elementem zbioru B , jeśli więc $x \in A$ (zał. 1.), to jest też tak, że $x \in B$.

T5 $(A \subset B \wedge B = C) \Rightarrow A \subset C$.

Dowód:

- | | |
|------------------|---------------------------|
| 1. $A \subset B$ | {zał.} |
| 2. $B = C$ | {zał.} |
| $A \subset C$ | {RZ ₌ : 2, 1}. |

T6 $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$.

Założenie 1. $A = B$ implikacji prostej, rozwinięte zgodnie z zasadą ekstensjonalności, prowadzi do 2. $(\forall x) [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$. Skoro dowolny element zbioru A jest też elementem zbioru B i odwrotnie, więc założenie o dowolnym przedmiocie x , że jest elementem A , implikuje, że jest elementem B oraz odwrotnie. Po uogólnieniu (dołączeniu kwantyfikatora dużego) do członów tej koniunkcji uzyskuje się – zgodnie z definicją relacji inkluzji: $A \subset B \wedge B \subset A$. W dowodzie implikacji odwrotnej założenie 1. $(A \subset B \wedge B \subset A)$ prowadzi najpierw do uznania:

2. $(\forall x) [x \in A \Rightarrow x \in B] \wedge (\forall x) [x \in B \Rightarrow x \in A]$ {dfc: 1}, następnie
3. $(\forall x) [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$ {**RIII.2: T5, tj. reguła $\wedge\wedge$ zastosowana do 2}, a więc $A = B$ {ZE: 3}.

Twierdzenie T6 można odczytywać jako definicję relacji identyczności za pomocą inkluzji (będzie też oznaczana symbolem $=|\subset$). Jest ono zwykle stosowane, gdy trzeba okazać identyczność zbiorów: w dowodzie identyczności wystarczy udowodnić, że są spełnione dwie inkluzje składowe relacji identyczności zbiorów.

Dysponując pojęciem zawierania się (inkluzji) zbiorów, czyli pojęciem podzbioru, można wprowadzić pojęcie zbioru potęgowego. Dla dowolnego określonego zbioru A można utworzyć zbiór, którego wszystkimi elementami są podzbiory zbioru A (w aksjomatycznych ujęciach teorii mnogości twierdzenie o istnieniu zbioru potęgowego jest odrębnym aksjomatem). Ponieważ wszystkie elementy tak utworzonego zbioru są zbiorami, mówimy o rodzinie albo o klasie zbiorów, a nazywamy ją potęgą zbioru A lub zbiorem potęgowym \mathbf{A} i oznaczamy przez $\mathbf{Pot}(A)$ (klasa ta jest też symbolizowana przez 2^A).

D3 $X \in \mathbf{Pot}(A) (X \in 2^A) \Leftrightarrow X \subset A$.

W kontekście tej definicji – będzie oznaczana przez \mathbf{dfPot} – jest oczywiste, że jeśli 1. $A \subset B$, to również zbiór potęgowy \mathbf{A} jest podzbiorem zbioru potęgowego \mathbf{B} . Przy założeniu, że 1.1 istnieje zbiór X , który jest elementem rodziny zbiorów \mathbf{A} ($\mathbf{A} = \mathbf{Pot}(A)$), a nie jest elementem klasy \mathbf{B} ($\mathbf{B} = \mathbf{Pot}(B)$), prowadzi bowiem do sprzeczności: jeśli $X \in \mathbf{A}$, to – zgodnie z \mathbf{dfPot} – 1.2 X jest podzbiorem zbioru A , a wtedy zbiór X jest też (wobec 1. $A \subset B$) podzbiorem zbioru B – jako że relacja inkluzji jest przechodnia {T3} – czyli jest elementem klasy $\mathbf{Pot}(B)$ (co jest sprzeczne z przypuszczeniem 1.1). ■

Zatem:

$$\mathbf{T7.a} \quad A \subset B \Rightarrow \mathbf{Pot}(A) \subset \mathbf{Pot}(B).$$

Prawdziwa jest także implikacja odwrotna, bo do sprzeczności prowadzi przypuszczenie, że (i) $\mathbf{Pot}(A) \subset \mathbf{Pot}(B)$ oraz (ii) $A \not\subset B$. Jeśli (ii), to istnieje przedmiot x taki, że $x \in A \wedge x \notin B$. Wtedy jednak zbiór jednoelementowy $\{x\} \subset A$ i $\{x\} \not\subset B$, co sprzeczne z (i). ■

Zatem:

$$\mathbf{T7.b} \quad \mathbf{Pot}(A) \subset \mathbf{Pot}(B) \Rightarrow A \subset B.$$

Obie te implikacje można zawrzeć w twierdzeniu:

$$\mathbf{T7} \quad A \subset B \Leftrightarrow \mathbf{Pot}(A) \subset \mathbf{Pot}(B).$$

Kolejna relacja, tj. relacja rozłączności była już, w języku semiotyki nieformalnej, określana dla potrzeb ustalania związków między zakresami nazw. Oto jej definicja w języku rachunku zbiorów:

$$\mathbf{D4} \quad A \supset\subset B \Leftrightarrow (\forall x) [x \in A \Rightarrow x \notin B].$$

Korzystając z tej definicji (będzie oznaczana symbolem $\mathbf{df}\supset\subset$), łatwo można okazać, że jest prawdziwe następujące twierdzenie.

$$\mathbf{T8} \quad (A \subset B \wedge B \supset\subset C) \Rightarrow A \supset\subset C.$$

Dowód:

Przyjąwszy, zgodnie z założeniami dowodzonego twierdzenia: 1. $A \subset B$ oraz 2. $B \supset\subset C$, przypuśćmy, że $x \in A$. Jest wtedy, wobec założenia 1. i $\mathbf{df}\subset$ oczywiste, że x jest też elementem zbioru B oraz – na podstawie założenia 2. i $\mathbf{df}\supset\subset$ – nie jest elementem zbioru C . Ponieważ jest tak dla dowolnego obiektu x , więc można uznać, że w sytuacji opisanej założeniami dowodzonego twierdzenia: $(\forall x) [x \in A \Rightarrow x \notin C]$, co można, zgodnie z $\mathbf{df}\supset\subset$, wyrazić krócej napisem: $A \supset\subset C$. ■

Równie oczywiste jest twierdzenie:

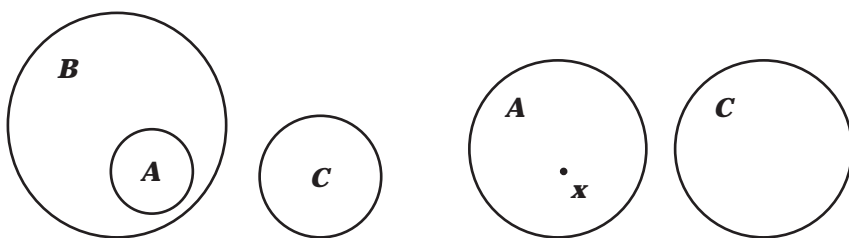
$$\mathbf{T9} \quad (x \in A \wedge A \supset\subset C) \Rightarrow x \notin C.$$

Dowód:

Odwołując się do dotychczasowych definicji i reguł, można w dowodzie wprost założyć $A \supset\subset C$ rozwinąć najpierw zgodnie z $\mathbf{df}\supset\subset$, następnie opuścić kwantyfikator i zastosować **RO** do implikacji $x \in A \Rightarrow x \notin C$ i założenia $x \in A$ {**RO**: **OA**: $\mathbf{df}\supset\subset$: $A \supset\subset C$, $x \in A$ }; albo (niewprost):

gdyby przy założeniach $x \in A$ oraz $A \supset C$ przypuścić, że $x \in C$, to trzeba by uznać, że $x \notin A$, jako że dla każdego x jest tak, że jeśli jest elementem A , to nie jest elementem C {**TOL: OΛ: df** \supset : $A \supset C, x \in C$ }. Wniosek że $x \notin A$, uzyskany na podstawie zdn., jest jednak sprzeczny z pierwszym spośród założeń dowodzonego twierdzenia. ■

Zdroworozsądkowe rozstrzygnięcie o prawdziwości – oczywiście nie zawsze dostępne i nie zawsze możliwe do zobiektywizowania – może być wspomagane znaną z metody Venna wizualizacją. Potwierdzeniem ogólnej spełnialności (prawdziwości) twierdzeń **T8** oraz **T9** są następujące rysunki:

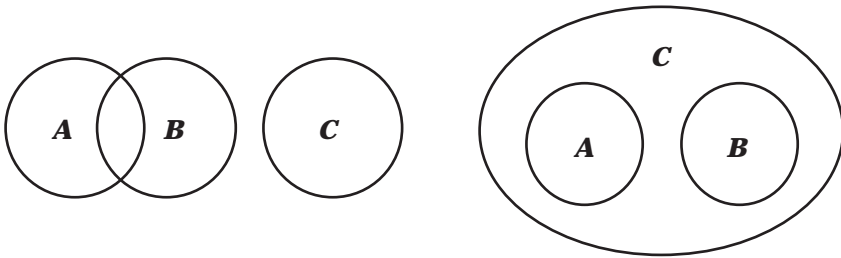


Nie da się na diagramach przedstawić (narysować) założeń obu tych twierdzeń tak, by założenia te były spełnione, a jednocześnie nie było (także – na rysunkach) tak, jak głoszą następniki implikacji **T8** oraz **T9**.

Metody opartej na rysowaniu zakresów nazw zbiorów, a tym bardziej na konstruowaniu konkretnych zbiorów (określaniu ich np. przez wyliczenie elementów) nie można uznać za uniwersalny odpowiednik dowodów prawdziwości twierdzeń rachunku zbiorów. Metoda ta może być natomiast skutecznym (rozstrzygającym) sposobem okazywania fałszu twierdzeń. Jeśli bowiem da się podać – co metoda Venna może ułatwić – choć jeden przykład zbiorów niespełniających sprawdzanego twierdzenia – dokładniej: choć jedno fałszyfikujące podstawienie stałych za zmienne sprawdzanej formuły – wtedy okazanie fałszu jest skuteczne, a poszukiwanie dowodu skazane na niepowodzenie. Dla zilustrowania tego, o czym mowa, spójrzmy na dwie formuły:

$$(A \supset B \wedge B \supset C) \Rightarrow A \supset C \quad \text{oraz} \quad (A \supset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \supset C.$$

Następujące rysunki opisujące relacje między zbiorami A , B i C ujawniają, że implikacje te są fałszywe, tj. nie są spełnione dla dowolnych zbiorów.



Na przykład zbiory $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$ i $C = \{b, e\}$ falsyfikują pierwsze z tych twierdzeń (relacja rozłączności zbiorów nie jest więc przechodnia), a zbiory $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$ i $C = \{a, b, c, d, e\}$ stanowią przykład obalający drugie z nich.

Oto definicja kolejnej relacji.

D5 $A \ni B \Leftrightarrow (\forall x) [x \in A \wedge x \in B] \wedge (\forall x) [x \in A \wedge x \notin B] \wedge (\forall x) [x \notin A \wedge x \in B]$.

O dowolnych dwóch zbiorach, które spełniają tę definicję (**df \ni**), mówimy, że pozostają w relacji krzyżowania. Definicja ta jest użyta w dowodzie twierdzenia:

T10 $(A \ni B \wedge B \ni C) \Rightarrow \sim(A \subset C)$.

Dowód:

Przyjmijmy założenia dowodzonego twierdzenia:

1. $A \ni B$ i 2. $B \ni C$ oraz zypuśćmy, że 3. $A \subset C$ (zdn.).

Na podstawie założenia 1. oraz **df \ni** można stwierdzić, że istnieje co najmniej jeden przedmiot będący jednocześnie elementem zbiorów A oraz B – nazwijmy ten przedmiot a . Jako że $a \in A$, to wobec 3. jest też elementem zbioru C : $a \in C$; ponieważ jednak jednocześnie $a \in B$, więc, zgodnie z założeniem 2. i **df \ni** , nie może być elementem tego zbioru, tj.: $a \notin C$. ■

Da się natomiast łatwo okazać, że relacja krzyżowania się zbiorów również (tak samo jak relacja rozłączności) nie jest przechodnia. Nie jest bowiem ogólnie spełnione, tj. spełnione dla dowolnych zbiorów, co znaczy, że jest fałszywe, następujące twierdzenie:

$(A \ni B \wedge B \ni C) \Rightarrow A \ni C$.

Kontrprzykład dla tej implikacji stanowią np. zbiory: $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$, $C = \{c, d\}$, dla których poprzednik tego twierdzenia jest prawdziwy, a następnik jest fałszywy.

1.3 Działania na zbiorach

Kolejna grupa definicji i związanych z nimi twierdzeń dotyczy działań na zbiorach. Zostaną określone kolejno działania sumy (\cup), iloczynu (\cap), różnicy ($-$) oraz dopełnienia ($'$).

$$\mathbf{D6.a1} \quad x \in (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B).$$

Na gruncie tej definicji (**df \cup**) da się okazać, że są prawdziwe twierdzenia:

$$\mathbf{T11} \quad A \subset (A \cup B),$$

$$\mathbf{T12} \quad A \subset B \Leftrightarrow (A \cup B) = B.$$

Dowód T11: Jeżeli dowolny przedmiot x jest elementem zbioru A :
1.1 $x \in A$, to jest też prawdą, że 1.2 $x \in A \vee x \in B$ {**DA**: 1.1}, czyli 1.3 $x \in (A \cup B)$ {**RO \Leftrightarrow** : **df \cup** , 1.2}. Zatem $A \subset (A \cup B)$ {**DL**: 1.1 \Rightarrow 1.3; **df \subset** }.
Dowód T12: W dowodzie implikacji prostej do założenia 1. $A \subset B$ wystarczy dołączyć założenie dodatkowe 1.1 $x \in (A \cup B)$, tzn.

1.2 $x \in A \vee x \in B$ {1.1, **df \cup** }, by wyprowadzić wniosek, że także jeśli 1.1.1 $x \in A$, to $x \in B$ {1., **df \subset** }, a więc 1.3 $x \in B$. Z kolei jeśli 2.1 $x \in B$, to 2.2 $x \in (A \cup B)$ {**T11**}, a zatem:

$$(A \cup B) = B \text{ {DL: 1.1 } \Rightarrow \text{ 1.3, 2.1 } \Rightarrow \text{ 2.2; df \subset , T6}}.$$

W dowodzie implikacji odwrotnej na podstawie identyczności

1. $(A \cup B) = B$ oraz założenia 1.1 $x \in A$ uzyskuje się łatwo kolejne wiersze:

1.2 $x \in (A \cup B)$ {**T11**} i 1.3 $x \in B$ {**RZ $_$** : 1.2, 1}.

Zatem $A \subset B$ {**DL**: 1.1 \Rightarrow 1.3, **df \subset** }. ■

$$\mathbf{D7.a1} \quad x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B).$$

Przykłady stosowania tej definicji (**df \cap**) są w dowodach następujących twierdzeń:

1. $(A \cup B) = B$ oraz założenia 1.1 $x \in A$ uzyskuje się łatwo kolejne wiersze:

1.2 $x \in (A \cup B)$ {**T11**} i 1.3 $x \in B$ {**RZ $_$** : 1.2, 1}.

Zatem $A \subset B$ {**DL**: 1.1 \Rightarrow 1.3, **df \subset** }. ■

$$\mathbf{D7.a1} \quad x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B).$$

Przykłady stosowania tej definicji (**df \cap**) są w dowodach następujących twierdzeń:

$$\mathbf{T13} \quad (A \cap B) \subset B,$$

$$\mathbf{T14} \quad A \subset B \Leftrightarrow (A \cap B) = A,$$

$$\mathbf{T15} \quad A \supset B \Leftrightarrow (A \cap B) = \emptyset,$$

$$\mathbf{T16} \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Dowód T13: Kolejne kroki dowodu pierwszego z tych twierdzeń są wskazane schematem: **df \subset** : **DL**: 1.1 \Rightarrow 1.3; **OK**: 1.2; **df \cap** : 1.1, w którym 1. 1 to założenie dodatkowe: $x \in (A \cap B)$. ■

Dowód T14: W dowodzie implikacji prostej: z założenia dodatkowego 1.1 $x \in (A \cap B)$ wynika bezpośrednio, że $x \in A$ {OK: $\mathbf{df}\cap$: 1.1}, a założenie dodatkowe 2.1 $x \in A$, w kontekście założenia 1. $A \subset B$ prowadzi do konkluzji, że $x \in (A \cap B)$ {RO: **T4**, $2.1 \wedge 1$ }. Skoro $(A \cap B) \subset A$ { $\mathbf{df}\subset$; **DA**: $1.1 \Rightarrow 1.3$ } i $A \subset (A \cap B)$ { $\mathbf{df}\subset$; **DA**: $2.1 \Rightarrow 2.3$ }, więc $(A \cap B) = A$ {**T6**}. Natomiast w dowodzie implikacji odwrotnej, na podstawie założenia 1. $(A \cap B) = A$ w prosty sposób dochodzi się do stwierdzenia, że prawdziwa jest inkluzja $A \subset B$ { $\mathbf{df}\subset$; **DA**: OK: $\mathbf{df}\cap$: **RZ**₁: $x \in A, 1.$ }. ■

Dowód T15: W dowodach niewprost implikacji składowych tej równoważności łatwo uzyskuje się sprzeczność na podstawie $\mathbf{df}\supset$, $\mathbf{df}\cap$ i pojęcia zbioru \emptyset . ■

Dowód T16: W dowodzie tej równości najprościej jest skorzystać – oprócz $\mathbf{df}\cup$ i $\mathbf{df}\cap$ – z prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy: $[(p \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$ (**R11.3:T36). ■

Działania sumy i iloczynu można zdefiniować inaczej niż w **D6.a1** i **D7.a1**. Zbiór będący wynikiem tych działań można określić nie za pośrednictwem pojęcia bycia elementem sumy bądź iloczynu – jak w $\mathbf{df}\cup$ i $\mathbf{df}\cap$ – lecz bezpośrednio, mówiąc o jego cechach (także o relacyjnych, tj. w stosunku do innych zbiorów). Oto stosowne określenia:

D6.b $S = (A \cup B) \Leftrightarrow \{A \subset S \wedge B \subset S \wedge (\wedge Z) [(A \subset Z \wedge B \subset Z) \Rightarrow S \subset Z]\}$,

D7.b $I = (A \cap B) \Leftrightarrow \{I \subset A \wedge I \subset B \wedge (\wedge Z) [(Z \subset A \wedge Z \subset B) \Rightarrow Z \subset I]\}$.

Sens tych określeń (będą oznaczane, odpowiednio, przez $\mathbf{df}\cup_{\epsilon}$ oraz $\mathbf{df}\cap_{\epsilon}$) jest następujący: suma zbiorów jest najmniej licznym zbiorem takim, w którym zawierają się oba sumowane zbiory, natomiast iloczyn, rozumiany zgodnie z $\mathbf{df}\cap_{\epsilon}$, jest najliczniejszym zbiorem zawartym jednocześnie w zbiorach A i B .

Można sprawdzić, że definicje $\mathbf{df}\cup_{\epsilon}$ i $\mathbf{df}\cap_{\epsilon}$ są równoważne z definicjami sumy i iloczynu $\mathbf{df}\cup$ i $\mathbf{df}\cap$, tj. że $\mathbf{df}\cup \Leftrightarrow \mathbf{df}\cup_{\epsilon}$ oraz $\mathbf{df}\cap \Leftrightarrow \mathbf{df}\cap_{\epsilon}$.

T17 Definicje **D6.a1** oraz **D6.b** są równoważne.

Dowód:

Trzeba okazać, że jest prawdziwa równoważność: $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in S$, a więc że jeśli dowolny przedmiot jest elementem sumy $(A \cup B)$ zdefiniowanej jak w **D6.a1**, to jest też elementem zbioru S określonego w **D6.b** – i odwrotnie:

$(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow x \in S$: (i) $A \subset S \wedge$ (ii) $B \subset S \wedge$

(iii) $(\wedge Z) [(A \subset Z \wedge B \subset Z) \Rightarrow S \subset Z]$.

Założenie 1. $x \in A \vee x \in B$ implikacji prostej łatwo prowadzi do wniosku, że $x \in S$, ponieważ z każdego z założeń dodatkowych, tj. 1.1 $x \in A$ oraz 2.1 $x \in B$, przyjętych w kontekście definicji zbioru S , wynika, że $x \in S$ {**RO: T4, DK: 1.1, A \subset S ; RO: T4, DK: 2.1, B \subset S**}.

W dowodzie niewprost implikacji odwrotnej da się okazać, że założenie

1. $x \in S$: (i) $A \subset S \wedge$ (ii) $B \subset S \wedge$ (iii) $(\wedge Z) [(A \subset Z \wedge B \subset Z) \Rightarrow S \subset Z]$,
połączone z założeniem dowodu niewprost

2. $\sim(x \in A \vee x \in B)$

prowdzi do sprzeczności. Założenie niewprost jest równoważne koniunkcji

3. $x \notin A \wedge x \notin B$ {**NA: 1**}.

Niech

4. S_0 jest zbiorem różniącym się od zbioru S tym tylko, że $x \notin S_0$ {df S_0 }.
Wobec 1.(i), 1.(ii) i koniunkcji 3. jest oczywiste, że

5. $A \subset S_0 \wedge B \subset S_0$.

Ponieważ zbiór S_0 spełnia założenia implikacji z 1.(iii), więc

6. $S \subset S_0$ {**RO: OΛ: 1.(iii), 5**}, a zatem

7. $x \in S_0$ {**RO: T4, 1 \wedge 6**}, co jest sprzeczne z 4 (definicją zbioru S_0). ■

T18 Definicje **D7.a1** oraz **D7.b** są równoważne.

Dowód:

Trzeba okazać, że jest prawdziwa równoważność:

$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in I$, a więc, że jeśli dowolny przedmiot jest elementem iloczynu $(A \cap B)$ zdefiniowanego jak w **D7.a1**, to jest też elementem zbioru I określonego w **D7.b** – i odwrotnie:

$(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in I$: (i) (i) $I \subset A \wedge$ (ii) $I \subset B \wedge$

(iii) $(\wedge Z) [(Z \subset A \wedge Z \subset B) \Rightarrow Z \subset I]$.

□ W dowodzie niewprost implikacji prostej da się okazać, że koniunkcja jej poprzednika:

1. $x \in A \wedge x \in B$

oraz założenie dowodu niewprost, tj.

2. $x \notin I$: (i) $I \subset A \wedge$ (ii) $I \subset B \wedge$ (iii) $(\wedge Z) [(Z \subset A \wedge Z \subset B) \Rightarrow Z \subset I]$

prowdzi do sprzeczności.

Jeśli I_0 jest zbiorem różniącym się od zbioru I tym tylko, że $x \in I_0$, tj.

3. $x \notin I \wedge I_0 = I \cup \{x\}$ {df I_0 }},

to w kontekście 1. oraz 2.(i) i 2.(ii) można uznać, że

4. $I_0 \subset A \wedge I_0 \subset B$.

Jako że zbiór I_0 spełnia założenia implikacji 2.(iii), więc

5. $I_0 \subset I \{ \mathbf{RO}: \mathbf{O}\Lambda: 2.(iii), 4 \}$, a zatem

6. $x \in I \{ \mathbf{RO}: \mathbf{T4}, 3 \wedge 5 \}$, co jest sprzeczne z 2.

□ **Koniunkcja** $x \in A \wedge x \in B$, do której trzeba dojść w dowodzie implikacji odwrotnej, wynika z założenia tej implikacji $\{ \mathbf{T4} \}$. ■

Określenia (**df**∪) i (**df**∩) dają podstawę dla zdefiniowania działań tzw. sumy uogólnionej i uogólnionego iloczynu, czyli działań sumy i iloczynu wykonywanych na więcej niż dwóch zbiorach.

Niech A_1, A_2, \dots, A_n będzie ciągiem zbiorów:

D6.a2 (df∪) $x \in \cup A_i, i = 1, \dots, n \Leftrightarrow (x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n)$.

Analogiczna jest definicja uogólnionego iloczynu:

D7.a2 (df∩) $x \in \cap A_i, i = 1, \dots, n \Leftrightarrow (x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n)$.

Zbiór $\cup A_i, i = 1, \dots, n$ to suma zbiorów (wyrazów) ciągu A_1, A_2, \dots, A_n , a zbiór $\cap A_i, i = 1, \dots, n$ nazywamy iloczynem tego ciągu zbiorów.

W przypadku tych działań uogólnionych można nadal mówić o działaniu – a dokładniej, o skrótowym zapisie wielu działań dwuargumentowych albo o „działaniu” wieloargumentowym – jako że wynik sumy uogólnionej (jak i uogólnionego iloczynu) uzyskuje się po $n-1$ -krotnym powtórzeniu działania określonego w **df**∪: dla działania sumy wykonywanego dla, powiedzmy, $i = 4$ wynik sumy dla zbioru pierwszego i drugiego (w dowolnym uporządkowaniu zbiorów objętych tym działaniem) jest sumowany ze zbiorem trzecim, a wynik tego sumowania ze zbiorem czwartym (suma ta jest końcowym wynikiem sumy uogólnionej). Definicja **df**∪ jest więc uogólnieniem **df**∪ na dowolną skończoną liczbę sumowanych zbiorów, czyli mogłaby być oznaczona jako **df**∪ _{p} , a dla $i = 2$ przyjąłaby postać definicji **df**∪; analogicznie definicja **df**∩ jest uogólnieniem **df**∩.

Działania określone w **df**∪ oraz **df**∩ można uogólnić do tzw. działań nieskończonych, tj. stosowanych w przypadku dowolnego ciągu zbiorów A_1, A_2, A_3, \dots (\mathcal{N} oznacza, warto przypomnieć, zbiór wszystkich liczb naturalnych):

D6.a3(df∪_∞) $x \in \cup A_i, i = 1, \dots, \infty \Leftrightarrow (\forall i \in \mathcal{N}) x \in A_i$,

D7.a3(df∩_∞) $x \in \cap A_i, i = 1, \dots, \infty \Leftrightarrow (\wedge i \in \mathcal{N}) x \in A_i$.

Definicje działań nieskończonych są wykorzystane w dowodach np. następujących równości:

T19 $\cup (A_i \cup B_i) = \cup A_i \cup \cup B_i, \quad i = 1, \dots, \infty,$

T20 $\bigcap (A_i \cap B_i) = \bigcap A_i \cap \bigcap B_i, \quad i = 1, \dots, \infty.$

Dowód T19:

Niech (*) $Z_i =_{\text{df}} (A_i \cup B_i), i = 1, \dots, \infty$ (zakres wskaźnika i będzie we wzorach dowodu pomijany). Na podstawie definicji (*), założenia dodatkowego 1.1 $x \in \bigcup (A_i \cup B_i)$ oraz **df** \bigcup_{∞} i **df** \bigcup można (stosując reguły dołączania/opuszczania kwantyfikatora szczegółowego) uznać, że:

- 1.2 $(\forall i \in \mathcal{N}) x \in Z_i$
- 1.3 $x \in Z_n$
- 1.4 $x \in (A_n \cup B_n)$
- 1.5 $x \in A_n \vee x \in B_n$
- 1.6 $(\forall i \in \mathcal{N}) [x \in A_i \vee x \in B_i]$
- 1.7 $(\forall i \in \mathcal{N}) x \in A_i \vee (\forall i \in \mathcal{N}) x \in B_i \quad \{\mathbf{Vlv}: 1.6\}$
- 1.8 $x \in \bigcup A_i \vee x \in \bigcup B_i$
- 1.9 $x \in (\bigcup A_i \cup \bigcup B_i).$

Jako że przedmiot x , o którym przypuściliśmy w 1.1, że jest elementem zbioru $\bigcup (A_i \cup B_i)$, jest obiektem dowolnym, więc można do implikacji 1.1 \Rightarrow 1.9 zastosować uogólnienie, które daje podstawę do uznania, że:

1. $\bigcup (A_i \cup B_i) \subset (\bigcup A_i \cup \bigcup B_i) \{\mathbf{df}\subset: \mathbf{DA}: 1.1 \Rightarrow 1.9\}.$

Założywszy z kolei, że 2.1 $x \in (\bigcup A_i \cup \bigcup B_i)$, uzyskuje się, stosując te same definicje i reguły dołączania wierszy do dowodu:

- 2.2 $x \in \bigcup A_i \vee x \in \bigcup B_i$
- 2.3 $(\forall i \in \mathcal{N}) [x \in A_i] \vee (\forall i \in \mathcal{N}) [x \in B_i]$
- 2.4 $(\forall i \in \mathcal{N}) [x \in A_i \vee x \in B_i]$
- 2.5 $(\forall i \in \mathcal{N}) [x \in (A_i \cup B_i)]$
- 2.6 $x \in \bigcup (A_i \cup B_i).$

Ten fragment dowodu można więc podsumować wnioskiem:

2. $(\bigcup A_i \cup \bigcup B_i) \subset \bigcup (A_i \cup B_i) \{\mathbf{df}\subset: \mathbf{DA}: 2.1 \Rightarrow 2.5\}.$

Koniunkcja wierszy 1. oraz 2. kończy dowód **T19** $\{\mathbf{RO}_{\Leftrightarrow}: \mathbf{T6}, 1 \wedge 2\}.$

Warto przypomnieć, że podstawą dla zastosowanej w dowodzie (kroki 1.7 i 2.4) reguły **Vlv**, tj. wnioskowania podpadającego pod schemat:

$$\mathbf{Vlv} \quad \frac{(\forall \alpha) [\Phi \vee \Psi]}{(\forall \alpha) \Phi \vee (\forall \alpha) \Psi}$$

jest twierdzenie **RIII.2: **T12**. ■

Dowód T20 jest analogiczny, z tym że korzysta się w nim z definicji dla działania iloczynu, tj. z (**df** \bigcap_{∞}) i (**df** \bigcap), a przechodząc od formuły:

$(\wedge i \in \mathcal{N}) [x \in A_i \wedge x \in B_i]$ do wiersza

$(\bigwedge i \in \mathcal{N}) x \in A_i \wedge (\bigwedge i \in \mathcal{N}) x \in B_i$), i odwrotnie, stosuje się regułę $\Lambda\wedge$:

$$\Lambda\wedge \quad \frac{(\bigwedge \alpha) [\Phi \wedge \Psi]}{(\bigwedge \alpha) \Phi \wedge (\bigwedge \alpha) \Psi}$$

opartą na twierdzeniu **RIII.2: T5. ■

Działania określone w ($\mathbf{df}\cup_{\infty}$) i ($\mathbf{df}\cap_{\infty}$) można stosować w dowolnej klasie zbiorów \mathbf{A} :

$$\mathbf{D6.a4} \ (\mathbf{df}\cup\mathbf{A}) \quad x \in \cup \mathbf{A} \Leftrightarrow (\forall A \in \mathbf{A}) x \in A,$$

$$\mathbf{D7.a4} \ (\mathbf{df}\cap\mathbf{A}) \quad x \in \cap \mathbf{A} \Leftrightarrow (\bigwedge A \in \mathbf{A}) x \in A.$$

Zbiory $\cup \mathbf{A}$ i $\cap \mathbf{A}$ nazywamy, odpowiednio, sumą oraz iloczynem rodziny zbiorów \mathbf{A} . Klasą zbiorów, o której mowa w $\mathbf{df}\cup\mathbf{A}$ oraz $\mathbf{df}\cap\mathbf{A}$, może być również zbiór potęgowy $\mathbf{Pot}(A)$ (2^A) dowolnego zbioru A , wtedy $\cup \mathbf{A}$ oraz $\cap \mathbf{A}$ to suma oraz iloczyn zbioru potęgowego \mathbf{A} ($\mathbf{A} = 2^A$). Określenia $\mathbf{df}\cup\mathbf{A}$ i $\mathbf{df}\cap\mathbf{A}$ można z kolei uogólnić tak, by działania uogólnione \cup i \cap dotyczyły nie tylko zbiorów klasy \mathbf{A} , lecz dowolnego obrazu $F(\mathbf{A})$ tej klasy. Załóżmy, że funkcja $B = f(A)$ jest określona dla dowolnego zbioru A klasy \mathbf{A} i oznaczmy klasę zbiorów, które są wartościami tej funkcji przez \mathbf{B} , tj. $\mathbf{B} = \{B: (\forall A \in \mathbf{A}) B = f(A)\}$. Jeśli $\mathbf{B} =_{\text{df}} F(\mathbf{A})$, to:

$$\mathbf{D6.a5} \quad x \in \cup F(\mathbf{A}) \Leftrightarrow (\forall A \in \mathbf{A}) x \in f(A) \Leftrightarrow (\forall B \in \mathbf{B}) x \in B,$$

$$\mathbf{D7.a5} \quad x \in \cap F(\mathbf{A}) \Leftrightarrow (\bigwedge A \in \mathbf{A}) x \in f(A) \Leftrightarrow (\bigwedge B \in \mathbf{B}) x \in B.$$

Gdy funkcja f jest identycznościowa – tj. gdy dla każdego $A \in \mathbf{A}$ jest tak, że $f(A) = A$ oraz obraz klasy \mathbf{A} jest z nią identyczny, tj. $F(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ – wtedy definicje $\mathbf{df}\cup F(\mathbf{A})$ i $\mathbf{df}\cap F(\mathbf{A})$ upraszczają się do $\mathbf{df}\cup\mathbf{A}$ i $\mathbf{df}\cap\mathbf{A}$, a ponieważ klasa \mathbf{A} może być także dowolnym ciągiem zbiorów, a także może zawierać dowolną liczbę elementów, więc określenia $\mathbf{D6.a5}$ i $\mathbf{D7.a5}$ są uogólnieniem $\mathbf{df}\cup_{\infty}$ i $\mathbf{df}\cap_{\infty}$ oraz obejmują także sytuacje, w których stosuje się definicje $\mathbf{df}\cup$ i $\mathbf{df}\cap$.

Kolejne działanie (także – wynik działania) nazywa się różnicą zbiorów.

$$\mathbf{D8} \ (\mathbf{df}-) \quad x \in (A - B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B).$$

Oto przykłady twierdzeń opartych na tej definicji.

$$\mathbf{T21} \quad (A - B) \subset A.$$

Dowód:

Twierdzenie to jest oczywiste wobec $\mathbf{df}-$ oraz $\mathbf{df}\subset$, jeśli bowiem o dowolnym przedmiocie x przypuścimy, że 1.1 $x \in (A - B)$, to także 1.2 $x \in A$.

T22 $A \subset B \Leftrightarrow (A - B) = \emptyset$.

Dowód:

□ Koniunkcyjne połączenie założenia 1. $A \subset B$ oraz przypuszczenia, że 2. $(\forall x) x \in (A - B)$ {zdn.} prowadzi do sprzeczności: powiedzmy, że indywiduum $x_0 \in (A - B)$, co (zgodnie z **df-**) znaczy, że $x_0 \in A$ i $x_0 \notin B$; a jednocześnie, skoro $x_0 \in A$, to – na podstawie 1. oraz według **df-**: $x_0 \in B$.

□ Dowód implikacji odwrotnej jest analogiczny i równie prosty. Skoro 1. $(A - B) = \emptyset$, to założenie dowodu niewprost 2. $A \not\subset B$, równoważne z 3. $x_0 \in A$ i $x_0 \notin B$, jest – zgodnie z **df-** – sprzeczne z 1. ■

T23 $(A - B) \supset (A \cap B)$.

Dowód: Twierdzenie to jest bezpośrednią konsekwencją **df-**, **df \cap** i **df \supset** .

Definicja różnicy zbiorów jest składnikiem definicji tzw. różnicy symetrycznej zbiorów.

D8.a (df \div) $x \in (A \div B) \Leftrightarrow (x \in (A - B) \vee x \in (B - A))$.

Wynikiem działania \div jest więc suma różnic: jego argumentu pierwszego i drugiego oraz drugiego i pierwszego. W kontekście określę **df \div** , **df \cup** oraz **df \cap** jest oczywiste, że dla dowolnych zbiorów jest spełniona równość:

T24 $(A \div B) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Dowód:

Dowolny przedmiot x , będący elementem $(A \div B)$, jest elementem zbioru A i nie jest elementem zbioru B albo odwrotnie {**df \div** }. Przy każdej z tych możliwości jest prawdą, że: $x \in (A \cup B)$ {**DA**, **df \cup** } oraz $x \notin (A \cap B)$ {**df \cap** }, czyli jest elementem $(A \cup B) - (A \cap B)$ {**df \div** }. Z drugiej strony, jeśli dowolny przedmiot jest elementem zbioru A lub B , lecz nie jest jednocześnie elementem obu tych zbiorów, to {**NK**} przyjęte w charakterze założeń dodatkowych niesprzeczne koniunkcje prowadzą do wniosku, że jest elementem $(A - B)$ lub $(B - A)$, czyli elementem $(A \div B)$ {**df \div** }. ■

Kolejne działanie, zwane dopełnieniem, może być stosowane tylko w określonym uniwersum U . Nie można bowiem, pod groźbą antynomii, ogólnie przyjąć, że istnieje dopełnienie dowolnego zbioru, ani też – jak już była o tym mowa – że istnieje zbiór uniwersalny obejmujący wszystkie możliwe przedmioty dowolnego typu.

D9 (df) $x \in A' \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \in U)$.

Jak wiadomo, działanie określone w jakimś zbiorze przyporządkowuje jednoznacznie parze elementów z danego zbioru element z tego zbioru (zwany wartością działania). Jest tak również w przypadku działań określonych w zbiorze zbiorów, co jest wyraźnie widoczne dla zdefiniowanych wyżej działań sumy, iloczynu i różnicy, a mniej widoczne w zapisie działania dopełnienia i w skrótowym odczytywaniu tego działania. Mówi się zwykle o dopełnieniu A' zbioru A , choć pełniejsza i lepsza nazwa to: dopełnienie zbioru A do danego uniwersum U . Argumentami tego działania są więc zawsze dany zbiór oraz określony zbiór uniwersalny U , a pomijanie tego faktu w wysławianiu jest usprawiedliwione tylko o ile wiadomo, który ogół jest zbiorem uniwersalnym (zwykle w rozważaniach tak jest).

Definicja działania dopełnienia jest zastosowana w twierdzeniach **T25–T28**.

T25 $A = B \Leftrightarrow A' = B'$.

Dowód \square Z 1. $A = B$ {zał.} i 1.1 $x \in A'$ {zd.} łatwo jest wyprowadzić wniosek, że 1.2 $x \notin A \wedge x \in U$, a wobec tego 1.3 $x \notin B \wedge x \in U$ {**RZ**_≡: 1, 1.2}, czyli 1.4 $x \in B'$, a więc 2. $A' \subset B'$ {**df**, **DA**: 1.1 \Rightarrow 1.4}. Analogicznie założenie 2.1 $x \in B'$ prowadzi do konkluzji, że 3. $B' \subset A'$. Zatem: $A' = B'$ {**RO**_⇔: **T6**, **DK**: 2, 3}.

\square W dowodzie implikacji odwrotnej ważny jest fakt, że wszystkie rozważane zbiory są podzbiorem ustalonego uniwersum U . Założenia 1. $A' = B'$ oraz dodatkowe 1.1 $x \in A$ dają podstawy, by uznać: 1.2 $x \notin A'$ {**df**}; 1.3 $x \notin B'$ {**RZ**_≡: 1, 1.2}, czyli – jako że $x \in U$ – 1.4 $x \in B$ {**df**}. W taki sam sposób od założenia dodatkowego 2.1 $x \in B$ dochodzi się do wniosku, że 2.4 $x \in A$, a więc że $A = B$ {**RO**_⇔: **T6**, **DK**: 1.1 \Rightarrow 1.4, 2.1 \Rightarrow 2.4}. ■

T26 $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$.

Dowód:

\square Z założeń 1. $A \subset B$ {zał.} i 1.1 $x \in B'$ {zd.} wynika, że 1.2 $x \notin B$ {**df**}, a wobec tego 1.3 $x \notin A$ {**OA**: 1, **TOL**: **T4**, 1.2}, czyli 1.4 $x \in A'$ {**df**}, a więc: $B' \subset A'$ {**df**, **DA**: 1.1 \Rightarrow 1.4}.

\square Podobnie, wychodząc od 1. $B' \subset A'$ i 1.1 $x \in A$, można uznać, stosując te same definicje i reguły, kolejno: 1.2 $x \notin A'$; 1.3 $x \notin B'$; 1.4 $x \in B$, co znaczy, że: $A \subset B$. ■

T27 $(A \cup B)' = (A' \cap B')$.

Dowód:

Korzystając kolejno z **df'**, **df \cup** , **NA**, **OK**, **df \cap** oraz **df \cap** , można uznać następujący ciąg równoważności:

$$(*) \quad x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow (x \notin (A \cup B) \wedge x \in U) \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in U) \Leftrightarrow \\ (x \in A' \wedge x \in B') \Leftrightarrow x \in (A' \cap B').$$

Zatem: 1. $(A \cup B)' \subset (A' \cap B')$ oraz 2. $(A' \cap B') \subset (A \cup B)'$,

czyli $(A \cup B)' = (A' \cap B')$ {**RO**_↔: **T6**, 1 \wedge 2}.

Albo: 1. $(\wedge x) [x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \in (A' \cap B')]$ {**DL**: (*)},

czyli $(A \cup B)' = (A' \cap B')$ {**ZE**: 1}. ■

T28 $(A \cap B)' = (A' \cup B')$.

Dowód:

Na podstawie stosowanych kolejno **df'**, **df \cap** , **NK**, ****RI.3**: **T36**, **df \cup** uzyskuje się następujące równoważności:

$$x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow (x \notin (A \cap B) \wedge x \in U) \Leftrightarrow ((x \notin A \vee x \notin B) \wedge x \in U) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [(x \notin A \wedge x \in U) \vee (x \notin B \wedge x \in U)] \Leftrightarrow (x \in A' \vee x \in B') \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in (A' \cup B'), \text{ czyli:}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \in (A' \cup B').$$

Zatem: 1. $(\wedge x) [x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \in (A' \cup B')]$ {**DL**: (\Leftrightarrow)},

czyli $(A \cap B)' = (A' \cup B')$ {**ZE**: 1};

albo inaczej: 1. $(A \cap B)' \subset (A' \cup B')$ oraz 2. $(A' \cup B') \subset (A \cap B)'$,

czyli $(A \cap B)' = (A' \cup B')$ {**RO**_↔: **T6**, 1 \wedge 2}. ■

1.4 Zbiory wyznaczone przez funkcje zdaniowe

Operator abstrakcji służy do oznaczania ogółu przedmiotów spełniających daną funkcję zdaniową (*RV.2). Następująca definicja uściśla, co znaczy, że przedmiot jest elementem zbioru wyznaczonego przez daną funkcję zdaniową:

D10 $y \in \{x: \Phi(x)\} \Leftrightarrow \Phi(y)$.

Jak widać, definicja ta daje możliwość równoważnego formułowania pewnych wyrażeń zdaniowych w języku albo rachunku zbiorów, albo rachunku predykatów. Korzystając z **D10**, łatwo jest okazać, że prawdziwe są następujące twierdzenia dotyczące relacji między zakresami zbiorów wyznaczonych przez funkcje zdaniowe.

T29.1 $\{x: \Phi(x)\} \subset \{x: \Psi(x)\} \Leftrightarrow (\wedge x) [\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)].$

T29.2 $\{x: \Phi(x)\} = \{x: \Psi(x)\} \Leftrightarrow (\wedge x) [\Phi(x) \Leftrightarrow \Psi(x)].$

T29.3 $\{x: \Phi(x)\} \supset \subset \{x: \Psi(x)\} \Leftrightarrow (\wedge x) [\Phi(x) \Rightarrow \sim \Psi(x)].$

Zgodnie z tymi twierdzeniami można powiedzieć, że: (i) zbiór wyznaczony przez jakąś formułę zdaniową zawiera się w zbiorze wyznaczonym przez drugą formułę zdaniową zawsze i tylko, jeśli dla dowolnego przedmiotu jest tak, że o ile spełnia pierwszą z tych formuł, to spełnia drugą (krócej: pierwsza z tych formuł zdaniowych implikuje drugą); (ii) zbiory wyznaczone przez formuły zdaniowe są identyczne wtedy i tylko, gdy formuły te są równoważne; (iii) zbiory wyznaczone przez formuły zdaniowe są rozłączne wtedy i tylko, gdy o ile dowolny przedmiot spełnia jedną z tych form, to nie spełnia drugiej. Inaczej można powiedzieć, że w pierwszej z tych sytuacji warunek Φ jest mocniejszy w tym sensie, że gdy jakiś przedmiot ten warunek spełnia, to z tego wynika, że spełnia też warunek Ψ ; w drugiej, że oba warunki są równosilne (równoważne), a w trzeciej, że oba warunki się wykluczają.

Dowód T29.1:

□ Koniunkcja założenia dowodzonej implikacji 1. $\{x: \Phi(x)\} \subset \{x: \Psi(x)\}$ oraz założenia dowodu niewprost 2. $\sim(\wedge x) [\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)]$ prowadzi do sprzeczności. Stosując do 2. kolejno reguły $\sim\Lambda$, **NI**, i **OV** uzyskuje się 3. $\Phi(a) \wedge \sim\Psi(a)$, a wobec tego 4. $a \in \{x: \Phi(x)\} \wedge a \notin \{x: \Psi(x)\}$ **{RO_⇔: D10, 3}**. Skoro jednak $a \in \{x: \Phi(x)\}$ **{OK: 4}**, to 5. $a \in \{x: \Psi(x)\}$ **{RO: T4, $a \in \{x: \Phi(x)\} \wedge 1$ }**, co jest sprzeczne z drugim członem koniunkcji 4.

□ Założenie implikacji odwrotnej 1. $(\wedge x) [\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)]$ i założenie dodatkowe 1.1 $y \in \{x: \Phi(x)\}$ dają podstawę do uznania: 1.2 $\Phi(y)$ **{RO_⇔: D10, 1.1}**, 1.3 $\Psi(y)$ **{RO_⇔: OΛ: 1, 1.2}** oraz 1.4 $y \in \{x: \Psi(x)\}$ **{RO_⇔: D10, 1.3}**. Zatem 2. $y \in \{x: \Phi(x)\} \Rightarrow y \in \{x: \Psi(x)\}$ **{1.1 \Rightarrow 1.4}**, a ponieważ przedmiot y , o którym przypuściliśmy 1.1 był dowolny, więc 3. $(\wedge y) [y \in \{x: \Phi(x)\} \Rightarrow y \in \{x: \Psi(x)\}]$, co można zapisać krócej jako: $\{x: \Phi(x)\} \subset \{x: \Psi(x)\}$ **{df_⊂: 3}**. ■

Dowód T29.2:

□ Założenia 1. $\{x: \Phi(x)\} = \{x: \Psi(x)\}$ oraz 2. $\sim(\wedge x) [\Phi(x) \Leftrightarrow \Psi(x)]$ {zdn.} prowadzą do sprzeczności. Założenie 2. jest bowiem równoważne z 3. $(\forall x) [(\Phi(x) \wedge \sim\Psi(x)) \vee (\Psi(x) \wedge \sim\Phi(x))]$ **{NI, NK, $\sim\Lambda$, RZ_⇔: 2, \Leftrightarrow , \Rightarrow , \wedge }**, a więc 4. $(\Phi(a) \wedge \sim\Psi(a)) \vee (\Psi(a) \wedge \sim\Phi(a))$ **{OV: 3}**. Jeśli 1.1 $(\Phi(a) \wedge \sim\Psi(a))$

{zd.}, to 1.2 $a \in \{x: \Phi(x)\} \wedge a \notin \{x: \Psi(x)\}$ {**RO**_⇔, **TOL**_⇔: **D10**, 1.1}, co jest sprzeczne z 1 {**RZ**_⇔: 1, 1.2}. W ten sam sposób do sprzeczności prowadzi także przypuszczenie, że 2.1 $(\Psi(a) \wedge \sim\Phi(a))$, co kończy dowód {1.1 ⇒ sprz., 2.1 ⇒ sprz., 4}.

□ Wychodząc z założenia 1. $(\wedge x) [\Phi(x) \Leftrightarrow \Psi(x)]$, dochodzi się do równości $\{x: \Phi(x)\} = \{x: \Psi(x)\}$ w sposób analogiczny do zastosowanego w dowodzie implikacji odwrotnej **T29.1**. Założenie, że dla dowolnego y 1.1 $y \in \{x: \Phi(x)\}$ jest równoważne kolejno z: 1.2 $\Phi(y)$ {**D10**, 1.1}, 1.3 $\Psi(y)$ {1, 1.2}, 1.4 $y \in \{x: \Psi(x)\}$, co po uogólnieniu {**DL**: 1.1 ⇔ 1.4} jest równoważne z równością $\{x: \Phi(x)\} = \{x: \Psi(x)\}$. ■

Dowód T29.3:

□ Bezpośrednio z założenia 1. $\{x: \Phi(x)\} \supset \{x: \Psi(x)\}$ wynika, że 2. $(\wedge y) [y \in \{x: \Phi(x)\} \Rightarrow y \in \{x: \Psi(x)\}]$ {**df**_⊃: 1}, a więc:

$(\wedge x) [\Phi(x) \Rightarrow \sim\Psi(x)]$ {**TOL**_⇔, **RZ**_⇔: **D10**, 2}.

□ Skoro 1. $(\wedge x) [\Phi(x) \Rightarrow \sim\Psi(x)]$, to jeśli o jakimś (dowolnym) y przypuścimy, że 1.1 $y \in \{x: \Phi(x)\}$ {zd.}, to: 1.2 $\Phi(y)$ {**D10**, 1.1}, 1.3 $\sim\Psi(y)$ {**RO**: **OL**: 1, 1.2}, 1.4 $y \notin \{x: \Psi(x)\}$ {**TOL**_⇔: **D10**, 1.3}. Zatem

2. $(\wedge y) [y \in \{x: \Phi(x)\} \Rightarrow y \notin \{x: \Psi(x)\}]$ {**DL**: 1.1 ⇒ 1.4}, czyli:

$\{x: \Phi(x)\} \supset \{x: \Psi(x)\}$ {**df**_⊃: 2}. ■

Odwołując się do **D10**, łatwo jest także okazać, że są spełnione następujące równości.

T30.1 $\{x: \Phi(x)\} \cup \{x: \Psi(x)\} = \{x: \Phi(x) \vee \Psi(x)\}$,

T30.2 $\{x: \Phi(x)\} \cap \{x: \Psi(x)\} = \{x: \Phi(x) \wedge \Psi(x)\}$,

T30.3 $\{x: \Phi(x)\} - \{x: \Psi(x)\} = \{x: \Phi(x) \wedge \sim\Psi(x)\}$,

T30.4 $\{x: \Phi(x)\}' = \{x: \sim\Phi(x)\}$.

Zgodnie z pierwszym z tych twierdzeń suma zbiorów wyznaczonych przez formuły zdaniowe jest identyczna ze zbiorem wyznaczonym przez alternatywę tych formuł; według drugiego iloczyn takich zbiorów jest równy zbiorowi wyznaczonemu przez koniunkcję formuł; wysłowiając trzecie, można powiedzieć, że różnica zbiorów wyznaczonych przez dwie formuły jest identyczna ze zbiorem wyznaczonym przez koniunkcję formuły wyznaczającej pierwszy zbiór oraz negacji formuły wyznaczającej zbiór drugi; natomiast dopełnienie zbioru wyznaczonego przez formułę jest identyczne z ogółem przedmiotów ustalonego uniwersum, które danej formuły nie spełniają.

Dowód T30.1:

Założenie o dowolnym obiekcie y , że 1.1 $y \in (\{x: \Phi(x)\} \cup \{x: \Psi(x)\})$ jest równoważne kolejno z: 1.2 $y \in \{x: \Phi(x)\} \vee y \in \{x: \Psi(x)\}$ {RO_⇔: df_∪, 1.1}, 1.3 $\Phi(x) \vee \Psi(x)$ {RZ_⇔: D10, 1.2}, 1.4 $y \in \{x: \Phi(x) \vee \Psi(x)\}$ {RO_⇔: D10, 1.3}. Zatem {DΛ: 1.1 ⇒ 1.4}:

1. $(\wedge y) [y \in (\{x: \Phi(x)\} \cup \{x: \Psi(x)\}) \Leftrightarrow y \in \{x: \Phi(x) \vee \Psi(x)\}]$, tj.
 $\{x: \Phi(x)\} \cup \{x: \Psi(x)\} = \{x: \Phi(x) \vee \Psi(x)\}$ {ZE: 1}.

Dowody twierdzeń T30.2–T30.4 są w pełni analogiczne do dowodu dla sumy zbiorów wyznaczonych przez formuły zdaniowe (w ich początkowym fragmencie korzysta się, odpowiednio, z **df**_∩, **df**_– i **df**_∪). ■

Twierdzenia T29.1–3 oraz T30.1–4 zostały sformułowane dla funkcji zdaniowych jednej zmiennej, są jednak spełnione – co można okazać w analogicznych rozumowaniach – także dla relacji między zbiorami i działań na zbiorach wyznaczonych przez funkcje zdaniowe dwóch, trzech itd., ogólnie: n -zmiennych.

1.5 Rachunek zbiorów a teoria wynikania zdań kategorycznych

Rachunek zbiorów jest powiązany z wieloma innymi teoriami logicznymi i matematycznymi. Komentując rozstrzygnięcie twierdzeń rachunku zbiorów, wspomniałem już o możliwości posłużenia się znaną z sylogistyki metodą Venna. Zamykając podrozdział poświęcony rachunkowi zbiorów, warto dokładniej popatrzeć na związki między rachunkiem zbiorów a teorią wynikania zdań kategorycznych, a tym samym – WRP.

Wiadomo, że sylogistykę, a ogólniej – teorię wynikania zdań kategorycznych można uznać za fragment klasycznego rachunku predykatów, tj. WRP z predykatami jednoargumentowymi, a kluczowe dla takiej interpretacji są przekłady zdań kategorycznych na zdania WRP.

S|WRP

$S a P \Leftrightarrow$ Nie istnieją S , które nie są $P \Leftrightarrow (\wedge x) [S(x) \Rightarrow P(x)]$;

$S e P \Leftrightarrow$ Nie istnieją S , które są $P \Leftrightarrow (\wedge x) [S(x) \Rightarrow \sim P(x)]$;

$S i P \Leftrightarrow$ Istnieją S , które są $P \Leftrightarrow (\vee x) [S(x) \wedge P(x)]$;

$S o P \Leftrightarrow$ Istnieją S , które nie są $P \Leftrightarrow (\vee x) [S(x) \wedge \sim P(x)]$.

Równoważności S|WRP dają podstawę tzw. słabej interpretacji sylogistyki w WRP, a dołączenie do nich warunku, że kategoria oznaczana

przez S jest niepusta, tj, że: $(\forall x) S(x)$, jest interpretacją sylogistyki zwaną mocną (**RIII.3.3).

Porównanie tych równoważności z definicjami znanymi z rachunku zbiorów (zbioru pustego, relacji między zbiorami i działań na zbiorach) prowadzi do uzyskania przekładów zdań kategoriycznych na twierdzenia rachunku zbiorów. Następujące równoważności ilustrują możliwości takiego przekładania (symbol S ponownie wskazuje na sylogistykę jako trzon teorii wynikania zdań kategoriycznych):

S|RZ

$$\begin{aligned} S a P &\Leftrightarrow (\forall x) [x \in S \Rightarrow x \in P] \Leftrightarrow S \subset P; \\ S e P &\Leftrightarrow (\forall x) [x \in S \Rightarrow x \notin P] \Leftrightarrow S \supset\subset P; \\ S i P &\Leftrightarrow (\forall x) [x \in S \wedge x \in P] \Leftrightarrow (S \cap P) \neq \emptyset; \\ S o P &\Leftrightarrow (\forall x) [x \in S \wedge x \notin P] \Leftrightarrow (S - P) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Ostatnie człony tych równoważności, w których są użyte symbole relacji i działań między zbiorami oraz symbol (pojęcie) zbioru pustego, są oczywiste w kontekście odnośnych definicji:

$$\begin{aligned} A \subset B &\Leftrightarrow (\forall x) [x \in A \Rightarrow x \in B] && \text{(D2);} \\ A \supset\subset B &\Leftrightarrow (\forall x) [x \in A \Rightarrow x \notin B] && \text{(D4);} \\ x \in (A \cap B) &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) && \text{(D7.a1);} \\ x \in (A - B) &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) && \text{(D8);} \\ (\forall x) x \notin \emptyset &&& \text{(definicja zbioru pustego).} \end{aligned}$$

Równoważności **S|RZ** nie są jedynymi możliwymi przekładami zdań kategoriycznych na formuły rachunku zbiorów. Korzystając z twierdzeń tego rachunku, można te zdania oddać równoważnie innymi formułami, na przykład:

$$\begin{aligned} S a P &\Leftrightarrow S \subset P \Leftrightarrow S \subset P \Leftrightarrow (S \cup P) = P \Leftrightarrow (S \cap P) = S \Leftrightarrow (S - P) = \emptyset \\ &&& \text{(por. twierdzenia T12, T14, T22);} \\ S e P &\Leftrightarrow S \supset\subset P \Leftrightarrow (S \cap P) = \emptyset && \text{(zob. T15);} \\ S o P &\Leftrightarrow (S - P) \neq \emptyset \Leftrightarrow (S \cap P') \neq \emptyset && (x \in P' \Leftrightarrow x \notin P, \text{D9}). \end{aligned}$$

Otóż opisując związki między rachunkiem zbiorów a sylogistyką od strony uzasadniania twierdzeń, można powiedzieć, że środkami teorii zbiorów (metodą dowodową) da się sprawdzać poprawność logiczną wnioskowań sylogistycznych, a z drugiej strony, metodą rysunków Venna da się sprawdzać twierdzenia rachunku zbiorów.

Na przykład da się metodą dowodową okazać poprawność logiczną wnioskowania:

Ponieważ nie każde kłamstwo jest złem, a każde oszustwo jest złem, więc nie każde kłamstwo jest oszustwem.

Oznaczając zbiory czynów, o których mowa, odpowiednio przez K , Z oraz O , można to wnioskowanie (jego schemat) zapisać w postaci implikacji:

$$(\sim(K \subset Z) \wedge O \subset Z) \Rightarrow \sim(K \subset O)$$

Dowód:

- | | |
|---|-----------------------------|
| 1. $\sim(K \subset Z)$ | {zał.} |
| 2. $O \subset Z$ | {zał.} |
| 3. $K \subset O$ | {zdn.} |
| 4. $\sim(\wedge x) [x \in K \Rightarrow x \in Z]$ | {dfc: 1} |
| 5. $(\vee x) [x \in K \wedge x \notin Z]$ | { $\sim\wedge$: 4} |
| 6. $(\wedge x) [x \in O \Rightarrow x \in Z]$ | {dfc: 2} |
| 7. $(\wedge x) [x \in K \Rightarrow x \in O]$ | {dfc: 3} |
| 8. $x \in K \wedge x \notin Z$ | {OV: 5} |
| 9. $x \in O$ | {RO: O \wedge : 7, OK: 5} |
| 10. $x \in Z$ | {RO: O \wedge : 6, 9} |

sprz.: 10, OK: 8.

Natomiast stosując metodę Venna, da się na przykład okazać, że nie jest poprawne logicznie wnioskowanie:

Żaden człowiek młody nie jest doświadczony, a ponieważ każdy doświadczony jest realistą, więc żaden młody człowiek nie jest realistą.

Zaznaczywszy przesłanki na odpowiednim dla tego wnioskowania rysunku (wykonanym w sposób opisany w **RIII.3.2.2), dostrzegamy, że nie jest spełniona reguła wynikania dla wniosku ogólnoprzeczącego, jest bowiem na diagramie pole niezakreskowane, na którym są symbole M oraz R .

Stosując te same oznaczenia dla odpowiednich zbiorów, można to rozumowanie zapisać w postaci formuły:

$$(M \supset D \wedge D \subset R) \Rightarrow M \supset R.$$

Relacje zakresowe między tymi zbiorami da się przedstawić tak, że rozłączne są zbiory M i D i przy tym zbiór D jest zawarty w zbiorze R , a zbiory M i R nie są rozłączne: na przykład rozłączne zbiory M i D można na rysunku umieścić w zakresie zbioru R . Kontrprzypadkiem – dowodzącym, że implikacja ta nie jest spełniona dla dowolnych zbiorów M , D oraz R – jest m.in. taka interpretacja semantyczna: $M = \{1\}$, $D = \{2\}$, $R = \{1, 2, 3\}$. W interpretacji tej poprzednik tej implikacji jest spełniony, a nie jest spełniony jej następnik.

2. Teoria relacji

W podrozdziale tym są najpierw wprowadzone pojęcia podstawowe, tj. iloczynu kartezjańskiego oraz relacji, po czym są wyróżnione i scharakteryzowane rodzaje relacji: funkcje i ciągi; relacje zwrotne, spójne, symetryczne (asymetryczne), przechodnie, równościowe; relacje porządkujące (i zbiory uporządkowane); izomorfizm relacji.

2.1 Iloczyn kartezjański zbiorów

W uwagach o pojęciu zbioru była już mowa o różnicy między zbiorami nieuporządkowanymi a uporządkowanymi, tj. takimi, które są identyfikowane nie tylko przez skład swoich elementów, lecz także przez ich kolejność (**RIV.1.1). W notacji przyjmowanej zwykle, również w tym opracowaniu, używa się do oznaczania zbiorów nieuporządkowanych nawiasów klamrowych $\{\}$, natomiast w symbolicznym nazywaniu zbiorów uporządkowanych stosuje się nawiasy ostre $\langle \rangle$.

Dwuelementowy zbiór uporządkowany, którego pierwszym elementem jest przedmiot x , a drugim przedmiot y oznaczamy przez $\langle x, y \rangle$. Zbiór taki nazywa się parą uporządkowaną. Pary uporządkowane są równe wtedy i tylko, gdy identyczne są ich elementy pierwsze i drugie: $\langle x, y \rangle = \langle u, w \rangle \Leftrightarrow x = u \wedge y = w$. Trójkę uporządkowaną określa się za pomocą pojęcia pary uporządkowanej: $\langle x, y, z \rangle = \langle \langle x, y \rangle, z \rangle$. Korzystając z tej identyczności, zamiast napisem $\langle \langle x, y \rangle, z \rangle$ można oznaczać trójkę uporządkowaną przez $\langle x, y, z \rangle$; analogicznie jest rozumiana i oznaczana uporządkowana czwórka, piątka itd. przedmiotów – ogólnie: n -tka uporządkowana:

$$\mathbf{D1} \quad \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle \Leftrightarrow (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_n = y_n).$$

Wśród przedmiotów tworzących n -elementowy zbiór uporządkowany niektóre, a nawet wszystkie mogą być identyczne, dlatego np. $\langle a, a \rangle \neq \langle a \rangle$, natomiast w odniesieniu do zbiorów nieuporządkowanych jest, jak wiadomo: $\{a, a\} = \{a\}$.

Iloczynem kartezjańskim (inaczej – produktem) zbiorów X oraz Y nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych, których pierwsze składniki są elementami zbioru X , a drugie są elementami zbioru Y . Iloczyn

kartezjański zbiorów X oraz Y jest oznaczany jako $X \times Y$, a jego definicja jest następująca:

$$\mathbf{D2.a1} \quad (\mathbf{df} \times) \quad \langle x, y \rangle \in (A \times B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B).$$

Analogicznie jest rozumiany produkt (iloczyn) kartezjańskie więcej niż dwóch zbiorów.

$$\mathbf{D2.a2} \quad (\mathbf{df} \times^n) \quad \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \Leftrightarrow (x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n).$$

Zgodnie z podanymi definicjami y jest elementem n -członowego iloczynu kartezjańskiego $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ wtedy i tylko, gdy istnieją elementy $x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n$ oraz $y = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$.

Porównując iloczyn kartezjański ze zdefiniowanymi wcześniej działaniami na zbiorach, można powiedzieć, że działania sumy (\cup), iloczynu (\cap), różnicy ($-$) i dopełnienia zbiorów ($'$) przyporządkowują zbiorom zbiór, którego elementy są tego samego typu, co elementy zbiorów będących argumentami działań. Natomiast iloczynem kartezjańskim $A \times B$ zawsze jest rodzina zbiorów, tj. zbiór uporządkowanych n -tek, także jeśli A oraz B są zbiorami wyłącznie przedmiotów niebędących zbiorami, a nawet gdy ponadto $A = B$.

W definicji iloczynu kartezjańskiego można wykorzystać pojęcie zbioru wyznaczonego przez funkcję zdaniową. Jak wiadomo z uwag do operatora abstrakcji (*RV.2), $\{x_1, x_2, \dots, x_n; \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ to zbiór uporządkowanych n -tek spełniających n -argumentową funkcję zdaniową Φ : dla $n = 1$ jest to zbiór pojedynczych elementów, dla $n = 2$ – zbiór uporządkowanych par itd. Zamiast o zbiorach wyznaczonych przez funkcje (formuły, formy) zdaniowe, mówi się także o zbiorach n -tek spełniających warunek $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Otóż o elementach zbioru $A \times B$ zdefiniowanego w **D2.a1** można powiedzieć, że spełniają warunek: $x \in A \wedge y \in B$, natomiast o układach (n -tkach uporządkowanych) będących elementami zdefiniowanego w **D2.a2** zbioru $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, że spełniają warunek: $x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n$.

Oto stosowane określenia:

$$\mathbf{D2.b1} \quad (A \times B) = \{x, y: x \in A \wedge y \in B\};$$

$$\mathbf{D2.b2} \quad (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n: x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n\}.$$

Określenia te (identycznościowe) są równoważne z definicjami równoważnościowymi **D2.a**.

Korzystając z (**df**×), można okazać na przykład, że są prawdziwe następujące twierdzenia (prawa rozdzielności mnożenia kartezjańskiego względem działań sumy, iloczynu, różnicy zbiorów i iloczynu kartezjańskiego).

$$\mathbf{T1.1} \quad (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \text{ oraz} \\ C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B);$$

$$\mathbf{T1.2} \quad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C) \text{ oraz} \\ C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B);$$

$$\mathbf{T1.3} \quad (A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C) \text{ oraz} \\ C \times (A - B) = (C \times A) - (C \times B);$$

$$\mathbf{T1.4} \quad (A \times B) \times C = A \times (B \times C) \text{ oraz } A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

Dowód T1.1:

Na podstawie **D2.a** można stwierdzić, że jeżeli 1.1 $\langle x, y \rangle \in (A \cup B) \times C$, to $x \in (A \cup B) \wedge y \in C$, a przy tym jeśli 1.1.1 $x \in A \wedge y \in C$, to para $\langle x, y \rangle \in (A \times C)$; jeśli natomiast 1.1.2 $x \in B \wedge y \in C$, to $\langle x, y \rangle \in (B \times C)$. Zatem: 1.2 $\langle x, y \rangle \in (A \times C) \cup (B \times C)$. Z drugiej strony o ile 2.1 $\langle x, y \rangle \in (A \times C) \cup (B \times C)$, to 2.2 $y \in C$, a $x \in A \vee x \in B$, czyli 2.3 $x \in (A \cup B)$, a więc 2.4 $\langle x, y \rangle \in (A \cup B) \times C$. Równość **T1** jest więc spełniona dla dowolnych zbiorów **{**RIV.1: T6, DΛ: 1.1 \Rightarrow 1.2; 2.1 \Rightarrow 2.4}**.

Dowód rozdzielności prawostronnej względem sumy jest taki sam, a dowody równości **T1.2–T1.4** również są oparte na **D2.a** i są analogiczne do dowodu dla **T1.1**. ■

$$\mathbf{T2.a} \quad (A \times \emptyset) = \emptyset;$$

$$\mathbf{b} \quad A \times \{1, 2, \dots, n\} = (A \times \{1\}) \cup (A \times \{2\}) \cup \dots \cup (A \times \{n\}).$$

Dowód:

a. Bezpośrednio z definicji zbioru \emptyset wynika, że nie istnieje para $\langle x, y \rangle \in (A \times \emptyset)$.

b. Ponieważ jest oczywiste, że $\{1, 2, \dots, n\} = (\{1\} \cup \{2\} \cup \dots \cup \{n\})$, więc równość **T2.b** można zapisać w postaci:

$$A \times (\{1\} \cup \{2\} \cup \dots \cup \{n\}) = (A \times \{1\}) \cup (A \times \{2\}) \cup \dots \cup (A \times \{n\}),$$

w której jest wyraźnie widoczne, że udowodnienie równości **T2.b** jest oparte na zastosowaniu (wielokrotnym) twierdzenia **T1.1**. ■

T3.a $(A \cap B) = \emptyset \Rightarrow (A \times C) \cap (B \times C) = \emptyset$;

b $A \subset B \Rightarrow (A \times C) \subset (B \times C)$.

Dowód:

a. Skoro – zgodnie z założeniem – nie istnieje $x \in (A \cap B)$, to nie istnieje też para $\langle x, y \rangle \in (A \times C) \cap (B \times C)$, jako że jej pierwszy składnik musiałby być elementem i A , i B {D2.a1}.

b. W kontekście założenia 1. $A \subset B$ przypuszczenie, że 1.1 istnieje $\langle x, y \rangle$ takie, że: $\langle x, y \rangle \in (A \times C)$ i $\langle x, y \rangle \notin (B \times C)$ prowadzi do sprzeczności. Twierdzenie, że $\langle x, y \rangle \notin (B \times C)$ byłoby bowiem spełnione, tylko gdy jednocześnie $y \in C$ i $y \notin C$ lub jednocześnie $x \in A$ i $x \notin B$ (i ta koniunkcja, wobec 1., prowadzi do sprzeczności: $x \in B$ i $x \notin B$). Zatem:

2. dla każdej pary $\langle x, y \rangle$ jest tak, że jeśli $\langle x, y \rangle \in (A \times C)$, to $\langle x, y \rangle \in (B \times C)$ {1.1 \Rightarrow sprz.}, co znaczy, że $(A \times C) \subset (B \times C)$ {df.: 2}. ■

2.2 Relacje i działania na relacjach

Pojęcie iloczynu kartezjańskiego otwiera drogę do definiowania relacji i funkcji. Dowolne relacje, zgodnie z symboliką stosowaną w rachunku predykatów, będą oznaczane przez R, S, T, \dots , a jeśli będzie to potrzebne, także przez litery indeksowane, np. R_1, R_2, \dots , traktowane, jak w innych rachunkach, jako jeden symbol. W przypadku relacji dwuargumentowych (dwuczłonowych) będą stosowane napisy takie, jak np. $x R y$ albo $R(x, y)$, a gdy argumentów (członów) jest więcej, wtedy np.: $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Jeśli $R(x, y)$, to mówimy, że relacja R wiąże przedmioty x oraz y lub że przyporządkowuje przedmiotowi x przedmiot y albo też, że przedmioty x oraz y pozostają w relacji R lub że ją spełniają. Analogicznie mówi się o przedmiotach x_1, x_2, \dots, x_n .

Relacje są reprezentowane przez zbiory n -tek uporządkowanych przedmiotów, przez które są spełnione. Zgodne z taką reprezentacją określenia stosowne dla relacji dwuargumentowych to:

D3.a1 $\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow x R y$ oraz

D3.b1 $R = \{x, y: x R y\}$,

a w postaci ogólniejszej:

D3.a2 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in R \Leftrightarrow R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oraz

D3.b2 $R = \{x_1, x_2, \dots, x_n: R(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$.

Rozumianą ogólnie relacją dwuczłonową jest więc każdy zbiór par uporządkowanych, relacją trójczłonową – zbiór uporządkowanych trójek itd.

W kolejnych definicjach jest wprowadzone pojęcie relacji ograniczonej do jakiegoś zbioru (**D4**) oraz pojęcia dziedzin relacji (dziedziny prawostronnej i lewostronnej) i jej pola (**D5**).

D4.a $\langle x, y \rangle \in R|_A \Leftrightarrow x, y \in A \wedge x R y$;

D4.b $R|_A = \{x, y: x, y \in A \wedge x R y\}$.

Na przykład relacja $>|_A$, tj. relacja większości ograniczona do zbioru $A = \{1, 2, 3, 4\}$ jest identyczna ze zbiorem par uporządkowanych $\{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\}$. Jest oczywiste, że zmiana zbioru ograniczającego zmienia relację, nawet jeśli, bez tego uściślenia, mamy do czynienia z taką samą (jakościowo) relacją, np. $<|_{\mathcal{N}} \neq <|_{\mathcal{C}}$, jako że pierwszy z tych zbiorów oznacza relację mniejszości ograniczoną do zbioru liczb naturalnych, a drugi – tę samą relację ograniczoną do zbioru liczb całkowitych; prawdą jest natomiast, że $<|_{\mathcal{N}} \subset <|_{\mathcal{C}}$ ponieważ $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$.

D5.1 $x \in D_I(R) \Leftrightarrow (\forall y) \langle x, y \rangle \in R$;

D5.2 $y \in D_{II}(R) \Leftrightarrow (\forall x) \langle x, y \rangle \in R$;

D5.3 $P(R) = D_I(R) \cup D_{II}(R)$.

Dziedziny relacji prawostronna i lewostronna są też nazywane, odpowiednio: dziedziną i przeciwdziedziną. Odnośnie do relacji dwuargumentowych można powiedzieć, że ich dziedzina lewostronna to zbiór wszystkich pierwszych elementów, a dziedzina prawostronna jest zbiorem drugich elementów par uporządkowanych będących elementami danej relacji; natomiast pole relacji R to suma obu tych dziedzin (jest przy tym oczywiste, że $P(R) \neq R$). W przypadku relacji wieloargumentowej $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ trzeba mówić o kolejnych dziedzinach D_1, D_2, \dots, D_n , a w ich definiowaniu uwzględnić fakt, że muszą istnieć elementy wszystkich pozostałych dziedzin, takie że $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in R$; natomiast pole relacji wieloargumentowej jest sumą uogólnioną wszystkich jej dziedzin: $P(R) = \cup D_i, i = 1, \dots, n$.

Ponieważ relacje są reprezentowane przez zbiory, więc definicje relacji między zbiorami oraz działań na zbiorach, znane z algebry zbiorów, mają swoje odpowiedniki właściwe dla relacji. Analogiczne do **ZE** i **df \subset** (**RIV.1: **D1**, **D2**) są określenia relacji identyczności i inkluzji dla relacji rozumianych jako zbiory uporządkowanych n -tek:

$$\mathbf{D6.1} \quad R = S \Leftrightarrow (\wedge x, y) [\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in S],$$

$$\mathbf{D6.2} \quad R \subset S \Leftrightarrow (\wedge x, y) [\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle x, y \rangle \in S].$$

Jest również oczywiste, że i w przypadku relacji jest spełnione twierdzenie ****RIV.1: T6**, dające podstawę do równoważnościowego zastępowania identyczności zbiorów koniunkcją ich inkluzji ($=|\subset$):

$$R = S \Leftrightarrow (R \subset S \wedge S \subset R).$$

Analogicznie są też definicje rozłączności i krzyżowania (****RIV.1: D4, D5**) stosowane do relacji reprezentowanych zbiorami n -tek uporządkowanych. Ponadto każde twierdzenie rachunku zbiorów dotyczące własności relacji między zbiorami (****RIV.1: T3–T10, T29**) ma swój odpowiednik zapisany w symbolice stosowanej w rachunku relacji, np.: $(R \subset S \wedge S \subset T) \Rightarrow R \subset T$ jest analogonem ****RIV.1: T3**, a implikacja $(R \subset S \wedge S \supset T) \Rightarrow R \supset T$ jest odpowiednikiem ****RIV.1: T8**.

Również działania na relacjach są szczególnym przypadkiem działań na zbiorach. Oto odpowiedniki znanych z rachunku zbiorów definicji sumy, iloczynu, różnicy i dopełnienia (****RIV.1: D6–D9**):

D7. 1–4:

$$\langle x, y \rangle \in (R \cup S) \Leftrightarrow (\langle x, y \rangle \in R \vee \langle x, y \rangle \in S) \quad \text{lub}$$

$$xR \cup Sy \Leftrightarrow (xRy \vee xSy),$$

$$\langle x, y \rangle \in (R \cap S) \Leftrightarrow (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in S) \quad \text{lub}$$

$$xR \cap Sy \Leftrightarrow (xRy \wedge xSy),$$

$$\langle x, y \rangle \in (R - S) \Leftrightarrow (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \notin S) \quad \text{lub}$$

$$xR - Sy \Leftrightarrow (xRy \wedge \sim xSy),$$

$$\langle x, y \rangle \in R' \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \notin R \quad \text{lub}$$

$$xR'y \Leftrightarrow \sim xRy.$$

Określenia po prawej stronie każdego wiersza są zapisane w notacji tradycyjnie stosowanej w teorii relacji i są równoważne definicjom po stronie lewej.

Działania sumy i iloczynu relacji również można uogólnić dla k -relacji, $k \in \mathcal{N}$, uzyskując określenia analogiczne do definicji uogólnionej sumy i uogólnionego iloczynu (por. ****RIV.1: D6.a2, D7.a2**), np.:

$$\langle x, y \rangle \in (R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_k) \Leftrightarrow (\langle x, y \rangle \in R_1 \vee \langle x, y \rangle \in R_2, \dots, \vee \langle x, y \rangle \in R_k);$$

a podane wyżej określenia dla relacji dwuargumentowych – na relacje n -argumentowe, np.:

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in (R \cup S) \Leftrightarrow (\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in R \vee \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in S).$$

W zakresie relacji tak samo są również rozumiane inne wcześniej zdefiniowane odmiany działań sumy i iloczynu, tj.: działania nieskończone (**RIV.1: **D6.a3**, **D7.a3**), działania stosowane w określonej klasie zbiorów (**RIV.1: **D6.a4**, **D7.a4**), czyli pojęcia sumy oraz iloczynu rodziny zbiorów (w tym zbioru potęgowego zbioru A) oraz działania sumy i iloczynu stosowane w obrazach klas zbiorów (**RIV.1: **D6.a5**, **D7.a5**).

Fakt, że działania na relacjach są szczególnym przypadkiem działań na zbiorach, przejawia się także tym, że znane z rachunku zbiorów twierdzenia dotyczące działań (**RIV.1: **T11–T16**, **T19–T28**) mają swoje odpowiedniki w rachunku relacji, np. (sformułowane w notacji stosowanej w zakresie relacji) twierdzenia:

$$\begin{aligned} R &\subset (R \cup S), \\ (R \cap S) &\subset S, \\ (R \cup S) \cap T &= (R \cap T) \cup (S \cap T), \\ (R - S) &\subset R, \\ (R \cup S)' &= (R' \cap S'), \\ (R \cap S)' &= (R' \cup S') \end{aligned}$$

są oparte na udowodnionych w **RIV.1 twierdzeniach, odpowiednio: **T11**, **T13**, **T16**, **T21**, **T27** i **T28**.

Na **D7.1–4** oraz na definicji i twierdzeniach dotyczących działań na zbiorach wyznaczonych przez formuły zdaniowe (**RIV.1: **D10**; **T30.1–4**) są oparte uzasadnienia następujących twierdzeń rachunku relacji.

$$\begin{aligned} \mathbf{T4.1} \quad \{x, y: x R \cup S y\} &= \{x, y: x R y\} \cup \{x, y: x S y\}; \\ \mathbf{T4.2} \quad \{x, y: x R \cap S y\} &= \{x, y: x R y\} \cap \{x, y: x S y\}; \\ \mathbf{T4.3} \quad \{x, y: x R - S y\} &= \{x, y: x R y\} - \{x, y: x S y\}; \\ \mathbf{T4.4} \quad \{x, y: x R' y\} &= \{x, y: x R y\}'. \end{aligned}$$

Dowód T4.1:

Aby okazać, że jest spełniona inkluzja:

$$(*) \quad \{x, y: x R \cup S y\} \subset \{x, y: x R y\} \cup \{x, y: x S y\},$$

przypuśćmy, że:

$$1.1 \quad \langle x, y \rangle \in \{x, y: x R \cup S y\}.$$

Kolejne wiersze w tym fragmencie dowodu to:

$$1.2 \quad x R \cup S y \quad \{\mathbf{RO}_{\Leftrightarrow}: **\text{RIV.1: D10, 1.1}\}$$

$$1.3 \quad x R y \vee x S y \quad \{\mathbf{RO}_{\Leftrightarrow}: \mathbf{D7.1. 1.2}\}.$$

Założenie dodatkowe 1.1.1 $x R y$ prowadzi do uznania:

$$1.1.2 \quad \langle x, y \rangle \in \{x, y: x R y\} \quad \{\mathbf{RO}_{\Leftrightarrow}: **\text{RIV.1: D10, 1.1.1}\},$$

$$1.1.3 \quad \langle x, y \rangle \in \{x, y: x R y\} \vee \langle x, y \rangle \in \{x, y: x S y\} \quad \{\mathbf{DA}: 1.1.2\},$$

$$1.1.4 \quad \langle x, y \rangle \in \{x, y: x R y\} \cup \{x, y: x S y\} \quad \{\mathbf{df}\cup, 1.1.3\}.$$

Do twierdzenia, że 2.1.4 $\langle x, y \rangle \in \{x, y: x R y\} \cup \{x, y: x S y\}$ prowadzi również założenie 2.1.1 $x S y$, więc można uznać, że

$$1.4 \quad \langle x, y \rangle \in \{x, y: x R y\} \cup \{x, y: x S y\} \{1.1.1 \Rightarrow 1.1.4, 2.1.1 \Rightarrow 2.1.4, 1.3\},$$

a wobec tego, w głównym toku dowodu:

1. $\langle x, y \rangle \in \{x, y: x R \cup S y\} \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \{x, y: x R y\} \cup \{x, y: x S y\}$.
Ponieważ do implikacji 1. można zastosować generalizację, jako że przypuszczenie 1.1 dotyczyło dowolnej pary $\langle x, y \rangle$, więc inkluzja (*) jest spełniona $\{\mathbf{Df}\subset: \mathbf{DA}: 1\}$.

W dowodzie inkluzji odwrotnej:

$$(**) \quad \{x, y: x R y\} \cup \{x, y: x S y\} \subset \{x, y: x R \cup S y\}$$

założenie 1.1 $\langle x, y \rangle \in \{x, y: x R y\} \cup \{x, y: x S y\}$ prowadzi do uznania:

$$1.2 \quad \langle x, y \rangle \in \{x, y: x R y \vee x S y\} \quad \{\mathbf{RZ}_ : **\text{RIV.1: T30.1, 1.1}\},$$

$$1.3 \quad \langle x, y \rangle \in \{x, y: x R \cup S y\} \quad \{\mathbf{D7.1, 1.2}\}.$$

Po generalizacji implikacji $\{1.1 \Rightarrow 1.3\}$:

1. $\langle x, y \rangle \in \{x, y: x R y\} \cup \{x, y: x S y\} \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \{x, y: x R \cup S y\}$
można uznać, że jest spełniona inkluzja (**) $\{\mathbf{Df}\subset: \mathbf{DA}: 1\}$.

Dowody twierdzeń T4.2–T4.4 są analogiczne, przy czym okazując, że są spełnione składowe inkluzje „proste” tych równości, korzysta się odpowiednio z **D7.2**, **D7.3** i **D7.4**, a w dowodzie ich inkluzji „odwrotnych” – z ****RIV.1: T30.2, T30.3** i **T30.4**. ■

Są jednak działania na relacjach niemające swoich odpowiedników w działaniach znanych z algebry zbiorów. Niżej są określone: tzw. relacja odwrotna do danej relacji R (**D8**) – oznaczana przez R^{-1} i zwana inaczej konwersem relacji R – oraz złożenie relacji R i S (**D9**), oznaczane jako $R \circ S$, zwane też ich iloczynem względnym lub superpozycją relacji R i S .

$$\mathbf{D8} \quad \langle x, y \rangle \in R^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R \quad \text{lub} \quad x R^{-1} y \Leftrightarrow y R x.$$

Spośród relacji, o których była już mowa, pary relacji odwrotnych tworzą np. relacja mniejszości $<$ oraz relacja większości $>$, relacja bycia podzbiorem (inkluzji) \subset oraz bycia nadzbiorem \supset ; odwrotne są także: relacja bycia młodszym i bycia starszym, bycia niższym i bycia wyższym, bycia podwładnym i bycia przełożonym, bycia dzieckiem i bycia rodzicem, bycia przyczyną i bycia skutkiem itd. Warto dostrzec, że definicję **D8** spełnia każda relacja tzw. symetryczna, choć intuicyjne rozumienie wielu spośród takich relacji nie jest zgodne z uznawaniem ich za relacje

odwrotne. Jest to wyraźnie widoczne w przypadku rozumianej ogólnie relacji identyczności ($x = y \Leftrightarrow y = x$) oraz jej rozmaitych interpretacji w języku naturalnym, np. bycia rówieśnikiem, bycia tego samego wzrostu, wagi itp. Relacje symetryczne to, można powiedzieć, skrajny przykład relacji odwrotnych.

Na podstawie przyjętych definicji łatwo jest okazać, że prawdziwe są następujące twierdzenia:

$$\mathbf{T5.1} \quad D_I(R^{-1}) = D_{II}(R),$$

$$\mathbf{T5.2} \quad D_{II}(R^{-1}) = D_I(R),$$

$$\mathbf{T5.3} \quad (R^{-1})^{-1} = R.$$

Dowód T5.1:

Dowody inkluzji (*) $D_I(R^{-1}) \subset D_{II}(R)$ oraz (**) $D_{II}(R) \subset D_I(R^{-1})$ są oparte na **D5** i **D8** oraz, w wierszu końcowym, na $=| \subset$, nie licząc zakładanej w każdym kroku **RO** \Leftrightarrow :

1.1 $x \in D_I(R^{-1})$; 1.2 $(\forall y) \langle x, y \rangle \in R^{-1}$ {**D5.1**, 1.1}; 1.3 $(\forall y) \langle y, x \rangle \in R$ {**D8**, 1.2}; 1.4 $x \in D_{II}(R)$ {**D5.2**, 1.3}.

Ponieważ przedmiot x , o którym mowa w 1.1 jest dowolny, więc po uogólnieniu można stwierdzić, że:

$$1. \quad D_I(R^{-1}) \subset D_{II}(R) \quad \{\mathbf{Df} \subset: \mathbf{DA}: 1.1 \Rightarrow 1.4\}.$$

2.1 $y \in D_{II}(R)$; 2.2 $(\forall x) \langle x, y \rangle \in R$ {**D5.2**, 2.1}; 2.3 $(\forall y) \langle y, x \rangle \in R^{-1}$ {**D8**, 2.2}; 2.4 $x \in D_I(R^{-1})$ {**D5.1**, 2.3}.

Zatem: 2. $D_{II}(R) \subset D_I(R^{-1})$ {**Df** \subset : **DA**: 1.1 \Rightarrow 1.4},

co kończy dowód tej równości { $=| \subset$: 1, 2}.

Dowód **T5.2** jest analogiczny, a dowód **T5.3** jest oparty na równoważności **D8** i **ZE**. ■

$$\mathbf{T6.1} \quad (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1};$$

$$\mathbf{T6.2} \quad (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1};$$

$$\mathbf{T6.3} \quad (X \times Y)^{-1} = Y \times X.$$

Dowód T6.1:

Założenie 1.1 $\langle x, y \rangle \in (R \cup S)^{-1}$ jest równoważne kolejno:

1.2 $\langle y, x \rangle \in (R \cup S)$ {**D8**: 1.1}; 1.3 $\langle y, x \rangle \in R \vee \langle y, x \rangle \in S$ {**df** \cup : 1.2};

1.4 $\langle x, y \rangle \in R^{-1} \vee \langle x, y \rangle \in S^{-1}$ {**D8**: 1.3}; 1.5 $\langle x, y \rangle \in R^{-1} \cup S^{-1}$ {**df** \cup : 1.4}.

Ponieważ para $\langle x, y \rangle$, o której mowa w założeniu 1.1, jest dowolna, więc równoważność reprezentującą ten fragment dowodu można uogólnić:

1. $(\Lambda \langle x, y \rangle) [\langle x, y \rangle \in (R \cup S)^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^{-1} \cup S^{-1}]$ {**DA**: 1.1 \Leftrightarrow 1.5},

co kończy dowód równości T6.1 {**ZE**: 1}.

Dowody **T6.2** oraz **T6.3** są analogiczne, z tą tylko różnicą, że oprócz **D8** korzysta się w pierwszym z nich z **df** \cap , a w drugim z **D2.a1**. ■

Działanie zwane złożeniem relacji R oraz S określa następująca równoważność:

$$\mathbf{D9} \quad \langle x, y \rangle \in (R \circ S) \Leftrightarrow (\forall z) [x S z \wedge z R y].$$

Na przykład relacja bycia teściem (x jest teściem y) jest złożeniem relacji bycia ojcem (x jest ojcem z) oraz bycia małżonkiem (z jest małżonkiem y); relacja bycia dziadkiem (x jest dziadkiem y) jest złożeniem relacji bycia ojcem (x jest ojcem z) oraz relacji bycia rodzicem (z jest rodzicem y); relacja bycia stryjem (x jest stryjem y) jest złożeniem relacji bycia bratem (x jest bratem z) oraz relacji bycia ojcem (z jest ojcem y) itp. Jest oczywiste, że $D_1(R \circ S) = D_1(S)$ oraz $D_{II}(R \circ S) = D_{II}(R)$.

Działanie złożenia relacji jest łączne, tj.

$$\mathbf{T7} \quad (R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

Dowód:

Z założeniem 1.1 $\langle x, y \rangle \in (R \circ S) \circ T$ są równoważne formuły:

$$1.2 \quad (\forall z) [\langle x, z \rangle \in T \wedge \langle z, y \rangle \in (R \circ S)] \quad \{\mathbf{D9}: 1.1\}$$

$$1.3 \quad (\forall z) [\langle x, z \rangle \in T \wedge (\forall t) [\langle z, t \rangle \in S \wedge \langle t, y \rangle \in R]] \quad \{\mathbf{D9}: 1.2\}$$

$$1.4 \quad (\forall t) (\forall z) [\langle x, z \rangle \in T \wedge \langle z, t \rangle \in S \wedge \langle t, y \rangle \in R] \quad \{\mathbf{RIII.2:T16}: 1.3\}$$

$$1.5 \quad (\forall t) [(\forall z) [\langle x, z \rangle \in T \wedge \langle z, t \rangle \in S] \wedge \langle t, y \rangle \in R] \quad \{\mathbf{RIII.2:T16}: 1.4\}$$

$$1.6 \quad (\forall t) [\langle x, t \rangle \in (S \circ T) \wedge \langle t, y \rangle \in R] \quad \{\mathbf{D9}: 1.5\}$$

$$1.7 \quad \langle x, y \rangle \in R \circ (S \circ T) \quad \{\mathbf{D9}: 1.6\}$$

Ponieważ para, o której mowa w 1.1 jest dowolna, więc równoważność 1.1 \Leftrightarrow 1.7 można uogólnić **{DA: 1.1 \Leftrightarrow 1.7}**:

$$1. \quad (\wedge \langle x, y \rangle) [\langle x, y \rangle \in (R \circ S) \circ T \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R \circ (S \circ T)],$$

co kończy dowód równości **T7** **{ZE: 1}**. ■

Zgodnie z **T7** nie trzeba zaznaczać nawiasami kolejności wykonywania działania \circ w formułach o postaci $R_1 \circ R_2 \circ \dots \circ R_n$.

Działanie \circ jest także rozdzielne (prawo- i lewostronnie) względem działania sumy.

$$\mathbf{T8.1} \quad (R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T);$$

$$\mathbf{T8.2} \quad T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S).$$

Dowód T8.1:

- 1.1 $\langle x, y \rangle \in (R \cup S) \circ T$ {zał.}
 1.2 $(\forall z) [\langle x, z \rangle \in T \wedge \langle z, y \rangle \in (R \cup S)]$ {D9: 1.1}
 1.3 $(\forall z) [\langle x, z \rangle \in T \wedge \langle z, y \rangle \in R \vee \langle z, y \rangle \in S]$ {df \cup : 1.2}
 1.4 $(\forall z) [(\langle x, z \rangle \in T \wedge \langle z, y \rangle \in R) \vee (\langle x, z \rangle \in T \wedge \langle z, y \rangle \in S)]$
 {**RI.3: T37:1.3}
 1.5 $(\forall z) [\langle x, z \rangle \in T \wedge \langle z, y \rangle \in R] \vee (\forall z) [\langle x, z \rangle \in T \wedge \langle z, y \rangle \in S]$
 {**RIII.2: T12: 1.4}
 1.6 $\langle x, y \rangle \in R \circ T \vee \langle x, y \rangle \in S \circ T$ {D9: 1.5}
 1.7 $\langle x, y \rangle \in (R \circ T) \cup (S \circ T)$ {df \cup : 1.6}.

Ponieważ formuły 1.1–1.7 są równoważne, więc można uznać, że równość T8.1 jest udowodniona {ZE: D Λ : 1.1 \Leftrightarrow 1.7}. Tak samo można uzasadnić T8.2. ■

Zgodnie z T8 złożenie sumy relacji z dowolną relacją (i odwrotnie) jest identyczne z sumą złożenia danej relacji ze składnikami tej sumy. Rozwijając jeden z wykorzystanych już przykładów, można powiedzieć, że złożenie relacji bycia ojcem lub bycia matką z relacją bycia małżonkiem (tj. relacji bycia teściem lub teściową) jest identyczne z sumą złożenia: bycia ojcem i bycia małżonkiem (relacja bycia teściem) oraz bycia matką i bycia małżonkiem (relacja bycia teściową).

Natomiast dla złożenia z iloczynem relacji są spełnione jedynie następujące inkluzje:

$$\mathbf{T9.1} \quad (R \cap S) \circ T \subset (R \circ T) \cap (S \circ T),$$

$$\mathbf{T9.2} \quad T \circ (R \cap S) \subset (T \circ R) \cap (T \circ S).$$

Dowód T9.1:

- 1.1 $\langle x, y \rangle \in (R \cap S) \circ T$ {zał.}
 1.2 $(\forall z) [\langle x, z \rangle \in T \wedge \langle z, y \rangle \in (R \cap S)]$ {D9.1: 1.1}
 1.3 $(\forall z) [\langle x, z \rangle \in T \wedge \langle z, y \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in S]$ {df \cap : 1.2}
 1.4 $(\forall z) [\langle x, z \rangle \in T \wedge \langle z, y \rangle \in R] \wedge (\forall z) [\langle x, z \rangle \in T \wedge \langle z, y \rangle \in S]$
 {**RIII.2: T11:1.3}
 1.5 $\langle x, y \rangle \in (R \circ T) \wedge \langle x, y \rangle \in (S \circ T)$ {D9: 1.4}
 1.6 $\langle x, y \rangle \in (R \circ T) \cap (S \circ T)$ {df \cap : 1.5}.

Formuły 1.1–1.3 są wprawdzie równoważne, lecz przejście od 1.3 do wiersza 1.4 jest implikacyjne, dlatego ostatecznie w tym fragmencie dowodu można stwierdzić jedynie, że 1.1 \Rightarrow 1.6. Generalizacja tej implikacji, tj.

$$1. (\wedge \langle x, y \rangle) [\langle x, y \rangle \in (R \cap S) \circ T \Rightarrow \langle x, y \rangle \in (R \circ T) \cap (S \circ T)]$$

{D Λ : 1.1 \Rightarrow 1.6}

daje podstawę do uznania inkluzji **T9.1**. Dowód inkluzji **T9.2** jest taki sam. ■

Fakt, że nie jest spełniona równość $(R \cap S) \circ T = (R \circ T) \cap (S \circ T)$ można zilustrować prostymi przykładami. Jeśli na przykład T jest relacją bycia w związku małżeńskim (x jest w związku małżeńskim z osobą z), R relacją bycia córką (z jest córką y -a), a S relacją bycia przelożonym (z jest przelożonym y -a), to o ile $x (R \cap S) \circ T y$, a więc jeśli z jest i córką, i przelożonym y -a, to zarówno $x R \circ T y$ (x jest zięciem y -a), jak i $x S \circ T y$ (x jest małżonkiem przelożonego y -a), lecz zwykle nie jest odwrotnie, tj. żona, choć może być, to zwykle nie jest przelożonym teścia.

Jeśli natomiast chodzi o operacje $^{-1}$ oraz \circ , to jest spełniona równość

$$\mathbf{T10} \quad (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Dowód:

- | | |
|--|------------------------|
| 1.1 $\langle x, y \rangle \in (R \circ S)^{-1}$ | {zał.} |
| 1.2 $\langle y, x \rangle \in (R \circ S)$ | {D8: 1.1} |
| 1.3 $(\forall z) [\langle y, z \rangle \in S \wedge \langle z, x \rangle \in R]$ | {D9: 1.2} |
| 1.4 $(\forall z) [\langle x, z \rangle \in R^{-1} \wedge \langle z, y \rangle \in S^{-1}]$ | {D8: **RI.3: T35: 1.3} |
| 1.5 $\langle x, z \rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}$ | {D9: 1.4}. |

Zatem: 1. $(\wedge \langle x, y \rangle) [\langle x, y \rangle \in (R \circ S)^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}]$,

co kończy dowód {ZE: 1}. ■

Na przykład, jeśli S jest relacją bycia rodzicem (x jest rodzicem z), R relacją bycia żoną (z jest żoną y -a), czyli złożenie $R \circ S$ jest relacją bycia teściem lub teściową (x jest teściem lub teściową y -a), to $y (R \circ S)^{-1} x$ (y jest zięciem x -a) wtedy i tylko, gdy $z S^{-1} x$ (z jest dzieckiem x -a) i $y R^{-1} z$ (y jest mężem z), tj. wtedy i tylko, gdy $y S^{-1} \circ R^{-1} x$.

2.3 Rodzaje relacji

Zamiast o rodzajach relacji można mówić o ich własnościach, a trafniej jest powiedzieć – o ich cechach, własności relacji są bowiem zrelatywizowane do zbiorów, w których relacje są badane. Najpierw zostaną omówione funkcje i ciągi, następnie relacje zwrotne, spójne, symetryczne, asymetryczne i przechodnie. Zwrotność, spójność itd. można nazwać własnościami relacji podstawowymi – w tym sensie, że odpowiednie koniunkcje tych własności definiują złożone cechy relacji, wyróżniające m.in. relacje równościowe oraz różne relacje porządkujące. Natomiast pojęcie

funkcji i jego uszczegółowienia są niezbędne do określenia relacji tzw. izomorficznych (izomorfizmu relacji).

2.3.1 Funkcje i ciągi

Szczególnego rodzaju relacjami są funkcje. Rodzina relacji będących funkcjami będzie oznaczana napisem **fun**, napis: $R \in \mathbf{fun}$ będzie więc odczytywany: relacja R jest funkcją (należy do rodziny funkcji). W klasie relacji dwuczłonowych, tj. $R \subset X \times Y$, funkcje są wydzielone następującą definicją:

$$\mathbf{D10.1 (dfun}_1) \quad R \in \mathbf{fun}_1 \Leftrightarrow (\wedge x, y, z) [x R y \wedge x R z \Rightarrow y = z].$$

Relacja R jest zatem funkcją zawsze i tylko wtedy, gdy każdemu elementowi z dziedziny $D_1(R)$ tej relacji jest przyporządkowany co najwyżej jeden przedmiot. Mówiąc inaczej, relacja dwuczłonowa jest funkcją, gdy jest zbiorem par uporządkowanych, w którym nie ma dwóch różnych par o identycznych elementach pierwszych. Zakładamy, że w pojęciu relacji jest już zawarte pojęcie jej dziedziny, trzeba bowiem pamiętać, że zmiana dziedziny, w której relacja jest określona, może skutkować tym, że relacja przestaje być funkcją. Na przykład relacja bycia żoną (y jest żoną x -a) jest albo nie jest funkcją – zależnie od rozważanego zbioru ludzi.

Skrót z indeksem dolnym \mathbf{fun}_1 wskazuje dodatkowo, że R jest relacją dwuczłonową, czyli jest tzw. funkcją jednej zmiennej. Zdefiniowane pojęcie funkcji jednej zmiennej da się uogólnić na więcej zmiennych, np. tak oto definiuje się funkcję dwóch zmiennych:

$$\mathbf{D10.2 (dfun}_2) \quad R \in \mathbf{fun}_2 \Leftrightarrow (\wedge x, y, z, t) [R(x, y, z) \wedge R(x, y, t) \Rightarrow z = t]$$

oraz funkcję n zmiennych:

$$\mathbf{D10.3 (dfun}_n) \quad R \in \mathbf{fun}_n \Leftrightarrow (\wedge x_1, x_2, \dots, x_n, y, z) [R(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \wedge R(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \Rightarrow y = z].$$

Jak widać w tych definicjach, funkcja n zmiennych jest relacją $n + 1$ członową, czyli – w terminologii nieuszczegółowionej do funkcji – relacją $n + 1$ argumentową. Ponieważ jednak zmienne funkcji nazywa się jej argumentami, lepiej w przypadku funkcji mówić o liczbie jej członów: x_1, x_2, \dots, x_n, z . Indeks wskazujący w napisie **fun** na liczbę zmiennych funkcji

będzie pomijany, o ile kontekst rozważań na tę liczbę wskazuje albo też liczba ta nie jest istotna.

O relacji trójczłonowej R mówimy, że jest określona i wykonalna w zbiorze A (krótko: $R \in \mathbf{okr}_A \wedge \mathbf{wyk}_A$) wtedy i tylko, gdy $(\forall x, y \in A) (\exists z \in A) R(x, y, z)$. Te trójczłonowe relacje określone i wykonalne w danym zbiorze, które są funkcjami, nazywamy działaniami dwuargumentowymi w danym zbiorze. Na przykład suma \cup , iloczyn \cap itd. to działania w rodzinie zbiorów, dodawanie i mnożenie to działania dwuargumentowe w zbiorze liczb naturalnych, odejmowanie – w zbiorze liczb całkowitych, dzielenie jest działaniem w zbiorze $\mathcal{W} - \{0\}$ (liczb wymiernych różnych od zera) itd. Rozszerzając pojęcia działania, można mówić o działaniach jednoargumentowych i więcej niż dwuargumentowych: np. działaniem jednoargumentowym w zbiorze zdań jest tworzenie negacji, w zbiorze liczb przyporządkowywanie danej liczbie jej wartości bezwzględnej, w zbiorze liczb naturalnych – przyporządkowanie wartości będącej silnią danej liczby.

Funkcje, także dla ich wyróżnienia notacją pośród relacji, są zwykle oznaczane małymi literami: $f, g, h, \dots, f_1, f_2, \dots$. Dziedzinę (lewą) funkcji nazywamy zbiorem jej argumentów, a przeciwdziedzinę (dziedzinę prawą) zbiorem jej wartości. Jeśli f jest funkcją jednej zmiennej oraz $x \in D_1(f)$, to wartość tej funkcji dla x , tj. $f(x)$, jest jedynym przedmiotem, który funkcja f przyporządkowuje elementowi x .

T11 $R \in \mathbf{fun}_1 \Leftrightarrow (\forall x \in D_1(R)) (\exists_1 y) x R y$.

Dowód:

□

Założmy, że $R \in \mathbf{fun}_1$, co jest, zgodnie z **D10.1**, równoważne

1. $(\forall x, y, z) [x R y \wedge x R z \Rightarrow y = z]$

oraz przypuśćmy, że

2. $\sim(\forall x \in D_1(R)) (\exists_1 y) x R y$ {zdn.}.

Z założenia dowodu niewprost uzyskuje się:

3. $(\exists x) [x \in D_1(R) \wedge \sim(\exists_1 y) x R y]$ { $\sim\mathbf{A}$: 2} oraz

4. $x_0 \in D_1(R) \wedge \sim(\exists_1 y) x_0 R y$ {**OV**: 3}.

Z drugiego członu koniunkcji 4. wynika, że nie istnieje y takie, że $x_0 R y$ lub że istnieją y oraz z takie, że: $x_0 R y \wedge x_0 R z \Rightarrow y \neq z$. Założenie dodatkowe 1.1, że nie istnieje żaden taki y , jest jednak sprzeczne z pierwszym członem koniunkcji 4., bo twierdzenie: $x_0 \in D_1(R)$ jest, zgodnie

z **D5.1**, równoważne z $(\forall y) x_0 R y$. Natomiast założenie dodatkowe 2.1, że $(\forall y, z) [x_0 R y \wedge x_0 R z \Rightarrow y \neq z]$, jest sprzeczne z 1.

□

W kontekście założenia

1. $(\forall x \in D_1(R)) (\forall_1 y) x R y$

łatwo widać, że założenie dodatkowe 1.1 $(\forall x, y, z) [x R y \wedge x R z \wedge y \neq z]$ prowadzi do sprzeczności. Warunek $x R y$ jest bowiem, zgodnie z **D5.1**, równoważny z 1.2 $x \in D_1(R)$, a wobec tego 1.3 $(\forall_1 y) x R y$ **{RO: 1, 1.2}**, co jest sprzeczne z 1.1. Tak więc:

2. $\sim(\forall x, y, z) [x R y \wedge x R z \wedge y \neq z]$ **{1.1 \Rightarrow sprz.}** oraz

3. $(\forall x, y, z) [x R y \wedge x R z \Rightarrow y = z]$ **{ \sim V: 2}**,

co uzasadnia stwierdzenie, że: $R \in \mathbf{fun}_1$ **{D10.1, 0013}**. ■

Rozumienie wartości funkcji dla określonego argumentu łatwo jest uogólnić tak, by objąć funkcje wielu zmiennych, trzeba przy tym uwzględnić fakt, że dziedzin jest wiele, tj. $D_1(f)$, $D_2(f)$, ..., $D_n(f)$:

D11.1 $(f \in \mathbf{fun}_1 \text{ oraz } x \in D_1(f) \Rightarrow (y = f(x) \Leftrightarrow x f y))$;

D11.2 $(f \in \mathbf{fun}_n \text{ i } x_1 \in D_1(f), \dots, x_n \in D_n(f) \Rightarrow (y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n, y)))$.

Analogicznie można mówić, że funkcja f przyporządkowuje zbiorowi swoich argumentów zbiór swoich wartości, choć jest przyjęte, by mówić, że odwzorowuje (przekształca) jeden zbiór ($A = D_1(f)$) w/na drugi, co skrótowo oznacza się przez $f: A \rightarrow B$, a przy tym jeśli $D_{II}(f) \subset B$, to mówimy, że f przekształca zbiór A w zbiór B ($f: A \rightarrow_w B$), a jeśli $D_{II}(f) = B$, to że przekształca A na zbiór B ($f: A \rightarrow_{na} B$). Zbiór $f(A)$ to zbiór wartości funkcji f dla jej argumentów ze zbioru A . O odwzorowywaniu zbiorów można też mówić, gdy relacja R nie jest funkcją: zbiór $R(A)$ zwie się ogólnie R -obrazem zbioru A (także – obrazem zbioru A uzyskanym za pośrednictwem relacji R):

D12.1 $y \in R(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A) x R y$ lub $R(A) = \{y: (\exists x \in A) x R y\}$.

Analogicznie jest definiowany tzw. R -przeciwbraz zbioru B , oznaczany przez $R^{-1}(B)$:

D12.2 $x \in R^{-1}(B) \Leftrightarrow (\exists y \in B) x R y$ lub $R^{-1}(B) = \{x: (\exists y \in B) x R y\}$.

Jeśli na przykład R jest relacją bycia ojcem (y jest ojcem x -a), to R -obrazem określonego zbioru A ludzi jest zbiór B ojców ze zbioru A ,

natomiast R -przeciwobrazem określonego zbioru B ojców jest zbiór osób będących dziećmi ojców ze zbioru B .

Warto dostrzec, że – zgodnie z **D11** – napis $R(x)$ oznacza określony przedmiot, tylko jeśli relacja R jest funkcją oraz x jest elementem dziedziny R – wtedy $R(x)$ jest wartością funkcji R dla argumentu x ; natomiast napis $R(A)$ zawsze oznacza zbiór będący obrazem zbioru A uzyskanym według relacji R . Jest przy tym tak, że

T12 $A \subset B \Rightarrow R(A) \subset R(B)$.

Rzeczywiście, jeśli bowiem 1. $A \subset B$ oraz 1.1 $y \in R(A)$, to:
1.2 $(\forall x \in A) x R y$ {**D12.1**, 1.1}; 1.3 $(\forall x \in B) x R y$ {**RIV.1: **T4**: 1, 1.2};
1.4 $y \in R(B)$ {**D12.1**, 1.3}.

Zatem: $R(A) \subset R(B)$ {dfc: **D11**: 1.1 \Rightarrow 1.4}. ■

Rodzina wszystkich funkcji przekształcających zbiór A w zbiór B jest oznaczana przez B^A . Jest także nazywana zbiorem wszystkich odwzorowań zbioru A w zbiór B :

D13 Funkcja $f \in B^A \Leftrightarrow f: A \rightarrow_w B$ lub $B^A = \{f: f: A \rightarrow_w B\}$.

Analogicznie jest rozumiany zbiór wszystkich odwzorowań zbioru A na zbiór B (definicję tego zbioru uzyskuje się, wstawiając w definicję symbol \rightarrow_{na} zamiast \rightarrow_w , a więc warunek: $D_{II}(f) = B$ zamiast $D_{II}(f) \subset B$).

W kolejnych twierdzeniach mowa o tym, jak własność bycia funkcją zachowuje się w kontekście działań wykonywanych na funkcjach (dodawania, mnożenia i składania funkcji).

T13. Jeżeli f oraz g są funkcjami, to:

- 1 o ile $D_1(f) \cap D_1(g) = \emptyset$, to suma $f \cup g$ jest funkcją;
- 2 iloczyn $f \cap g$ jest funkcją.

Dowód T13.1:

Z założeń dowodzonego twierdzenia, tj.

1. $f, g \in \mathbf{fun}$

2. $D_1(f) \cap D_1(g) = \emptyset$

oraz z założenia dodatkowego

1.1 $\langle x, y \rangle \in f \cup g \wedge \langle x, z \rangle \in f \cup g$

wynika, że:

1.2 $(\langle x, y \rangle \in f \vee \langle x, y \rangle \in g) \wedge (\langle x, z \rangle \in f \vee \langle x, z \rangle \in g)$

{**D7.1**: 1.1}

$$1.3 \quad (\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f) \vee (\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in g) \vee \\ \vee (\langle x, y \rangle \in g \wedge \langle x, z \rangle \in f) \vee (\langle x, y \rangle \in g \wedge \langle x, z \rangle \in g) \\ \{\text{**RI.3: T39: 1.2}\}.$$

Składniki drugi i trzeci alternatywy 1.3 wiodą do formuły sprzecznej z założeniem 2. (tj. do wniosku, że $x \in D_1(f) \cap D_1(g)$), natomiast każde z założeń dodatkowych:

$$1.1.1 \quad y = \langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f \text{ oraz}$$

$$2.1.1 \quad \langle x, y \rangle \in g \wedge \langle x, z \rangle \in g$$

prowadzi do wniosku, że $y = z$ {**dfun**₁: 1, 1.1.1; 2.1.1}.

Po uogólnieniu implikacji podsumowującej ten fragment dowodu można uznać, że:

$$3. \quad (\wedge x, y, z) [(\langle x, y \rangle \in f \cup g \wedge \langle x, z \rangle \in f \cup g) \Rightarrow y = z],$$

co znaczy, że suma $f \cup g$ jest funkcją, o ile jest spełniony warunek

$$D_1(f) \cap D_1(g) = \emptyset. \blacksquare$$

Przykładem sumy funkcji, która nie jest funkcją, jest bycie matką \cup bycie ojcem. Każdemu jest jednoznacznie przyporządkowana jego (biologiczna) matka oraz jego (biologiczny) ojciec, natomiast suma tych funkcji nie jest funkcją (w zbiorze jednostkowych osób).

D o w ó d T13.2:

Założenie dodatkowe

$$1.1 \quad \langle x, y \rangle \in f \cap g \wedge \langle x, z \rangle \in f \cap g$$

jest równoważne formule

$$1.2 \quad \langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, y \rangle \in g \wedge \langle x, z \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in g.$$

Ponieważ – zgodnie z założeniem tego twierdzenia – f oraz g to funkcje, więc koniunkcje członów 1.2 pierwszego i trzeciego oraz drugiego i czwartego prowadzą bezpośrednio do wniosku, że 1.3 $y = z$ {**dfun**: 1.2}, co znaczy, że iloczyn $f \cap g$ także jest funkcją {**dfun**: **DA**: 1.1 \Rightarrow 1.3}. ■

Można okazać, że złożenie dowolnych funkcji jest funkcją, a wobec tego wartość takiego złożenia dla określonego x -a jest identyczna z przedmiotem uzyskanym w wyniku przyporządkowania elementowi x najpierw jego wartości zgodnie z pierwszą funkcją, a następnie przyporządkowania uzyskanej wartości jej wartości zgodnie z drugą funkcją.

Oto dokładniejszy, symboliczny zapis tych prawidłowości.

T14. Jeżeli f oraz g są funkcjami, to:

$$1 \quad f \circ g \in \mathbf{fun};$$

$$2 \quad \text{o ile } D_{11}(g) = D_1(f) \text{ i } x \in D_1(g), \text{ to } f \circ g(x) = f(g(x)).$$

Dowód T14.1:

Na podstawie definicji złożenia funkcji **{D9}** i założenia dodatkowego

$$1.1 \langle x, y \rangle \in f \circ g \wedge \langle x, z \rangle \in f \circ g,$$

stosując regułę opuszczania kwantyfikatora szczegółowego, można uznać, że

$$1.2 \langle x, t_1 \rangle \in g \wedge \langle t_1, y \rangle \in f \text{ oraz } \langle x, t_2 \rangle \in g \wedge \langle t_2, z \rangle \in f$$

Ponieważ, co wiadome z założenia dowodzonego twierdzenia, g jest funkcją, więc korzystając z **D10**, można, wobec koniunkcji $\langle x, t_1 \rangle \in g \wedge \langle x, t_2 \rangle \in g$ uznać, że 1.3 $t_1 = t_2$, a zatem

$$1.4 \langle t_1, y \rangle \in f \wedge \langle t_1, z \rangle \in f \{\mathbf{RZ}_{\underline{=}}: 1.3, 1.2\}.$$

Ponieważ również f jest funkcją, więc

$$1.5 y = z \{\mathbf{D10}: 1.4\}.$$

Uogólnienie implikacji podsumowującej ten fragment dowodu **{DA: 1.1 \Rightarrow 1.5}** prowadzi do wniosku, że również złożenie $f \circ g$ jest funkcją. ■

Dowód T14.2:

Ponieważ g jest funkcją i $x \in D_1(g)$, więc istnieje dokładnie jeden przedmiot z_1 taki, że

$$1. z_1 \in D_{II}(g) = D_I(f) \text{ i } z_1 = g(x).$$

Jako że również f jest funkcją, więc istnieje dokładnie jeden przedmiot y_1 taki, że

$$2. y_1 \in D_{II}(f) \text{ i } y_1 = f(z_1). \text{ Zatem}$$

$$3. \langle x, y_1 \rangle \in f \circ g \{\mathbf{D9}: 1, 2\},$$

a ponieważ – zgodnie z **T14.1** – złożenie $f \circ g$ również jest funkcją, więc y_1 jest wartością tej funkcji dla argumentu x :

$$4. f \circ g(x) = y_1. \text{ Wobec tego:}$$

$$5. f \circ g(x) = f(z_1) \{\mathbf{RZ}_{\underline{=}}: 2, 4\} \text{ oraz } f \circ g(x) = f(g(x)) \{\mathbf{RZ}_{\underline{=}}: 1, 5\}. \blacksquare$$

W rozważaniach kolejnego podrozdziału będzie szczególnie często stosowane pojęcie funkcji (a ogólniej – relacji) wzajemnie jednoznacznej, zwanej też relacją jedno-jednoznaczną, różnowartościową lub doskonałą. Rodzina takich relacji będzie oznaczana przez **1-1**.

D14 (df1-1) $R \in \mathbf{1-1} \Leftrightarrow R$ oraz R^{-1} są funkcjami ($R, R^{-1} \in \mathbf{fun}$).

Relacja R jest więc wzajemnie jednoznaczna wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcją i relacja do niej odwrotna (konwers R) też jest funkcją. Swobodniej można powiedzieć, że w zbiorze par uporządkowanych związanych taką relacją nie ma takich par, których elementy pierwsze lub drugie są identyczne.

T15. $R \in \mathbf{1-1}$ wtedy i tylko, gdy:

- 1** $(\wedge x_1, x_2, y_1, y_2) [x_1 R y_1 \wedge x_2 R y_2 \Rightarrow (x_1 = x_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2)]$;
- 2** $(\wedge x \in D_I(R)) (\vee_1 y) [x R y]$ oraz $(\wedge y \in D_{II}(R)) (\vee_1 x) [x R y]$.

Dowód:

Równoważność T15.1 uzyskuje się łatwo na podstawie **D14** i **D10**, a w dowodzie równoważności T15.2 korzysta się ponadto z definicji dziedziny i przeciwdziedziny relacji, tj. z **D5** (rozumowanie jest analogiczne do dowodu twierdzenia T11). ■

Ponieważ twierdzenie, że $R \in \mathbf{1-1}$ jest równoważne z **1** oraz z **2**, więc formuły te można potraktować jako definicje pojęcia relacji wzajemnie jednoznacznej. Dowody, że funkcja f jest różnowartościowa, najczęściej są przeprowadzane w ten sposób, że z założenia: $x_1 \neq x_2 \in D_I(f)$, wyprowadza się wniosek, że $f(x_1) \neq f(x_2)$.

T16.1 Jeżeli $R \in \mathbf{1-1}$, to $R^{-1} \in \mathbf{1-1}$;

T16.2 Jeżeli $R, S \in \mathbf{1-1}$, to $R \circ S \in \mathbf{1-1}$.

Dowód T16.1:

Założenie 1. $R \in \mathbf{1-1}$ jest, zgodnie z **D14**, równoważne z
2. $R, R^{-1} \in \mathbf{1-1}$. Ponieważ $R = (R^{-1})^{-1}$ {**T5.3**}, więc **3. $R^{-1}, (R^{-1})^{-1} \in \mathbf{1-1}$** {**RZ₂: 2, T5.3**}, a zatem $R^{-1} \in \mathbf{1-1}$ {**D14: 3**}. ■

Dowód T16.2:

Założenie 1. $R, S \in \mathbf{1-1}$ jest równoważne z formułą
2. $R, R^{-1}, S, S^{-1} \in \mathbf{fun}$ {**D14: 1**}, która daje podstawę do uznania, że
3. $R \circ S, S^{-1} \circ R^{-1} \in \mathbf{fun}$ {**T14.1: 2**}. Ponieważ, zgodnie z **T10**,
 $S^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ S)^{-1}$, więc **4. $R \circ S, (R \circ S)^{-1} \in \mathbf{fun}$** {**RZ₂: 3, T10**}, co jest równoważne twierdzeniu, że $R \circ S \in \mathbf{1-1}$ {**D14: 4**}. ■

T17 Jeżeli $R, S \in \mathbf{1-1}$ i $D_I(R) \cap D_I(S) = D_{II}(R) \cap D_{II}(S) = \emptyset$,
 to $R \cup S \in \mathbf{1-1}$.

Założenie tego twierdzenia jest równoważne {**D14: 1**} koniunkcji
 (*) \wedge (**):

(*) $R, S \in \mathbf{fun} \wedge D_I(R) \cap D_I(S) = \emptyset$,

(**) $R^{-1}, S^{-1} \in \mathbf{fun} \wedge D_{II}(R) \cap D_{II}(S) = \emptyset$.

Zastosowanie do (*) oraz (**) **T13** daje podstawę do uznania, że

(***) $R \cup S \in \mathbf{fun}$ oraz $R^{-1} \cup S^{-1} \in \mathbf{fun}$.

Ponieważ $R^{-1} \cup S^{-1} = (R \cup S)^{-1}$ {**T6.1**}, więc

(****) $R \cup S \in \mathbf{fun}$ oraz $(R \cup S)^{-1} \in \mathbf{fun}$, a zatem:

$R \cup S \in \mathbf{1-1}$ {D14: (***)}. ■

Szczególnego rodzaju funkcją jest ciąg. Ciągi to funkcje, których dziedziną są kolejne liczby naturalne (ogólniej – liczby porządkowe).

Oto określenia wystarczające w bieżących rozważaniach.

D15.1 Funkcja f jest ciągiem:

(a) nieskończonym \Leftrightarrow dziedziną tej funkcji jest zbiór wszystkich liczb naturalnych, tj. $D_1(f) = \mathcal{N}$;

(b) skończonym o n wyrazach $\Leftrightarrow D_1(f) = \{i: i \leq n\}$;

2 Funkcja wzajemnie jednoznaczna f jest permutacją zbioru $A \Leftrightarrow D_1(f) = D_{II}(f) = A$;

3 Przedłużeniem funkcji f jest każda funkcja g taka, że $f \subset g$; o funkcji f mówimy wtedy, że jest funkcją częściową dla funkcji g , a $g|_A$ to funkcja częściowa f dla funkcji g taka, że $D_1(f) = A$.

Przeciwdziedzina ciągu, zwaną jego zapasem, może być dowolny zbiór A . Można więc inaczej powiedzieć, że funkcja f jest ciągiem wtedy i tylko wtedy, gdy $f: \mathcal{N} \rightarrow_{na} A$ (ciąg nieskończony) lub $f: \{i: i \leq n\} \rightarrow_{na} A$ (ciąg skończony) albo (intuicyjnie najprościej), że dziedziną $D_1(f)$ ciągu ustala kolejność elementów zbioru (zapasu ciągu) A . Ciągi, których zapasem jest zbiór A liczb naturalnych, tj. $A \subseteq \mathcal{N}$, należą do klasy funkcji, których argumentami i wartościami są liczby naturalne; do klasy tej należą również permutacje, których dziedziną i przeciwdziedzina jest zbiór A , taki że $A \subseteq \mathcal{N}^3$.

Ciągi nieskończone są oznaczane przez $\{a_i: i \in \mathcal{N}\}$, a prościej przez $\{a_i\}$, natomiast skończone przez $\{a_i: i \leq n\}$ (ciąg n -elementowy) – albo analogicznymi symbolami ze wskaźnikiem i, j, \dots oraz (w przypadku ciągów skończonych) określoną wartością dla $n \in \mathcal{N}$. Jeśli ciąg jest oznaczony przez $\{a_i\}$, to wartość ciągu dla argumentu i jest oznaczana przez a_i i jest nazywana i -tym wyrazem danego ciągu. Jest więc tak, że $a_i = f(i)$ – dla każdego $i \in \mathcal{N}$ w przypadku ciągu nieskończonego $\{a_i\}$ oraz dla każdego $i \leq n$ dla skończonego ciągu n -elementowego. Warto dostrzec, że zbiór wartości, czyli zapas ciągu nieskończonego nie musi być nieskończony. Na przykład zapasem (zbiorem wartości) ciągu nieskończonego

³ Do klasy takich funkcji należą również tzw. funkcje rekurencyjne (pojęcie funkcji rekurencyjnej zostanie przybliżone w paragrafie ***RIII.1, poświęconym tzw. tezie Churcha).

$\{a_i\}$, którego kolejne wyrazy są określone równością $a_i = i - i$, jest zbiór jednoelementowy $\{0\}$.

Ciągi, zwłaszcza nieskończone, są często definiowane indukcyjnie (przez rekurencję). Jak wiadomo z uwag o definicjach indukcyjnych (por. *RVII.1.3), definicje takie stosuje się w sytuacji, gdy trzeba określić jakieś pojęcie w zbiorze dobrze uporządkowanym. Ponieważ zbiór liczb naturalnych \mathcal{N} oraz dowolny jego przedział to zbiory dobrze uporządkowane, więc można indukcyjnie definiować pojęcie zapasu ciągu za pośrednictwem indukcyjnej definicji jego wyrazów: pierwszego (warunek wstępny) i następnego dla wyrazu dowolnego (warunek indukcyjny). Na przykład zapasem ciągu, którego elementem pierwszym jest 1, a kolejna liczba w ciągu jest większa od poprzedzającej o 2 ($a_{n+1} = a_n + 2$) jest zbiór wszystkich liczb nieparzystych. Ciąg $3, 3^2, (3^2)^2, \dots$ można przez rekurencję określić następującymi dwoma warunkami: $a_1 = 3$; $a_{n+1} = a_n \cdot a_n$; z kolei ciąg $1, 2^2, 3^3, 4^4, \dots$ jest indukcyjnie określony dwiema równościami: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = k^k$, przy czym $k = \sqrt[n]{a_n} + 1^4$.

Najprostszą, często w dowodach wykorzystywaną permutacją zbioru A jest identyczność I_A , tj. funkcja $I_A(x) = x$, dla każdego $x \in A$. Natomiast określenie funkcji częściowej jest analogiczne do definicji $R_{|A}$, tj. relacji R ograniczonej do zbioru A (D4). Z pojęcia funkcji i D15.3 wynika, że f jest funkcją częściową, gdy $D_1(f)$ jest podzbiorem $D_1(g)$ i dla dowolnego $x \in D_1(f)$: $f(x) = g(x)$.

2.3.2 Relacje zwrotne, spójne, symetryczne, asymetryczne, przechodnie

Relatywizacja cechy relacji do zbioru jest uwzględniona w napisach $R \in \mathbf{zwr}_A$, $R \in \mathbf{sp}_A$, $R \in \mathbf{sym}_A$, $R \in \mathbf{asym}_A$, $R \in \mathbf{sym}_A$, $R \in \mathbf{przech}_A$, które odczytujemy, kolejno – relacja R jest w zbiorze A : zwrotna, spójna, symetryczna, asymetryczna, przechodnia. A oto definicje tych relacji.

D16.1 $R \in \mathbf{zwr}_A \Leftrightarrow (\wedge x \in A) x R x$;

2 $R \in \mathbf{sp}_A \Leftrightarrow (\wedge x, y \in A) [x \neq y \Rightarrow x R y \vee y R x]$;

⁴ Oba przykłady ciągów, wykorzystane tu do zilustrowania definiowania indukcyjnego, zostały zaczerpnięte z pracy J. Ślupecki, K. Hałkowska, K. Piróg-Rzepecka, *Logika i teoria mnogości*, dz. cyt., s. 158, gdzie są one określone przez wyliczenie swoich początkowych wyrazów.

- 3 $R \in \mathbf{sym}_A \Leftrightarrow (\wedge x, y \in A) [x R y \Rightarrow y R x]$;
 4 $R \in \mathbf{asym}_A \Leftrightarrow (\wedge x, y \in A) [x R y \Rightarrow \sim y R x]$;
 5 $R \in \mathbf{przech}_A \Leftrightarrow (\wedge x, y, z \in A) [x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z]$.

Na przykład w zbiorze ludzi spójna i przechodnia jest relacja starszeństwa, symetryczna jest relacja pokrewieństwa, asymetryczna jest relacja ojcostwa⁵.

2.3.3 Relacje równościowe

Każda relacja, która jest w określonym zbiorze jednocześnie zwrotna, symetryczna i przechodnia, jest zwana relacją równościową, a także – równoważnościową lub relacją typu równoważności:

$$\mathbf{D17} \quad R \in \mathbf{równ}_A \Leftrightarrow (R \in \mathbf{zwr}_A \wedge R \in \mathbf{sym}_A \wedge R \in \mathbf{przech}_A).$$

Do relacji równościowych należą np. relacja równości (w dowolnym zbiorze), równoległości w zbiorze prostych, podobieństwa w zbiorze wielokątów, równobarwności w zbiorze przedmiotów mających barwę, równoznaczności w zbiorze wyrażeń, równoważności w zbiorze zdań itd.

⁵ Podstawowe pojęcia teorii relacji zostały wykorzystane przez T. Czeżowskiego w jego tzw. logice dóbr – zob. T. Czeżowski, *O formalnym pojęciu wartości*, „Przeгляд Filozoficzny” 1919, t. 2, z. 1, s. 13–24; tenże, *Jak budować logikę dóbr? (1)* oraz *Jak budować logikę dóbr? (2)* (oba artykuły w: tegoż, *Pisma z etyki i teorii wartości*, red. P.J. Smoczyński, Wrocław 1989, s. 130–139). Relacje określone w **D16** są również podstawowe w analizach zawartych w artykułach, w których rekonstruję i rozwijam koncepcję Czeżowskiego – zob. A. Jonkisz, *Tadeusza Czeżowskiego formalne pojęcie wartości*, w: *Polska filozofia analityczna. W kręgu Szkoły Lwowsko-Warszawskiej*, red. W. Tyburski, R. Wiśniewski, Toruń 1999, s. 197–206; tenże, *Formalna teoria wartości*, „Filozofia Nauki” 1998, nr 3–4, s. 121–132; tenże, *O tak zwanej logice dóbr*, w: *Mysli o języku, nauce i wartościach. Księga ofiarowana Profesorowi Jackowi Juliuszowi Jadackiemu w sześćdziesiątą rocznicę urodzin*, red. W. Strawiński, M. Gryganiec, A. Brożek, Warszawa 2006, s. 421–429. W artykule *Aksjomatyczna teoria użyteczności O. Morgernsterna i J. von Neumanna a T. Czeżowskiego formalna teoria wartości* (w: *Tadeusz Czeżowski (1889–1981): dziedzictwo idei: logika – filozofia – etyka*, red. W. Tyburski, R. Wiśniewski, Toruń 2002, s. 135–143) argumentuję, że Czeżowskiego koncepcja wartości dobra – odpowiednio poprawiona i rozwinięta – daje podstawy dla trafnej koncepcji uniwersum dóbr uporządkowanych relacją wartości, koncepcji porównywalnej z aksjomatyką teorii użyteczności J. von Neumana i O. Morgernsterna.

Zbiór wszystkich przedmiotów danego zbioru A , które pozostają w relacji równościowej R do wybranego $x \in A$, jest nazywany klasą abstrakcji wyznaczoną przez relację R i element x – będzie oznaczany przez $[x]_{A,R}$:

$$\mathbf{D18} \quad (R \in \mathbf{równ}_A \wedge x \in A) \Rightarrow (y \in [x]_{A,R} \Leftrightarrow (y \in A \wedge x R y)) \text{ lub} \\ (R \in \mathbf{równ}_A \wedge x \in A) \Rightarrow ([x]_{A,R} = \{y: y \in A \wedge x R y\}).$$

Pojęcie relacji równościowej i klasy abstrakcji zostało już wykorzystane, gdy były omawiane tzw. definicje przez abstrakcję (por. *RVII.1.3). Definicje takie są, jak pamiętamy, stosowane w sytuacji, gdy trzeba zdefiniować pojęcie abstrakcyjne, np. cechę wspólną dla wielu przedmiotów pod innymi względami różnych, jak kolor (i określony, i kolor w ogóle), posiadania określonej temperatury, posiadania określonego kształtu. Widoczne w **D18** uściślenie jest zgodne ze stosowanym wcześniej pojęciem. Klasa abstrakcji $[x]_{A,R}$ jest zbiorem tych elementów zbioru A , które pozostają w relacji R do przedmiotu x . Klasa abstrakcji może być oznaczana w sposób prostszy, o ile wiadomo lub nie jest to w rozważaniach istotne, w którym zbiorze jest określona relacja równościowa R lub która relacja rozdziela elementy jakiegoś zbioru na klasy abstrakcji. Napis $[x]_R$ oznacza klasy abstrakcji relacji równościowej R w dowolnym lub określonym zbiorze, symbol $[x]_A$ odnosi się do klas abstrakcji w zbiorze A wyznaczanych przez zdefiniowaną lub dowolną relację równościową, a symbol $[x]$ może być stosowany na oznaczenie dowolnej lub określonej klasy abstrakcji.

W kontekście definicji klasy abstrakcji są oczywiste lub łatwe do okazania poniższe twierdzenia.

T18. Jeżeli $R \in \mathbf{równ}_A$ oraz $x, y \in A$, to:

- 1 $x \in [x]_{A,R}$;
- 2 $[x]_{A,R} \subset A$;
- 3 $[x]_{A,R} = [y]_{A,R} \Leftrightarrow x R y$.

D o w ó d T18.1: Twierdzenie to jest prostym wnioskiem z definicji: klasy abstrakcji $[x]_{A,R}$ {**D18**}, relacji równościowej {**D17**} i relacji zwrotnej {**D16.1**}.

D o w ó d T18.2: Z założenia dodatkowego 1.1 $y \in [x]_{A,R}$ i **D18** wynika 1.2 $y \in A$, a wobec tego $[x]_{A,R} \subset A$ {**dfc: DA**: 1.1 \Rightarrow 1.2}.

D o w ó d T18.3: Z założenia implikacji prostej 1. $[x]_{A,R} = [y]_{A,R}$ oraz twierdzenia 2. $y \in [y]_{A,R}$ {**T18.1**} wynika 3. $y \in [x]_{A,R}$ {**RZ**: 1, 2}, czyli $x R y$ {**D18**: 3}.

Z założenia implikacji odwrotnej 1. $x R y$ oraz założenia dodatkowego 1.1 $z \in [x]_{A,R}$ można wyprowadzić 1.2 $x R z$ {**D18**: 1.1}, a jako że R jest relacją równościową, a więc symetryczną i przechodnią {**D17**}, więc również: 1.3 $z R x$ {**D16.3**: 1.2}, 1.4 $z R y$ {**D16.5**: 1.3 \wedge 1}, 1.5 $y R z$ {**16.3**: 1.4} i 1.6 $z \in [y]_{A,R}$ {**D18**: 1.5}, co znaczy, że 2. $[x]_{A,R} \subset [y]_{A,R}$ {**df**: **D1**: 1.1 \Rightarrow 1.6}. W taki sam sposób można okazać, że 3. $[y]_{A,R} \subset [x]_{A,R}$ a zatem: $[x]_{A,R} = [y]_{A,R}$ ■

Na definicji klasy abstrakcji jest oparte określenie tzw. zbioru ilorazowego, oznaczanego przez A/R . Zbiór ilorazowy to rodzina wszystkich klas abstrakcji wyznaczonych przez R i każdy element zbioru A :

D19 Jeżeli $R \in \mathbf{rown}_A$, to $Y \in A/R \Leftrightarrow (\forall x \in A) Y = [x]_{A,R}$

W kontekście definicji zbioru ilorazowego oraz prawdziwości dotyczących klas abstrakcji (**D18**, **T18**) łatwo jest okazać, że są spełnione następujące twierdzenia.

T19. Jeżeli $R \in \mathbf{rown}_A$ oraz $X, Y \in A/R$, to:

- 1 (i) $X \neq \emptyset$ oraz (ii) $X \subset A$;
- 2 o ile $X \neq Y$, to $X \cap Y = \emptyset$;
- 3 $\cup A/R = A$;
- 4 rodzina klas abstrakcji A/R jest podziałem zbioru A .

D o w ó d T19.1: Twierdzenie **T19.1(i)** jest wnioskiem z **D19** oraz **T18.1** i **T18.2**: jeśli bowiem, zgodnie z tą definicją, istnieje $x \in A$, taki że $X = [x]_{A,R}$, a jednocześnie $x \in [x]_{A,R}$ {**T18.1**}, to dowolna klasa abstrakcji rodziny A/R nie może być pusta; natomiast z **T18.2** wynika bezpośrednio, że jest podzbiorem A .

D o w ó d T19.2: Wychodząc z założeń 1. $X, Y \in A/R$ oraz 2. $X \neq Y$ można uznać 3. $(\forall x \in A) X = [x]_{A,R} \wedge (\forall y \in A) Y = [y]_{A,R}$ {**D19**: 1}.

Przyppuszczenie, że 4. $X \cap Y \neq \emptyset$ {zdn.}, tj. że $z \in (X \cap Y)$ prowadzi do sprzeczności: 5. $x R z \wedge y R z$ {**D19**: $X, Y \in A/R$ }, 6. $x R z \wedge z R y$ {**D16.3**: 5}, 7. $x R y$ {**D16.5**: 6}, 8. $[x]_{A,R} = [y]_{A,R}$ {**T8.3**: 7}, 9. $X = Y$ {**RZ**: 8, 3} – sprz.: 9, 2.

D o w ó d T19.3: Jeżeli 1.1 $x \in \cup A/R$ {zd.}, to 1.2 istnieje zbiór $X \in A/R$, taki, że $x \in X$ {**R11.1: **D6.a4**}, a wobec tego także 1.3 $x \in A$ {**T19.1(ii)**, 1.2}. Jeśli natomiast 2.1 $x \in A$ {zd.}, to 2.2 $x \in [x]_{A,R}$ {**T18.1**}, a więc także 2.3 $x \in \cup A/R$. ■

D o w ó d T19.4: Dla stwierdzenia, że rodzina klas abstrakcji A/R jest podziałem zbioru A potrzeba i wystarcza, że są spełnione warunki tzw. poprawności formalnej podziału (określone w *RVI.1: **D9**), mianowicie: dla każdego $X \in A/R$, $X \neq \emptyset$; dla dowolnych $X, Y \in A/R$, jeżeli $X \neq Y$, to $X \cap Y = \emptyset$; oraz by suma $\cup A/R$ była identyczna ze zbiorem A . Że warunki te są spełnione, widać odpowiednio w **T19.1(i)**, **T19.2** oraz w **T19.3**. ■

Sformułowane w komentarzu do pojęcia klasy abstrakcji twierdzenie, że relacja równościowa R rozdziela dany zbiór A na klasy abstrakcji, jest zatem uzasadnione i może być rozumiane ściśle, jako że zgodnie z **T19.4** dzielenie dowolnego zbioru A na klasy abstrakcji dowolnej relacji równoważnościowej w tym zbiorze spełnia warunki podziału logicznego (poprawnego logicznie – zob. *RVI.1.3). Twierdzenie to jest nazywane zasadą abstrakcji.

2.3.4 Relacje porządkujące i zbiory uporządkowane

Własności relacji określone w **D16** pozwalają wyróżnić rodzaje relacji zwanych porządkującymi oraz odpowiadające im odmiany pojęcia zbioru uporządkowanego. Chodzi o relacje porządkujące częściowo, liniowo i dobrze oraz o tak samo uporządkowane zbiory. A przy tym pojęcie porządku liniowego jest uszczegółowieniem uporządkowania częściowego, a pojęcie uporządkowania dobrego jest uszczegółowieniem porządku liniowego⁶. Zależności te są widoczne w definicjach **D20**, **D21** i **D27**, a sformułowane wprost są we wniosku **W2**.

D20.a Relacja R porządkuje częściowo zbiór $A \Leftrightarrow A \subset P(R)$ oraz R jest w zbiorze A asymetryczna i przechodnia;

D20.b Para uporządkowana $\langle A, R \rangle$ jest zbiorem uporządkowanym częściowo $\Leftrightarrow A = P(R) \wedge R$ porządkuje częściowo zbiór A .

Własnością wyróżniającą uporządkowania liniowe spośród częściowych jest spójność relacji porządkującej (spójność w porządkowanym zbiorze).

⁶ To ustalenie terminologiczne jest potrzebne, ponieważ są ujęcia (np. J. Słupecki, K. Hałkowska, K. Piróg-Rzepecka, *Logika i teoria mnogości*, dz. cyt.), w których wyściowe jest pojęcie relacji porządkującej (rozumianej tak, jak tu relacja porządkująca liniowo), uogólniane do pojęcia relacji porządkującej częściowo i uszczegóławiane do pojęcia relacji porządkującej dobrze. W tych analizach „relacja porządkująca” to nazwa ogólna oznaczająca relacje porządkujące częściowo, liniowo, dobrze itd.

- D21.a** Relacja R porządkuje liniowo zbiór $A \Leftrightarrow A \subset P(R)$ oraz R jest w zbiorze A spójna, asymetryczna i przechodnia;
- D21.b** Para uporządkowana $\langle A, R \rangle$ jest zbiorem uporządkowanym liniowo $\Leftrightarrow A = P(R) \wedge R$ porządkuje liniowo zbiór A .

Warunek spójności znaczy, że dowolne dwa nieidentyczne elementy zbioru A są porównywalne względem relacji R porządkującej dany zbiór (zob. **D16.2**). Zbiory uporządkowane liniowo są nazywane łańcuchami.

Dla zdefiniowania uporządkowania dobrego konieczne jest określenie kilku pojęć dotyczących własności zbiorów uporządkowanych i ich wyróżnionych elementów.

- D22.** Przedmiot x jest w zbiorze uporządkowanym (częściowo, liniowo) $\langle A, R \rangle$ elementem:

- a1** minimalnym $\Leftrightarrow x \in A \wedge \sim(\forall y \in A) y R x$;
- a2** maksymalnym $\Leftrightarrow x \in A \wedge \sim(\forall y \in A) x R y$;
- b1** pierwszym $\Leftrightarrow x \in A \wedge (\forall y \in A) [x \neq y \Rightarrow x R y]$;
- b2** ostatnim $\Leftrightarrow x \in A \wedge (\forall y \in A) [x \neq y \Rightarrow y R x]$.

Tłumacząc te zapisy symboliczne, można powiedzieć, że x jest elementem minimalnym danego zbioru uporządkowanego wtedy i tylko, gdy nie ma w tym zbiorze elementu poprzedzającego (wcześniejszego od) x ; natomiast jest elementem maksymalnym, gdy nie ma elementu późniejszego (gdy x nie ma w tym zbiorze następnika). Pojęcia elementu minimalnego i maksymalnego są uszczegółowione do pojęć elementu pierwszego i ostatniego: x jest elementem pierwszym wtedy i tylko, gdy poprzedza wszystkie pozostałe elementy zbioru uporządkowanego, a elementem ostatnim – gdy jest następnikiem wszystkich pozostałych elementów.

Z definicji **D22** i zakładanych w niej określeń własności relacji porządkujących (**D16**) wynikają następujące twierdzenia:

- T20.a** Jeżeli x jest elementem pierwszym (ostatnim) w zbiorze uporządkowanym (częściowo, liniowo) $\langle A, R \rangle$, to jest w tym zbiorze elementem minimalnym (maksymalnym);
- b** Jeżeli x jest elementem minimalnym (maksymalnym) w zbiorze uporządkowanym liniowo $\langle A, R \rangle$, to jest w tym zbiorze elementem pierwszym (ostatnim).

D o w ó d T20.a: Da się okazać, że prowadzi do sprzeczności połączenie zapisanego symbolicznie założenia, że x jest elementem pierwszym, tj.

$$1. x \in A \wedge (\forall y \in A) [x \neq y \Rightarrow x R y],$$

z założeniem dowodu niewprost, że x nie jest elementem minimalnym, tj.

$$2. (\forall y \in A) y R x \{\mathbf{D22.a1}\}. \text{ Z zdn. wynika:}$$

$$3. y_0 \in A \wedge y_0 R x \{\mathbf{OV: 2}\}.$$

Łatwo można sprawdzić, że do sprzeczności prowadzi każdy ze składników alternatywy

$$(*) y_0 = x \vee y_0 \neq x.$$

Jeśli 1.1 $y_0 = x$ {zd.}, to 1.2 $x R x$ {**RZ**: 1.1, 3}, a jednocześnie, jako że relacja R jest asymetryczna {**D20, D21, D16.4**}, 1.3 $\sim x R x$. Jeśli natomiast 2.1 $y_0 \neq x$ {zd.}, to 2.2 $x R y_0$ {**RO: 1, 2.1**}, a wobec asymetryczności relacji R , 2.3 $\sim y_0 R x$ {**D16.4: 2.2**}, co jest sprzeczne z 3.

Analogiczny jest dowód twierdzenia, że jeżeli x jest elementem ostatnim, to jest elementem maksymalnym. ■

D o w ó d T20.b: Z założeń dowodzonego twierdzenia

1. $\langle A, R \rangle$ jest zbiorem uporządkowanym liniowo;

2. x jest elementem minimalnym, tj.

$$3. x \in A \wedge \sim (\forall y \in A) y R x$$

oraz założenia dodatkowego 1.1 $y \in A \wedge y \neq x$ wynika 1.2 $y R x \vee x R y$ {**D16.2: D21: 1, 1.1**}.

Ponieważ przypuszczenie (1.1.1) $y R x$ jest sprzeczne z 2. (gdyby $y R x$, wtedy x nie byłby elementem minimalnym), więc 1.3 $x R y$ {1.2, 1.1.1 \Rightarrow sprz.}. Wobec tego

4. $(\forall y \in A) [y \neq x \Rightarrow x R y]$ {**DΛ: 1.1 \Rightarrow 1.3**}, a zatem x jest elementem pierwszym {3 \wedge 4}.

Dowód twierdzenia, że jeżeli x jest elementem maksymalnym, to jest elementem ostatnim, jest analogiczny. ■

D23.a Zbiór $\langle B, S \rangle$ uporządkowany częściowo jest podzbiorem częściowo uporządkowanego zbioru $\langle A, R \rangle \Leftrightarrow B \subset A \wedge S \subset R$;

b zbiór $\langle B, S \rangle$ uporządkowany liniowo jest podzbiorem uporządkowanego liniowo zbioru $\langle A, R \rangle \Leftrightarrow B \subset A$.

W przypadku zbiorów uporządkowanych liniowo, w których relacja porządkująca jest spójna, tj. wiąże dowolne dwa elementy porządkowanego zbioru, nie jest potrzebny drugi człon koniunkcji definiującej podzbiór $\langle B, S \rangle$ zbioru uporządkowanego liniowo. Jeśli bowiem zbiór $\langle A, R \rangle$ jest

uporządkowany liniowo, to jest wobec **D23.b**, **D21** i **D16.2** oczywiste, że jeśli $B \subset A$, to także $S \subset R$.

W1 Jeżeli zbiór uporządkowany liniowo $\langle B, S \rangle$ jest podzbiorem uporządkowanego liniowo zbioru $\langle A, R \rangle$, to $S \subset R$.

D24. Zbiór $\langle B, S \rangle$ jest w zbiorze uporządkowanym (częściowo, liniowo) $\langle A, R \rangle$:

1 ograniczony z dołu wtedy i tylko, gdy (i) $\langle B, S \rangle$ jest podzbiorem zbioru $\langle A, R \rangle$ oraz (ii) $(\forall x \in A) (\wedge y \in B) [x \neq y \Rightarrow x R y]$;

2 ograniczony z góry wtedy i tylko, gdy (i) $\langle B, S \rangle$ jest podzbiorem zbioru $\langle A, R \rangle$ oraz (ii) $(\forall x \in A) (\wedge y \in B) [x \neq y \Rightarrow y R x]$.

Zgodnie z powyższymi określeniami zbiór $\langle B, S \rangle$ jest w zbiorze $\langle A, R \rangle$ ograniczony, gdy jest w zbiorze A element, który poprzedza każdy element zbioru B ($\langle B, S \rangle$ jest wtedy ograniczony od dołu) albo jest następnikiem (jest późniejszy od) każdego elementu zbioru B ($\langle B, S \rangle$ jest ograniczony od góry).

D25 Element y jest kresem dolnym (górnym) podzbioru $\langle B, S \rangle$ zbioru $\langle A, R \rangle$ uporządkowanego (częściowo, liniowo) wtedy i tylko wtedy, gdy y jest elementem pierwszym (ostatnim) zbioru $\langle B, S \rangle$, a jeśli zbiór ten nie ma elementu pierwszego (ostatniego), to y jest elementem ostatnim zbioru $\{x: x \in A \wedge (\wedge z \in B) x R z\}$ (pierwszym zbioru $\{x: x \in A \wedge (\wedge z \in B) z R x\}$).

Zbiór $\{x: x \in A \wedge (\wedge z \in B) x R z\}$ jest zbiorem wszystkich elementów zbioru A , które są poprzednikami każdego elementu zbioru B , a zbiór $\{x: x \in A \wedge (\wedge z \in B) z R x\}$ zawiera wszystkie elementy zbioru A , które są następnikami każdego elementu zbioru B .

D26. Zbiór $\langle A, R \rangle$ uporządkowany (częściowo, liniowo) jest:

1 gęsty $\Leftrightarrow (\wedge x, y \in A) [x R y \Rightarrow (\forall z \in A) x R z R y]$;

2 ciągly \Leftrightarrow jest gęsty oraz każdy ograniczony z dołu podzbiór zbioru $\langle A, R \rangle$ ma kres dolny.

D27 Zbiór $\langle A, R \rangle$ jest dobrze uporządkowany wtedy i tylko, gdy jest uporządkowany liniowo i każdy jego niepusty podzbiór ma element pierwszy, tj.: $(\wedge \langle B, S \rangle) [(\langle B, S \rangle \subset \langle A, R \rangle \wedge B \neq \emptyset) \Rightarrow (\forall y \in B) (\wedge z \in B) z \neq y \Rightarrow y R z]$.

W kontekście **D20**, **D21** i **D27** są oczywiste następujące wnioski:

- W2. a** Jeżeli relacja R dobrze porządkuje zbiór A , to relacja R porządkuje zbiór A liniowo (częściowo); jeżeli $\langle A, R \rangle$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym, to jest zbiorem uporządkowanym liniowo (częściowo).
- b** Jeżeli zbiór $\langle A, R \rangle$ jest dobrze uporządkowany, to zbiór $\langle B, R \rangle$ taki, że $B \subset A$, również jest dobrze uporządkowany.

Pojęcia określone w powyższych definicjach są niezbędne do wysłownienia ważnego twierdzenia, zwanego lematem Kuratowskiego-Zorna.

- T21** Dla każdego zbioru $\langle A, R \rangle$ uporządkowanego częściowo jest tak, że:
- (*) jeśli jego każdy dobrze uporządkowany podzbiór jest ograniczony z góry,
to w $\langle A, R \rangle$ istnieje element maksymalny.

Twierdzenie to można sformułować zwięźlej, używając pojęcia łańcucha: jeżeli każdy łańcuch zbioru uporządkowanego częściowo jest ograniczony z góry, to istnieje w danym zbiorze element maksymalny; a jeszcze krócej, gdy zbiór uporządkowany, dla którego spełniony jest warunek (*), nazwie się zamkniętym: w każdym zamkniętym zbiorze uporządkowanym istnieje element maksymalny (sformułowanie to jest zwane Zorna zasadą maximum). Analogiczne do **T21** jest twierdzenie mówiące o istnieniu elementu minimalnego: jeżeli każdy łańcuch zbioru uporządkowanego częściowo jest ograniczony z dołu, to istnieje w danym zbiorze element minimalny.

T21 ma wiele ważnych zastosowań w teorii mnogości i matematyce, gdzie w dowodach twierdzeń rozstrzygających o istnieniu postulowanych obiektów pełni rolę twierdzenia pomocniczego (dlatego jest zwane lematem)⁷.

⁷ Zob. K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości. Wraz ze wstępem...*, dz. cyt., s. 258–259, gdzie są odrębnie zapisane twierdzenia: udowodnione przez M. Zorna (w 1935 roku), które jest uogólnieniem twierdzenia udowodnionego przez Kuratowskiego (w 1922 roku) – oba w postaci wskazującej wprost, że w dowodzie tych twierdzeń jest przyjmowane założenie o istnieniu tzw. funkcji wyboru dla rodziny **Pot**($Z - \emptyset$) (do kwestii relacji między **T21** a aksjomatem zwanym pewnikiem wyboru powrócę w **RIV.4). Przykład zastosowania tego lematu jest w: J. Słupecki, K. Hałkowska, K. Piróg-Rzepecka, *Logika i teoria mnogości*, dz. cyt., s. 232.

2.3.5 Izomorfizm relacji

Relacje potwierdzające izomorfizm to relacje między relacjami. Jeśli istnieje jakaś relacja R ujawniająca izomorfizm między relacjami S oraz T – co najczęściej jest zapisywane jako $S \mathbf{iz}_R T$ – to o obu tych relacjach mówi się, że są izomorficzne, co krócej zapisuje się: $S \mathbf{iz} T$. Fakt, że określona relacja ustala izomorfizm między relacjami R oraz S , można wyrażać także w sposób wprost wskazujący na to, że relacja ustalająca izomorfizm jest funkcją, np. pisać: $R \mathbf{iz}_f S$, $R \mathbf{iz}_g S$, $R \mathbf{iz}_{f_1} S$, $R \mathbf{iz}_{f_2} S$ ⁸.

D28.a1 $R \mathbf{iz}_f S$ wtedy i tylko, gdy $f \in \mathbf{1-1} \wedge f: P(R) \rightarrow_{\text{na}} P(S)$
oraz $(\wedge x, y \in P(R)) [x R y \Leftrightarrow f(x) S f(y)]$;

D28.b1 $R \mathbf{iz} S$ wtedy i tylko, gdy $(\exists f) R \mathbf{iz}_f S$.

Relacje R i S są więc izomorficzne zawsze i tylko, gdy istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna odwzorowująca pole pierwszej relacji na pole drugiej relacji w taki sposób, że relacja R wiąże przedmioty x oraz y wtedy i tylko, gdy relacja S zachodzi między wartościami $f(x)$ i $f(y)$ funkcji f dla tych przedmiotów. O funkcji takiej mówi się również, że odwzorowuje izomorficznie relację R na relację S .

Pojęcie izomorfizmu, zdefiniowane wyżej dla relacji dwuczłonowych, łatwo jest przeformułować tak, by objąć nim relacje więcej niż dwuczłonowe. Oto określenie funkcji ustalającej izomorfizm relacji n -członowych ($n \geq 2$):

D28.a2 $R \mathbf{iz}_f S$ wtedy i tylko, gdy $f \in \mathbf{1-1} \wedge f: P(R) \rightarrow_{\text{na}} P(S)$ oraz
 $(\wedge x_1, x_2, \dots, x_n \in P(R)) [R(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow S(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))]$.

Pojęcie izomorfizmu można uogólnić do pojęcia homomorfizmu, a pojęcie izomorfizmu (homomorfizmu) relacji – uogólnić do pojęcia izomorfizmu (homomorfizmu) układów relacyjnych, zwanych także strukturami relacyjnymi lub strukturami. Jeśli chodzi o pierwsze uogólnienie,

⁸ W sensie ścisłym mówi się o funkcjach przekształcających izomorficznie (homomorficznie) jedną relację, czy ogólniej – dziedzinę, w drugą; o funkcjach takich mówi się jednak także, że wyznaczają, ustanawiają, ujawniają izomorfizm, a o samych relacjach, że są izomorficzne – co zgodne z pojęciem podobieństwa relacji (dziedzin) uściślonego w pojęciu izomorfizmu (zob.: A. Grzegorzczak, *Zarys logiki matematycznej*, dz. cyt., s. 56–61; K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości. Wraz ze wstępem...*, dz. cyt., s. 96–98; J. Śłupecki, K. Hałkowska, K. Piróg-Rzepecka, *Logika i teoria mnogości*, dz. cyt., s. 164–167, 190–195).

to można powiedzieć – pomijając nie niezbędny i prosty zapis symboliczny – że w definicji funkcji f okazującej homomorfizm relacji R oraz S ($R \text{ hom}_f S$) pozostaje wymóg odwzorowania pola relacji R na pole relacji S ($f: P(R) \rightarrow_{\text{na}} P(S)$), natomiast funkcja f nie musi być wzajemnie jednoznaczna. Jest wobec tego oczywiste, że:

W3 $R \text{ iz}_f S \Rightarrow R \text{ hom}_f S$.

Natomiast układy (struktury) relacyjne to układy uporządkowane o postaci $\langle A, R_1, \dots, R_n \rangle$, w których A jest dowolnym zbiorem (zwanym polem systemu relacyjnego), a R_1, \dots, R_n to kolejne relacje (dwu- lub wielo- członowe) określone w zbiorze A . Poprzestając na strukturach relacyjnych o prostej charakterystyce, można powiedzieć na przykład, że:

D28.b2 Układy (struktury) relacyjne $\langle A, R \rangle$ i $\langle B, S \rangle$ są izomorficzne wtedy i tylko, gdy istnieje funkcja f wzajemnie jednoznaczna odwzorowująca zbiór A na zbiór B oraz dla dowolnych $x, y \in A$ jest tak, że $x R y \Leftrightarrow f(x) S f(y)$.

Jak widać, określenie to jest analogiczne do **D28.b1**, natomiast w definicji izomorfizmu struktur $\langle A, R_1, \dots, R_n \rangle$ oraz $\langle A, S_1, \dots, S_n \rangle$, obok takich samych wymagań co do własności funkcji f ustalającej izomorfizm, jest warunek, by $(\wedge 1 \leq i \leq n) R_i \text{ iz}_f S_i$; analogicznie jest definiowany homomorfizm struktur relacyjnych.

Łatwym do udowodnienia wnioskiem z **D28** jest następujące twierdzenie:

W4 Relacja izomorfizmu jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, co znaczy, że jest relacją równościową.

Własności relacji izomorfizmu stwierdzone w **W4** dają podstawę, by mówić o klasach abstrakcji relacji (układów relacyjnych) izomorficznych. Klasy takie są nazywane typami relacyjnymi, a o elementach jednej klasy mówi się, że mają ten sam typ relacyjny lub że są tego samego relacyjnego typu. W aksjomatycznych ujęciach ogólnej teorii mnogości pojęcie typu relacyjnego (**tr**) jest wprowadzane jako pierwotne, odrębnym aksjomatem dotyczącym typów relacyjnych – napis $a \text{ tr } \langle A, R \rangle$ jest odczytywany: a jest typem relacyjnym systemu $\langle A, R \rangle$.

A1 Dla każdego systemu relacyjnego $\langle A, R \rangle$, takiego że $R \subset A \times A$, istnieje dokładnie jeden przedmiot α taki, że $\alpha \mathbf{tr} \langle A, R \rangle$, a przy tym dla dowolnych systemów $\langle A, R \rangle$ i $\langle B, S \rangle$ jest tak, że:
 $(\alpha \mathbf{tr} \langle A, R \rangle \wedge \beta \mathbf{tr} \langle B, S \rangle) \Rightarrow [\alpha = \beta \Leftrightarrow \langle A, R \rangle \mathbf{iz} \langle B, S \rangle]$.

Jeśli będzie to w rozważaniach potrzebne, to typ systemu relacyjnego (struktury) $\langle A, R \rangle$ będzie oznaczany symbolem $|\langle A, R \rangle|^9$.

Da się wykazać, że każda własność przysługująca danej relacji (systemowi relacyjnemu) – np. zwrotność, symetria, przechodniość, spójność – przysługuje też każdej relacji (systemowi relacyjnemu) izomorficznej z daną relacją. Egzemplifikacją tej prawidłowości jest kolejne twierdzenie, sformułowane dla systemów relacyjnych o charakterystyce zgodnej z widoczną w **D28.b2**.

T22. Jeżeli struktury relacyjne $\langle A, R \rangle$ i $\langle B, S \rangle$, że są izomorficzne, to:

- 1 $R \in \mathbf{zwr}_A \Rightarrow S \in \mathbf{zwr}_B$;
- 2 $R \in \mathbf{sym}_A \Rightarrow S \in \mathbf{sym}_B$;
- 3 $R \in \mathbf{przech}_A \Rightarrow S \in \mathbf{przech}_B$;
- 4 $R \in \mathbf{fun}_A \Rightarrow S \in \mathbf{fun}_B$.

Dowód:

Wspólne dla twierdzeń 1–4 jest założenie:

1. $\langle A, R \rangle \mathbf{iz} \langle B, S \rangle$

(*) Ponieważ – zgodnie z **D28.b1** – istnieje wtedy funkcja f ustalająca izomorfizm, tj. odwzorowująca jedno-jednoznacznie zbiór A na zbiór B , więc dla dowolnych $x, y, z \in A$ istnieje w zbiorze B dokładnie jeden element będący wartością funkcji f dla danego elementu zbioru A , tj. istnieją $f(x), f(y), f(z) \in B$ – oraz odwrotnie, dla każdego elementu zbioru B istnieje dokładnie jeden element w A , dla którego wartością funkcji f jest dany element z B **{T15.2}**. Korzystając z tego, można uprościć zapisy symboliczne dowodów twierdzeń **T22**.

Dowód T22.1: Drugie założenie tego twierdzenia, tj.

2. $R \in \mathbf{zwr}_A$,

rozwinęte zgodnie z **D16.1**, brzmi:

⁹ Oznaczenie $|\langle A, R \rangle|$ jest przyjęte wyłącznie dla ułatwienia zapisów symbolicznych, typy relacyjne (typy struktury) są bowiem zwykle oznaczane dodaniem kreski nad symbolem układu relacyjnego. Takie samo uproszczenie w zapisie będzie stosowane w kolejnym podrozdziale dla mocy zbiorów, tj. zamiast podwójnej kreski umieszczonej nad symbolem zbioru A będzie stosowany symbol $|A|$.

3. $(\wedge x \in A) x R x$, co – na podstawie 1 i **D28.a1** – implikuje

4. $(\wedge f(x) \in B) f(x) S f(x)$, co kończy dowód {**D16.1**: (*) : 4}.

Dowód T22.2: Założenie

2. $R \in \mathbf{sym}_A$

jest równoważne z

3. $(\wedge x, y \in A) [x R y \Rightarrow y R x]$ {**D16.3**}.

Z założenia dodatkowego 1.1 $f(x) S f(y)$ wynika:

1.2 $x R y$ {1, **D28.a1**: 1.1}, 1.3 $y R x$ {**D16.3**, 1.3} i 1.4 $f(y) S f(x)$ {1, **D28.a1**: 1.3}. Można zatem stwierdzić, że

4. $(\wedge f(x), f(y) \in B) [f(x) S f(y) \Rightarrow f(y) S f(x)]$ {**DA**: 1.1 \Rightarrow 1.4},

co znaczy, że $S \in \mathbf{sym}_B$ {**D16.3**: 4}.

Dowód T22.3: Założenie

2. $R \in \mathbf{przech}_A$

jest równoważne z

3. $(\wedge x, y, z \in A) [(x R y \wedge y R z) \Rightarrow y R z]$ {**D16.5**}.

Z założenia dodatkowego 1.1 $f(x) S f(y) \wedge f(y) S f(z)$ wynika:

1.2 $x R y \wedge y R z$ {1, **D28.a1**: 1.1}, 1.3 $x R z$ {**D16.5**, 1.3} oraz

1.4 $f(x) S f(z)$ {1, **D28.a1**: 1.3}. Zatem:

4. $(\wedge f(x), f(y), f(z) \in B) [(f(x) S f(y) \wedge f(y) S f(z)) \Rightarrow f(x) S f(z)]$ {**DA**: 1.1 \Rightarrow 1.4}, co znaczy, że $S \in \mathbf{przech}_B$ {**D16.5**: 4}.

Dowód T22.4: Założenie

2. $R \in \mathbf{fun}_A$

jest równoważne z

3. $(\wedge x, y, z \in A) [(x R y \wedge x R z) \Rightarrow y = z]$ {**D10.1**}.

Wychodząc z założenia dodatkowego 1.1 $f(x) S f(y) \wedge f(x) S f(z)$, uzyskuje się kolejno: 1.2 $x R y \wedge x R z$ {1, **D28.a1**: 1.1}, 1.3 $y = z$ {3, 1.2} oraz 1.4 $f(x) = f(z)$ {1, **D28.a1**: 1.3}. Zatem:

4. $(\wedge f(x), f(y), f(z) \in B) [(f(x) S f(y) \wedge f(x) S f(z)) \Rightarrow f(x) = f(z)]$ {**DA**: 1.1 \Rightarrow 1.4}, co znaczy, że $S \in \mathbf{fun}_B$ {**D16.5**: 4}. ■

Uogólnieniem **T22** jest następujące twierdzenie:

T23 Jeżeli układy relacyjne $\langle A, R \rangle$ i $\langle B, S \rangle$ są izomorficzne oraz system $\langle A, R \rangle$ (relacja R) spełnia warunek (formułę) W , w którym nie występują symbole B i S (nie występuje symbol S), to system $\langle B, S \rangle$ (relacja S) spełnia warunek, który powstaje z formuły W w wyniku zastąpienia w każdym miejscu symbolu A symbolem B oraz symbolu R symbolem S .

Zgodnie z tym twierdzeniem każda cecha danej relacji R (systemu relacyjnego) przysługuje także każdej relacji izomorficznej z R – mówiąc inaczej: cechy relacji są niezmiennikami izomorfizmu. Twierdzenie **T23** jest nazywane zasadniczym twierdzeniem o izomorfizmie¹⁰.

3. Teoria liczb kardynalnych

Po wprowadzeniu podstawowych pojęć – równoliczności zbiorów, mocy zbioru, liczby kardynalnej – są w tym podrozdziale scharakteryzowane rodzaje zbiorów wyróżnionych ze względu na liczność oraz wybrane relacje w zbiorze liczb kardynalnych.

3.1 Równoliczność zbiorów, pojęcia mocy zbioru i liczby kardynalnej

Zamiast mówić, że zbiory są równoliczne, można prościej powiedzieć, że mają taką samą liczbę elementów. Pojęcie równoliczności i oparte na nim pojęcia teorii zbiorów mają więc intuicyjnie łatwo uchwytnie podstawy, zbudowane na porównywaniu zbiorów skończonych, a zwykle zbiorów o łatwej do policzenia i porównania liczbie elementów. Uściślenie i uogólnienie tych podstawowych pojęć prowadzi jednak do wniosków, pośród których są twierdzenia zaskakujące ze zdroworozsądkowego punktu widzenia.

Dwie niżej sformułowane definicje uściślają w języku teorii mnogości pojęcie równoliczności.

$$\mathbf{D1.a} \quad A \sim_R B \Leftrightarrow R \in \mathbf{1-1} \wedge D_I(R) = A \wedge D_{II}(R) = B;$$

$$\mathbf{D1.b} \quad A \sim B \Leftrightarrow (\forall R) A \sim_R B.$$

¹⁰ W ogólnym dowodzie tego twierdzenia trzeba uwzględnić budowę formuły wyrażającej symbolicznie warunek W , o którym w twierdzeniu mowa – zob. np. J. Słupecki, L. Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 194–197, a także K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości. Wraz ze wstępem...*, dz. cyt., s. 96–97. Twierdzenie to udowodnili A. Lindenbaum i A. Tarski (zob. J. Słupecki, L. Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 197).

Napis $A \sim_R B$ jest odczytywany: relacja R okazuje (stwierdza, ujawnia, ustala) równoliczność zbiorów A oraz B . By tak było, relacja R musi być wzajemnie jednoznaczna, czyli musi być funkcją wzajemnie jednoznaczną, której dziedziną jest zbiór A , a przeciwdziedziną zbiór B . Inaczej można więc powiedzieć, że R przekształca wzajemnie jednoznacznie zbiór A na zbiór B . Natomiast formuła $A \sim B$ jest skrótem wyrażenia: zbiory A oraz B są równoliczne. Zbiór A jest więc równoliczny ze zbiorem B wtedy i tylko, gdy istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna przekształcająca zbiór A na zbiór B , tj. taka, której zbiorem argumentów jest zbiór A , a zbiorem wartości jest zbiór B . W zapisach symbolicznych równoliczności często stosuje się symbol \mathbf{rI} zamiast \sim oraz notację wskazującą wprost, że relacja stwierdzająca równoliczność jest funkcją, pisząc np. $A \sim_f B$, $f \in \mathbf{1-1}$, $f: A \rightarrow_{\text{na}} B$.

Wobec równości $x = x$ (**RIII.2: **A1**), definicji relacji ograniczonej do danego zbioru (**RIV.2: **D4**) oraz definicji funkcji i funkcji wzajemnie jednoznacznej (**RIV.2: **D10** i **D14**) są w przypadku relacji identyczności I oczywiste następujące równości (ich symboliczne zapisy będą przydatne w skróceniu dowodu kolejnego twierdzenia). W równościach tych symbol I_A jest skrótem symbolu $I|_A$, tj. oznacza relację identyczności ograniczoną do zbioru A .

$$\mathbf{L1.a} \quad D_I(I_A) = A; \quad \mathbf{b.} \quad D_{II}(I_A) = A; \quad \mathbf{c.} \quad I_A \in \mathbf{1-1}.$$

Łatwo jest udowodnić także następujące twierdzenie pomocnicze.

$$\begin{aligned} \mathbf{L2. a} \quad & A \sim_{I_A} A; \\ \mathbf{b} \quad & A \sim_R B \Rightarrow B \sim_{R^{-1}} A; \\ \mathbf{c} \quad & A \sim_R B \wedge B \sim_S C \Rightarrow A \sim_{S \circ R} C. \end{aligned}$$

Dowód L2.a: Lemat ten wynika bezpośrednio z **L1** i definicji **D1.a**.

Dowód L2.b: Z założenia tego lematu tj. $1. A \sim_R B$ oraz z **D1.a** wynika

$$2. R \in \mathbf{1-1} \wedge D_I(R) = A \wedge D_{II}(R) = B,$$

a koniunkcja ta prowadzi do uznania, że

$$3. R^{-1} \in \mathbf{1-1} \wedge D_I(R^{-1}) = B \wedge D_{II}(R^{-1}) = A$$

{**RIV2: **T16.1**: $R \in \mathbf{1-1}$; **T5.1-2**: $D_I(R) = A$, $D_{II}(R) = B$ }, a zatem:

$$B \sim_{R^{-1}} A.$$

Dowód L2.c: Założenie 1. $A \sim_R B \wedge B \sim_S C$

jest, zgodnie z **D1.a**, równoważne z:

$$2. R \in \mathbf{1-1} \wedge D_I(R) = A \wedge D_{II}(R) = B \text{ oraz } S \in \mathbf{1-1} \wedge D_I(S) = B \wedge D_{II}(S) = C.$$

Skoro obie te relacje są wzajemnie jednoznaczne, więc także

3. $S \circ R \in \mathbf{1-1}$ {**RIV.2: **T16.2**: 2}, a ponieważ

4. $D_I(R) = A$, $D_{II}(R) = B = D_I(S)$ i $D_{II}(S) = C \{2\}$, więc

5. $D_I(S \circ R) = A$ i $D_{II}(S \circ R) = C$ {**RIV: **T15.2**: $R, S \in \mathbf{1-1}, 3, 4\}$,

a zatem: $A \sim_{S \circ R} C$ {**D1.a**: 3, 5}. ■

W dowodach twierdzeń kolejnego podrozdziału będą także odesłania do następujących twierdzeń pomocniczych:

L3. a $(A \times B) \sim (B \times A)$;

b $(A \times \{x\}) \sim A \sim A^{\{x\}}$; $\{x\}^A \sim \{x\}$;

c $A \sim B \wedge C \sim D \Rightarrow (A \times C) \sim (B \times D)$;

d $(\wedge A, B) (\vee A_1, B_1) [A \sim A_1 \wedge B \sim B_1 \wedge (A_1 \cap B_1) = \emptyset]$.

Dowód L3a: Równoliczność zbiorów $(A \times B)$ oraz $(B \times A)$ ujawnia funkcja różnowartościowa f taka, że $D_I(f) = (A \times B)$, $D_{II}(f) = (B \times A)$ oraz $(\wedge \langle a, b \rangle \in (A \times B)) f \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$.

Dowód L3.b: Równoliczność A z iloczynem kartezjańskim $(A \times \{x\})$ okazuje funkcja f taka, że dla dowolnego $a \in A$: $f(a) = \langle a, x \rangle$, a równoliczność A z rodziną $A^{\{x\}}$ ujawnia funkcja f taka, że dla dowolnego $a \in A$: $f(a) = \langle x, a \rangle$; jako że jest jedna tylko funkcja odwzorowująca dowolny zbiór A na zbiór jednoelementowy $\{x\}$, tj. taka, że dla każdego $a \in A$: $f(a) = x$, więc funkcja F , taka że $F(f) = x$, okazuje równoliczność zbiorów $\{x\}^A$ i $\{x\}$.

Dowód L3.c: Jeśli $A \sim_f B$ i $C \sim_g D$, to funkcja h określona na zbiorze $(A \times C)$, o wartościach w $(B \times D)$ taka, że dla każdego $\langle a, c \rangle \in (A \times C)$, $h \langle a, c \rangle = \langle f(a), g(c) \rangle$, okazuje równoliczność zbiorów $(A \times C)$ oraz $(B \times D)$.

Dowód L3.d: Natomiast by uznać, że zawsze istnieją rozłączne zbiory równoliczne z danymi, wystarczy dostrzec, że o ile $x \neq y$, to zbiory $(A \times \{x\})$ i $(B \times \{y\})$ są równoliczne ze zbiorami, odpowiednio, A i B oraz $(A \times \{x\}) \cap (B \times \{y\}) = \emptyset$. ■

Lemat **L2** upraszcza dowód następującego twierdzenia.

T1. Dla dowolnych zbiorów A, B, C jest tak, że:

1 $A \sim A$;

2 $A \sim B \Rightarrow B \sim A$;

3 $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

D o w ó d T1.1: Relacją wymaganą w **D1.b** do ogłoszenia równoliczności dowolnego zbioru A z nim samym jest, zgodnie z **L2.a**, I_A , tj. funkcja identyczności ograniczona do zbioru A .

D o w ó d T1.2: Z założenia, że istnieje relacja R okazująca równoliczność zbiorów A oraz B , na podstawie **L2.b** wynika, że relacja R^{-1} ustala równoliczność zbiorów B oraz A .

D o w ó d T1.3: Jeśli, zgodnie z założeniem tego twierdzenia i **D1.b**, istnieją relacje R i S , takie że R okazuje równoliczność między A i B , a S między zbiorami B i C , to złożenie $S \circ R$ tych relacji ujawnia równoliczność zbiorów A oraz C **{L2.c}. ■**

Można więc, zgodnie z zapisami **T1** powiedzieć, że relacja równoliczności jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, jest zatem, zgodnie z ****RIV.2: D17**, oczywisty następujący wniosek:

W1 Równoliczność jest w dowolnej, lecz określonej rodzinie zbiorów \mathbf{A} relacją równościową: $\sim \in \mathbf{równ}_A$.

Warto zwrócić uwagę na zrelatywizowanie równoliczności do określonej rodziny zbiorów \mathbf{A} . Wskazanie rodziny \mathbf{A} , poprzedzające wytyczanie klas abstrakcji relacji równoliczności, jest konieczne, pojęcie niezrelatywizowane bowiem, tj. zbioru wszystkich zbiorów równolicznych, prowadzi do antynomii, ponieważ suma zbioru wszystkich zbiorów równolicznych z jakimkolwiek zbiorem niepustym byłaby zbiorem uniwersalnym w sensie absolutnym, a pojęcie takie, jak wiadomo, prowadzi do sprzeczności. W **W1** natomiast mowa o klasach zbiorów równolicznych będących elementami ustalonej rodziny \mathbf{A} .

Zamiast mówić, że zbiory A oraz B są równoliczne, mówi się, że są one tej samej mocy albo że mają tę samą liczbę kardynalną. Moce zbiorów A , B , X ... będą oznaczane symbolami $|A|$, $|B|$, $|X|$, W teorii mnogości, z powodów wzmiankowanych w komentarzu do **W1**, nie określa się mocy (liczby kardynalnej) zbioru A jako klasy zbiorów równolicznych ze zbiorem A . W ujęciach aksjomatycznych pojęcie liczby kardynalnej (mocy) zbioru jest oparte na pojęciu typu relacyjnego. Na przykład w ujęciu wywodzącym się od von Neumanna liczby kardynalne są określane jako tzw. liczby porządkowe początkowe (liczby porządkowe to typy relacyjne zbiorów dobrze uporządkowanych). Na ścisły związek między równolicznością zbiorów a izomorfizmem odnośnych systemów relacyjnych wskazuje następujące twierdzenie, łatwe do udowodnienia na podstawie **D1** oraz ****RIV.2: D28b.2**.

T2 Zbiory A oraz B są równoliczne wtedy i tylko, gdy systemy relacyjne $\langle A, A \times A \rangle$ oraz $\langle B, B \times B \rangle$ są izomorficzne:

$$A \sim B \Leftrightarrow \langle A, A \times A \rangle \text{ iz } \langle B, B \times B \rangle.$$

Jeśli przyjmie się umowę, że typ relacyjny systemu $\langle A, A \times A \rangle$ będzie nazywany liczbą kardynalną zbioru A lub jego mocą oraz oznaczany symbolem $|A|$, to można stwierdzić, że

T3.a Dla dowolnych zbiorów A oraz B jest tak, że: $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$.

Dowód:

Dla każdego systemu relacyjnego istnieje – zgodnie z **RIV.2: **A1** – dokładnie jeden jego typ relacyjny, a przy tym typy dwóch różnych systemów relacyjnych – zwane inaczej ich mocami lub liczbami kardynalnymi – są identyczne wtedy i tylko, gdy systemy te są izomorficzne, a izomorficzne są wtedy i tylko, gdy – zgodnie **T2** – zbiory A oraz B są równoliczne. ■

W porównaniu z ujęciem ogólnym, aksjomatycznym, naszkicowane w tym punkcie ujęcie mocy zbiorów (liczb kardynalnych) jest bardzo uproszczone. Uproszczenie jest konieczne choćby dlatego, że nie została przedstawiona teoria typów i liczb porządkowych (nie licząc prowadzących w tę stronę **RIV.2: **D28.a2**; **W4**; **A1**). Powodem ważniejszym jest to, że upraszczające mówienie o mocach zbiorów (liczbach kardynalnych) jest dla potrzeb tego opracowania wystarczające oraz jest zgodne z przyjętym, już w rozważaniach rozdziału *RIV.3, rozumieniem zbioru uniwersalnego, tj. jako uniwersum zrelatywizowanego do kontekstu rozważań.

Zgodnie z tym uproszczeniem przyjmijmy, że określone uniwersum U jest zbiorem nieskończonym, oznaczmy symbolem K rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru U (**RIV.1: **D3**), tj.

$$(*) \quad K = \text{Pot}(U),$$

oraz ograniczmy relację równoliczności \sim do rodziny K . W analizach tak skonkretyzowanych można już, bez groźby sprzeczności, mówić o klasach abstrakcji relacji równoliczności, a dokładniej – o klasach abstrakcji relacji $\sim|_K$, choć w celu uproszczenia niektórych zapisów symbolicznych będzie też stosowany symbol \sim . Zgodnie z **RIV.2: **D18**, jeśli $X \in K$, to $[X]_{K, \sim}$ jest klasą abstrakcji relacji równoliczności w rodzinie K wyznaczoną przez zbiór X , tj. podzbiorem rodziny K zawierającym wszystkie zbiory równoliczne ze zbiorem X . Klasa abstrakcji $[X]_{K, \sim}$ będzie nazywana mocą

zbioru X i oznaczana, zgodnie z wcześniej uzasadnioną i wyżej stosowaną już notacją, symbolem $\|X\|$:

$$\mathbf{D2} \quad \|X\| = [X]_{\mathbf{K}/\sim}$$

Jak wiadomo

(**) Jeżeli $R \in \mathbf{równ}_A$ oraz $x, y \in A$, to $[x]_{A,R} = [y]_{A,R} \Leftrightarrow x R y$
 {**RIV.2: **T18.3**}.

Ponieważ poprzednik implikacji (**) jest prawdziwy dla $X, Y \in \mathbf{K}$ i relacji $\sim_{|\mathbf{K}}$ {**W1**}, więc na podstawie **D2** można stwierdzić, że:

T3.a' Dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathbf{K}$ jest tak, że: $\|A\| = \|B\| \Leftrightarrow A \sim_{|\mathbf{K}} B$.

Jak widać, **T3.a'** jest konkretyzacją **T3.a** właściwą dla ograniczenia relacji równoliczności \sim do $\sim_{|\mathbf{K}}$

Do wprowadzenia pojęcia liczby kardynalnej w rozwijanym tu ujęciu jest potrzebne pojęcie zbioru ilorazowego, czyli klasy klas abstrakcji wyznaczonych przez daną relację równościową i wszystkie elementy zbioru będącego polem tej relacji (**RIV.2: **D19**). Dla relacji równoliczności ograniczonej do klasy \mathbf{K} – a relacja ta, zgodnie z **W1**, jest równościowa – zbiór ten jest określony następująco:

(***) $Y \in \mathbf{K}/\sim_{|\mathbf{K}} \Leftrightarrow (\forall X \in \mathbf{K}) Y = [X]_{\mathbf{K}/\sim}$.

Zbiór ilorazowy $\mathbf{K}/\sim_{|\mathbf{K}}$ jest więc rodziną zbiorów będących klasami abstrakcji relacji równoliczności w rodzinie \mathbf{K} , czyli elementy każdego ze zbiorów rodziny $\mathbf{K}/\sim_{|\mathbf{K}}$ są równolicznymi podzbiórmi wybranego uniwersum \mathbf{U} . Zbiór \mathbf{Lk} jest ogółem liczb kardynalnych – mówiąc dokładniej, jest ogółem liczb kardynalnych zrelatywizowanym do \mathbf{U} (ogółem liczb kardynalnych w \mathbf{U}). Pamiętając o tej relatywizacji, zamiast $\mathbf{Lk}_{\mathbf{U}}$ można używać prostszego symbolu \mathbf{Lk} :

$$\mathbf{D3} \quad \mathbf{Lk} = \mathbf{K}/\sim_{|\mathbf{K}}$$

Z definicji mocy zbioru **D2** oraz określenia (***) zbioru $\mathbf{K}/\sim_{|\mathbf{K}}$ wynika, że każda liczba kardynalna jest mocą jakiegoś zbioru (liczby kardynalne, zgodnie z tradycyjną symboliką, będą oznaczane małymi literami alfabetu gotyckiego):

T3.b' $m \in \mathbf{Lk} \Leftrightarrow (\exists X \in \mathbf{K}) m = \|X\|$.

Jest też prawdziwa implikacja, że moc dowolnego zbioru należącego do \mathbf{K} jest liczbą kardynalną:

T3.c' $Y \in \mathbf{K} \Rightarrow |Y| \in \mathbf{Lk}$.

Dowód:

Rzeczywiście, podstawieniem **T3.b'** jest równoważność

1. $|Y| \in \mathbf{Lk} \Leftrightarrow (\forall X \in \mathbf{K}) |Y| = |X|$. Niech 2. $Y \in \mathbf{K}$, a $|Y|$ jest mocą zbioru Y . Zastosowanie definicji kwantyfikatora o ograniczonym zakresie (**RII.2: **D1.b**) i reguły **DV** do koniunkcji $Y \in \mathbf{K} \wedge |Y| = |Y|$ prowadzi do uznania
3. $(\forall X \in \mathbf{K}) |X| = |Y|$, a zatem: $|Y| \in \mathbf{Lk} \{RO_{\Leftrightarrow}; 1, 3\}$. ■

W ujęciu ogólniejszym od tu rozwijanego dowodzi się twierdzeń, że dla każdego zbioru istnieje dokładnie jedna liczba kardynalna będąca jego mocą oraz dla każdej liczby kardynalnej istnieje zbiór, którego mocą jest ta liczba kardynalna.

T3.b $(\wedge A) (\forall_1 m) m = |A|$;

T3.c $(\wedge m) (\forall A) m = |A|$.

Moce zbiorów można więc nazywać liczbami kardynalnymi i odwrotnie. Stosując pojęcia mocy zbioru i liczby kardynalnej, warto jednak pamiętać, że oba te pojęcia upraszczają tylko formułowanie tego, co da się powiedzieć bez nich, stosując pojęcie równoliczności (por. uwagi do **W1** i **T3.a**).

3.2 Rodzaje zbiorów ze względu na liczność

W uwagach wprowadzających do tego podrozdziału była już mowa o tym, że pojęcie równoliczności ma intuicyjne podstawy w licznosci, tj. liczbie elementów zbiorów skończonych. Dotyczy to także pojęć opartych na pojęciu równoliczności, tj. pojęć mocy zbioru i liczby kardynalnej.

3.2.1 Zbiory skończone i nieskończone

Rozróżnienie podstawowe, także intuicyjnie, to zbiór skończony vs zbiór nieskończony. Pojęcia te są sprzeczne, dlatego określenie jednego z nich dostarcza definicji drugiego, w której jest negacja członu określającego definicji wyjściowej.

D4.a A jest zbiorem skończonym wtedy i tylko, gdy $(\forall n \in \mathcal{N}) |A| = n$.

Zgodnie z **D4.a** mocą (liczbą kardynalną) zbioru skończonego jest liczba naturalna, a przy tym mocą zbioru pustego jest liczba 0, a mocą niepustego zbioru n -elementowego jest liczba $n \in \mathcal{N}$ większa od 0. Posługując się negacją, otrzymujemy definicję zbioru nieskończonego.

D4.b A jest zbiorem nieskończonym wtedy i tylko, gdy $\sim(\forall n \in \mathcal{N}) |A| = n$.

Zbiór nieskończony jest więc zbiorem takim, dla którego nie istnieje liczba naturalna będąca jego mocą (jego mocą nie jest żadna liczba naturalna).

Od matematyka niemieckiego R. Dedekinda pochodzi definicja zbioru nieskończonego niezależna od pojęcia liczby naturalnej.

D5.a A jest zbiorem nieskończonym wtedy i tylko, gdy istnieje podzbiór właściwy B zbioru A taki, że $B \sim A$.

W myśl tej definicji podzbiór nieskończony to taki, który jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym, tj. takim, że $B \subset A \wedge B \neq A$ (zob. uwagi do ****RIV.1: D2**) – tak zdefiniowane zbiory nieskończone nazywa się nieskończonymi w sensie Dedekinda. Tak jak dla **D4** określenie zbioru w tym sensie skończonego otrzymuje się przez negację.

D5.b A jest zbiorem skończonym wtedy i tylko, gdy nie istnieje podzbiór właściwy B zbioru A taki, że $B \sim A$, czyli zbiór A jest skończony, gdy nie jest równoliczny z żadnym swoim podzbiorem właściwym.

Można okazać, że **D4** oraz **D5** są równoważne, a więc że zbiory skończone/nieskończone rozumiane zgodnie z **D4** to zbiory skończone/nieskończone w sensie Dedekinda. Składnikiem uzasadnienia tej równoważności jest implikacja:

T4 Jeżeli $(\forall n \in \mathcal{N}) |A| = n$, to nie istnieje podzbiór właściwy B zbioru A taki, że $B \sim A$.

Dowód:

Jeśli $|A| = 0$, tj. $A = \emptyset$, to na pewno nie istnieje podzbiór właściwy zbioru A , czyli twierdzenie jest prawdziwe. Gdy natomiast dla dowolnego zbioru A , takiego że $|A| = n > 0$ dołączy się założenie dowodu niewprost, tj. że istnieje podzbiór właściwy $B \subset A$ równoliczny z A , wtedy uzyskuje się sprzeczność. Nawet bowiem gdy istnieje jeden tylko element x zbioru A , który nie jest elementem zbioru B – a istnienie takiego elementu jest niezbędne dla: $B \subset A \wedge A \neq B$ **{ZE}** – wtedy: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x\}$, $B = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$, czyli B jest równoliczne z $A' = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ (relacja

ujawniającą równoliczność jest identyczność) oraz – zgodnie z założeniem niewprost – jest równoliczny z A , a wobec tego $A \sim A'$ **{T1.3}**, co jest sprzeczne z założeniem, że $\|A\| = n$. ■

Zgodne z **TR**_⇒ przekształcenie **T4** prowadzi do wniosku:

W2 Jeżeli istnieje podzbiór właściwy B zbioru A taki, że $B \sim A$, to $\sim(\forall n \in \mathcal{N}) \|A\| = n$.

W dowodzie kolejnego twierdzenia, niezbędnego do okazania równoważności **D4** i **D5**, tj. implikacji odwrotnej do **W2**, trzeba się odwołać do tzw. aksjomatu wyboru (pomijam symboliczny zapis tego aksjomatu) oraz do twierdzenia **T5**¹¹.

A1 Dla każdej niepustej rodziny zbiorów niepustych i parami rozłącznych istnieje zbiór, który ma dokładnie jeden element wspólny z każdym zbiorem danej rodziny.

T5 Jeżeli $\sim(\forall n \in \mathcal{N}) \|A\| = n$, to istnieje podzbiór właściwy B zbioru A taki, że $B \sim A$.

Bezpośrednim wnioskiem z **T5** jest:

W3 Jeżeli nie istnieje podzbiór właściwy B zbioru A taki, że $B \sim A$, to $(\forall n \in \mathcal{N}) \|A\| = n$.

Odczytanie **T4**, **W2**, **T5** i **W3** w kontekście **D4** i **D5** prowadzi do następujących wniosków (w ich zapisie zbiory skończone i nieskończone rozumiane zgodnie z **D4** są oznaczane skrótami **S** i **NS**, a rozumiane zgodnie z **D5** – symbolami **S_D** i **NS_D**):

W4. a	$S \Rightarrow S_D$	{ T4 };
b	$NS_D \Rightarrow NS$	{ W2 };
c	$NS \Rightarrow NS_D$	{ T5 };
d	$S_D \Rightarrow S$	{ W3 }.

Wnioski **W4a–d** są podsumowane w kolejnym twierdzeniu.

T6 Zbiór A jest: skończony w rozumieniu **D4** \Leftrightarrow jest skończony w sensie **D5**; nieskończony w sensie **D4** \Leftrightarrow jest nieskończony w znaczeniu **D5**.

¹¹ Dowód jest np. w J. Śłupecki, L. Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 189–190. Aksjomat ten jest omówiony w **RIV.4.2.2.

3.2.2 Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne

Równoległe do podziału zbiorów i ich mocy na skończone i nieskończone dzieli się liczby kardynalne na skończone i tzw. pozaskończone, czyli moce zbiorów nieskończonych. Pośród liczb pozaskończonych dwie są w wielu analizach teorii mnogości podstawowe: moc zbioru liczb naturalnych, tradycyjnie oznaczana symbolem \aleph_0 (alef zero) oraz moc ogółu liczb rzeczywistych, oznaczana symbolem c i nazywana mocą kontinuum.

$$\mathbf{D6. a} \quad \aleph_0 = |\mathcal{N}|;$$

$$\mathbf{b} \quad c = |\mathcal{R}|.$$

Na podstawie **T3** liczby te można zdefiniować równoważnościowo:

$$\mathbf{a'} \quad |A| = \aleph_0 \Leftrightarrow A \sim \mathcal{N};$$

$$\mathbf{b'} \quad |A| = c \Leftrightarrow A \sim \mathcal{R}.$$

Liczba kardynalna \aleph_0 jest więc mocą każdego zbioru równolicznego z ogółem liczb naturalnych, a liczba kardynalna c jest mocą każdego zbioru równolicznego ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych. Rozwijając określenie **D6.a'** zgodnie z definicją **D1.1**, można powiedzieć, że zbiór A jest równoliczny ze zbiorem \mathcal{N} wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja f wzajemnie jednoznaczna przekształcająca zbiór A na zbiór \mathcal{N} . Wówczas funkcja odwrotna f^{-1} także jest wzajemnie jednoznaczna (**RIV.2: **T15.1**) i jest – zgodnie z **RIV.2: **D15.1** – ciągiem nieskończonym, którego dziedziną jest zbiór liczb naturalnych, a zbiorem wartości (zapasem ciągu) jest zbiór A , a dokładniej: f^{-1} przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej i dokładnie jeden element zbioru A (oznaczany jako a_i).

T7 $|A| = \aleph_0$ wtedy i tylko, gdy istnieje ciąg nieskończony $\{a_i: i \in \mathcal{N}\}$ o wyrazach niepowtarzających się, taki że $\{a_0, a_1, a_2, \dots\} = A$.

Zbiory skończone i zbiory mocy \aleph_0 są zwane przeliczalnymi, a pozostałe nazywa się nieprzeliczalnymi.

D7 Zbiór A jest przeliczalny wtedy i tylko, gdy A jest zbiorem skończonym lub $|A| = \aleph_0$.

Bezpośrednim wnioskiem z definicji **D7** zbioru przeliczalnego oraz twierdzenia **T3** jest:

W5.a Zbiór równoliczny ze zbiorem przeliczalnym jest przeliczalny.

W kolejnym wniosku jest wskazanych kilka przykładów zbiorów przeliczalnych będących podzbiorem zbioru \mathcal{N} .

W5.b Do zbiorów nieskończonych przeliczalnych, tj. zbiorów mocy \aleph_0 , należą np.:

- (i) zbiór liczb naturalnych większych od dowolnej (ustalonej) liczby naturalnej k ;
- (ii) $\mathcal{N} - \{0\}$;
- (iii) ogół liczb naturalnych parzystych;
- (iv) zbiór liczb naturalnych nieparzystych;
- (v) zbiór liczb całkowitych ujemnych.

Dowód:

By okazać, że każdy z tych zbiorów jest mocy \aleph_0 , wystarczy – zgodnie z **D6.a'** – określić funkcję ustalającą równoliczność zbioru \mathcal{N} z danym zbiorem, czyli – w myśl **T7** – określić nieskończony ciąg, którego zapas $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ jest z danym zbiorem identyczny. Wspólne dla przykładów (i)–(iii) jest to, że dziedziną funkcji ustalającej równoliczność i układającej elementy wymienionych zbiorów w nieskończone ciągi o wymaganych własnościach jest zbiór \mathcal{N} ; natomiast w przykładach (iv) i (v) dziedziną funkcji ustalającej równoliczność jest zbiór $\mathcal{N} - \{0\}$.

W przykładach (i)–(iii) funkcje okazujące równoliczność są dla $i \in \mathcal{N}$ określone następująco:

(i) $f(i) = i + k + 1$, a kolejne wyrazy ciągu to $a_0 = k + 1$, $a_1 = k + 2$, $a_2 = k + 3$, $a_3 = k + 4$, ...;

(ii) $f(i) = i + 1$, a ciąg to $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, ...;

Warto dostrzec, że równość $|\mathcal{N} - \{0\}| = \aleph_0$ można uzyskać na podstawie (i) dla $k = 0$, bo zbiór $\mathcal{N} - \{0\}$ jest identyczny z $\{i \in \mathcal{N} : i > 0\}$;

(iii) $f(i) = 2 \cdot i$, a wyrazy ciągu to $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, ...;

Dla (iv) i (v) funkcje są dla $i \in \mathcal{N} - \{0\}$ wyznaczone następująco:

(iv) $f(i) = 2 \cdot i - 1$, ciąg: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, ...;

(v) $f(i) = -i$, ciąg: $a_1 = -1$, $a_2 = -2$, $a_3 = -3$, ... ■

Ponieważ elementy zbioru przeliczalnego skończonego, nawet jednoelementowego, również można ułożyć w ciąg nieskończony (por. uwagi do ****RIV.2: D15**), lecz o powtarzających się wyrazach, więc jest łatwo w kontekście **T7** i **D7** dostrzec, że jest prawdziwa następująca równoważność:

T8 Niepusty zbiór A jest przeliczalny wtedy i tylko, gdy istnieje ciąg nieskończony, którego zapasem (zbiorem wyrazów) jest A .

Wskazanie (skonstruowanie) dla zbioru A ciągu, o którym mowa w tym twierdzeniu, pozwala więc uznać zbiór A za przeliczalny. Określenie takiego ciągu (zasad jego układania) jest wykorzystywane w dowodach wielu twierdzeń o zbiorach przeliczalnych. Zostanie również wykorzystane w dowodach następujących twierdzeń.

- T9. a** Dowolny podzbiór zbioru przeliczalnego jest przeliczalny;
b Suma dwóch zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym;
c Suma dowolnej skończonej liczby zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym;
d Suma nieskończonej przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym;
e Iloczyn kartezjański dwóch zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny.

Dowód T9.a: Niech, zgodnie z założeniem: (i) B jest zbiorem przeliczalnym oraz (ii) $A \subset B$ i $A \neq B$ (dla $A = B$ twierdzenie to jest oczywiste). Ponieważ dowolny zbiór może być skończony albo nieskończony **{D4}**, a w sytuacji, gdy zbiór A lub zbiór B jest zbiorem skończonym, widać, że twierdzenie to jest spełnione, więc pozostaje rozważyć przypadek, gdy 1.1 zbiory A oraz B są nieskończone. Ponieważ B jest zbiorem przeliczalnym, więc 1.2 istnieje ciąg nieskończony f taki, że $(i \in \mathcal{N}): f(0) = b_0, f(1) = b_1, \dots, f(i) = b_i \dots$ **{T8: (i)}**. Wobec tego 1.3 istnieje także ciąg g , którego zapasem jest zbiór A taki, że $(i \in \mathcal{N}): g(0) = a_0, g(1) = a_1, \dots, g(i) = a_i \dots$. By ułożyć elementy zbioru A w ciąg nieskończony g , wystarczy wybrać z ciągu $b_0, b_1, \dots, b_i, \dots$ te tylko wyrazy, które są identyczne z którymś elementem zbioru A i nie zmieniając ich uporządkowania, utworzyć z nich ciąg $a_0, a_1, \dots, a_i, \dots$, przy czym $g(0) = a_0$ jest takim elementem zbioru A , który w ciągu $b_0, b_1, \dots, b_i, \dots$ poprzedza wszystkie inne wyrazy tego ciągu będące elementami zbioru A , następny wyraz, tj. $g(1) = a_1$ to element zbioru A , który w ciągu f jest, uwzględniając tylko elementy zbioru A , poprzedzony tylko przez wyraz a_1 itd. (można także powiedzieć, że ciąg $a_0, a_1, \dots, a_i, \dots$ jest funkcją częściową g – rozumianą zgodnie z ****RIV.2: D15.3** – taką, że $g = f^1|_A$, tj. funkcją częściową funkcji f^1 ograniczonej do A). Wobec 1.3 i **T8** twierdzenie to jest spełnione także w sytuacji, gdy A i B są nieskończone, o ile – zgodnie z (i) – zbiór B jest przeliczalny.

D o w ó d T9.b: Ponieważ w sytuacji, gdy któryś z danych zbiorów jest pusty, twierdzenie jest oczywiste, więc pozostaje zbadać przypadek, gdy 1.1 oba zbiory są niepuste oraz – zgodnie z założeniem – oba są przeliczalne. W myśl **T8: 1.2** istnieje wtedy ciąg nieskończony $a_0, a_1, \dots, a_i, \dots$, którego zapasem jest zbiór A oraz istnieje ciąg nieskończony $b_0, b_1, \dots, b_i, \dots$, którego zapasem jest zbiór B . Elementy sumy $A \cup B$ można więc ułożyć w ciąg $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_i, b_i, \dots$; suma ta jest więc przeliczalna.

D o w ó d T9.c: Twierdzenie to wynika z **T9.b** (jest uogólnieniem na $n \in \mathcal{N}$ zbiorów).

D o w ó d T9.d: W dowodzie tego twierdzenia trzeba skorzystać z aksjomatu wyboru i tzw. metody przekątnej (in. – przekątniowej). Zgodnie z założeniem każdy ze zbiorów $A_0, A_1, \dots, A_i, \dots, i \in \mathcal{N}$ jest przeliczalny, dla każdego z nich istnieje więc zbiór ciągów nieskończonych, których zbiorem wyrazów jest zbiór A_i . Korzystając z **A1**, z każdego z tych zbiorów ciągów wybiera się dla kolejnych zbiorów A_i jeden ciąg i układa wybrane ciągi w następujący układ ciągów nieskończonych (nazywany także ciągiem podwójnie nieskończonym).

$$\begin{aligned} A_0: & a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{03}, \dots \\ A_1: & a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots \\ A_2: & a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots \\ A_3: & a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

Kolejne wyrazy ciągu, którego wyrazami są elementy sumy $\cup A_i, i = 0, \dots, \infty$, można ustawić w ciąg nieskończony według kolejnych przekątnych uzyskanego układu: pierwsza przekątna zawiera tylko element a_{00} , druga elementy a_{01} i a_{10} , trzecia: a_{02}, a_{11}, a_{20} itd. Uzyskuje się w ten sposób ciąg nieskończony: $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{02}, a_{11}, a_{20}, a_{03}, a_{12}, \dots$, którego wyrazami są wszystkie elementy sumy $\cup A_i, i = 0, \dots, \infty$. Suma ta jest zatem przeliczalna.

D o w ó d T9.e: Dowód tego twierdzenia jest oparty na następującym lemacie:

L4 $(\mathcal{N} \times \mathcal{N}) \sim \mathcal{N}$.

D o w ó d L4: W dowodzie tego lematu można zdefiniować funkcję odwzorowującą wzajemnie jednoznacznie iloczyn kartezyjański $(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ na zbiór liczb naturalnych \mathcal{N} , istnienie takiej funkcji daje bowiem – zgodnie z **D1** – podstawę do ogłoszenia, że $(\mathcal{N} \times \mathcal{N}) \sim \mathcal{N}^{12}$. Dowód można jednak

¹² Funkcja taka jest zdefiniowana np. w K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości. Wraz ze wstępem...*, dz. cyt., s. 107.

oprzec także na bardziej obrazowej konstrukcji ciągu nieskończonego wyczerpującego elementy zbioru $(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$. Elementy tego zbioru można mianowicie ułożyć w układ podwójnie nieskończony (*):

$\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \dots$
 $\langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \dots$
 $\langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\langle i, 0 \rangle, \langle i, 1 \rangle, \langle i, 2 \rangle, \langle i, 3 \rangle, \dots$
 $\dots\dots\dots$

A następnie, stosując metodę przekątniową, utworzyć ciąg nieskończony według kolejnych przekątnych układu (*), tj.:

(**) $\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \dots$

Skonstruowanie (istnienie) ciągu (**) świadczy o tym, że zbiór $(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ jest przeliczalny {T8}, a ponieważ jest zbiorem nieskończonym, więc $(\mathcal{N} \times \mathcal{N}) \sim \mathcal{N}$ {D7, D6} – co kończy dowód L4.

Wracając do dowodu T9.e, można stwierdzić, że: Jeśli A i B są zbiorami przeliczalnymi i co najmniej jeden z nich jest skończony, to zbiór $(A \times B)$ jest równoliczny z podzbiorem $(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$, a więc z podzbiorem przeliczalnego zbioru \mathcal{N} , czyli jest – w myśl T9.a – zbiorem przeliczalnym. Jeśli natomiast zbiory A i B są przeliczalne i nieskończone, to – zgodnie z D7, D6.a i T3.a – $A \sim \mathcal{N}$, $B \sim \mathcal{N}$, czyli $(A \times B) \sim (\mathcal{N} \times \mathcal{N})$, a jako że $(\mathcal{N} \times \mathcal{N}) \sim \mathcal{N}$ {L4}, więc $(A \times B) \sim \mathcal{N}$, co znaczy, że iloczyn ten jest przeliczalny. ■

Wnioskami z tych twierdzeń oraz definicji zbioru przeliczalnego są:

- W6. a** Suma zbioru skończonego i przeliczalnego jest przeliczalna;
- b** Suma przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

Wniosek **a** wynika z D7 i T9.b, a wniosek **b** jest konsekwencją D7 oraz T9.c i T9.d.

Dotychczasowe ustalenia dotyczące kategorii zbiorów skończonych i nieskończonych oraz przeliczalnych i nieprzeliczalnych warto krótko podsumować. Mianowicie każdy zbiór skończony, także pusty, jest przeliczalny w sensie D7; warunek – widoczny w T8 – „istnieje ciąg nieskończony, którego zapasem (zbiorem wyrazów) jest A ” wyróżnia wszystkie zbiory przeliczalne z wyjątkiem zbioru pustego; a warunek – zapisany w T7 – „istnieje taki ciąg nieskończony o wyrazach niepowtarzających się, że $\{a_0, a_1, a_2, \dots\} = A$ ” wyróżnia zbiory przeliczalne równoliczne ze zbiorem \mathcal{N} .

Ogólnie można więc powiedzieć, że zbiory nieskończone dzielą się na przeliczalne i nieprzeliczalne, a pośród przeliczalnych są zbiór pusty, niepuste zbiory skończone oraz nieskończone zbiory równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych, czyli – mówiąc bardzo swobodnie – zbiory o liczbie elementów takiej, że nie ma czego liczyć; zbiory, których elementy da się policzyć w skończonym czasie; oraz – które trzeba by liczyć w nieskończoność.

Kategoria zbiorów nieskończonych nieprzeliczalnych jest reprezentowana przez zbiór liczb rzeczywistych \mathcal{R} . Zgodnie z przypomnianymi wyżej umowami moc tego zbioru, zwana mocą continuum, jest oznaczana przez c , a więc każdy zbiór równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych jest mocy continuum: $|A| = c \Leftrightarrow A \sim \mathcal{R}$ (**D6**). Ponieważ nie ma wątpliwości co do tego, że zbiór \mathcal{R} nie jest skończony, więc by stwierdzić, że jest nieprzeliczalny, wystarczy – w myśl **D7** – okazać, że jego moc jest różna od mocy zbioru liczb naturalnych, a więc że:

T10 $c \neq \aleph_0$.

D o w ó d:

Da się okazać, że przypuszczenie

1. $c = \aleph_0$ {zdn.}

prowadzi do sprzeczności. Gdyby obie te liczby kardynalne były równe, to – zgodnie z **T7** –

2. Istnieje nieskończony ciąg $\{x_1, x_2, \dots, x_p, \dots\}$ o niepowtarzających się wyrazach taki, że każda liczba rzeczywista jest wyrazem tego ciągu, tj. $\{x_1, x_2, \dots, x_p, \dots\} = \mathcal{R}$.

Ponieważ – co wiadomo z teorii liczb rzeczywistych – każda liczba rzeczywista ma dokładnie jedno rozwinięcie właściwe na ułamek dziesiętny nieskończony (właściwe, tj. takie, w którym począwszy od któregoś miejsca rozwinięcia nie powtarza się cyfra 9, choć, co oczywiste, może się powtarzać cyfra 0), więc:

3. kolejne wyrazy ciągu $\{x_1, x_2, \dots, x_p, \dots\}$ da się przedstawić w postaci nieskończonego układu (*) następujących nieskończonych ciągów:

$$\begin{aligned}
 (*) \quad x_1: & c_1, y_{11}, y_{12}, y_{13}, \dots \\
 x_2: & c_2, y_{21}, y_{22}, y_{23}, \dots \\
 x_3: & c_3, y_{31}, y_{32}, y_{33}, \dots \\
 & \dots\dots\dots \\
 x_j: & c_j, y_{j1}, y_{j2}, y_{j3}, \dots \\
 & \dots\dots\dots,
 \end{aligned}$$

przy czym w reprezentującym liczbę rzeczywistą x_j ciągu c_j to część całkowita, a $y_{j1}, y_{j2}, y_{j3}, \dots$ to kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby x_j .

Da się określić liczbę x taką, która jest liczbą rzeczywistą, a więc należy do ciągu $\{x_1, x_2, \dots, x_p, \dots\}$, a jednocześnie jest różna od każdej z liczb układu (*), czyli nie należy do ciągu $\{x_1, x_2, \dots, x_p, \dots\}$.

4. Niech: $x: 0, d_1, d_2, d_3, \dots$,

a przy tym dla każdego $j \geq 1: d_j = 0$, gdy $y_{jj} \neq 0$ oraz $d_j = 1$, gdy $y_{jj} = 0$ {def.}.

Rzeczywiście, jest widoczne w kontekście definicji liczby x oraz przyjętego w 3. sposobu reprezentowania liczb rzeczywistych, że x jest liczbą rzeczywistą, a więc jest elementem ciągu nieskończonego $\{x_1, x_2, \dots, x_p, \dots\}$, o którym mowa w 2, a jednocześnie liczba ta jest zdefiniowana tak, że różni się od każdej z liczb reprezentowanych w układzie (*), czyli nie jest elementem ciągu $\{x_1, x_2, \dots, x_p, \dots\}$. Źródłem tej sprzeczności jest twierdzenie o istnieniu nieskończonego ciągu $\{x_1, x_2, \dots, x_p, \dots\}$ o niepowtarzających się wyrazach takiego, że $\{x_1, x_2, \dots, x_p, \dots\} = \mathcal{R}$, twierdzenie uzyskane z założenia 1. ■

Jest zatem oczywisty {D7, T10} wniosek, że:

W7.a Zbiór liczb rzeczywistych \mathcal{R} jest nieskończonym zbiorem nieprzeliczalnym.

Do nieskończonych zbiorów nieprzeliczalnych należy także ogół (zbiór wszystkich) ciągów nieskończonych o wyrazach czerpanych ze zbioru liczb naturalnych \mathcal{N} .

T11 Zbiór C wszystkich nieskończonych ciągów liczb naturalnych jest nieprzeliczalny.

Dowód:

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do dowodu T10. Założenie

1. zbiór C jest przeliczalny {zdn.},

znaczy, że C jest zbiorem skończonym lub $|C| = \aleph_0$ {D7}. Ponieważ nie jest możliwe, by C był zbiorem skończonym – na przykład zbiór wszystkich ciągów takich, że jedynym powtarzającym się wyrazem kolejnego ciągu jest kolejna spośród liczb naturalnych byłby nieskończonym podzbiorem właściwym skończonego zbioru C – więc:

2. zbiór C jest nieskończonym zbiorem przeliczalnym, tj. $|C| = \aleph_0$.

Zgodnie z T7:

3. wszystkie elementy (ciągi) zbioru C da się ułożyć w ciąg nieskończony $\{c_1, c_2, \dots, c_j, \dots\}$, a kolejne wyrazy tego ciągu są uwzględnione w nieskończonym układzie (***) ciągów nieskończonych:

$$\begin{aligned}
 (***) \quad & c_1: n_{11}, n_{12}, n_{13}, \dots \\
 & c_2: n_{21}, n_{22}, n_{23}, \dots \\
 & c_3: n_{31}, n_{32}, n_{33}, \dots \\
 & \dots\dots\dots \\
 & c_j: n_{j1}, n_{j2}, n_{j3}, \dots \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

4. Niech ciąg nieskończony liczb naturalnych $c = \{n_1, n_2, \dots, n_j, \dots\}$ jest taki, że dla każdego $j \geq 1: n_j = n_{jj} + 1$ {def.}.

W równości tej n_{jj} jest kolejną liczbą przekątnej układu (***), tj. $n_{11}, n_{22}, n_{33}, \dots$, ponieważ jednak wyraz n_j ciągu c jest różny od n_{jj} (jest większy o 1), więc ciąg c jest różny od każdego z ciągów układu (***), czyli nie jest elementem zbioru C (który zawiera wszystkie i tylko elementy z (***)), a jednocześnie jako nieskończony ciąg liczb naturalnych jest elementem zbioru C . ■

Da się okazać, że świat różnorodnych liczb kardynalnych pozaskończonych jest nieporównanie bogatszy od ogółu liczb skończonych. Dla uwiarygodnienia tego ogólnikowego twierdzenia oraz przybliżenia skali świata liczb kardynalnych przydatne jest następujące twierdzenie, zwane twierdzeniem o przekątnej i dające podstawę wielu dowodom, w których metoda przekątniowa jest stosowana¹³.

T12 Jeżeli f jest funkcją oraz $D_1(f) \subset A, D_{II}(f) \subset \mathbf{Pot}(A)$, to zbiór $R = \{x \in D_1(f): x \notin f(x)\} \notin D_{II}(f)$.

Dowód:

Z określenia zbioru R wynika, że

1. $(\forall x \in D_1(f) [x \in R \Leftrightarrow x \notin f(x)])$.

Przypuszczenie, że 2. $R \in D_{II}(f)$ {zdn.}, tj. że 3. $(\forall x \in D_1(f) [f(x) = R])$ prowadzi do sprzeczności: $x_1 \in R \wedge x_1 \notin R$ {**RZ**_≡: **OA**: 1, **OV**: 3}.

Zatem $(\forall x \in D_1(f) [f(x) \neq R])$ {**~V**: 3 \Rightarrow sprz.}. ■

Tłumacząc zapis symboliczny **T12**, można powiedzieć: jeśli dowolna funkcja f przyporządkowuje elementom zbioru A podzbiory tego zbioru, to zawsze istnieje taki podzbiór A , który nie jest wartością danej funkcji,

¹³ Dowody twierdzeń **T12–T17** oraz przykład obrazujący skalę liczb kardynalnych są wzorowane na dowodach i przykładach podanych w: K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości. Wraz ze wstępem...*, dz. cyt., s. 181–183.

nie jest elementem jej przeciwdziedziny, czyli zbioru wartości. Inaczej mówiąc, żadna funkcja f przekształcająca jakikolwiek podzbiór zbioru A (także zbiór A) w zbiór $\mathbf{Pot}(A)$ nie przekształca danego podzbioru zbioru A na zbiór $\mathbf{Pot}(A)$, a więc nawet jeśli jest tak, że $f: A \rightarrow_w \mathbf{Pot}(A)$, to nie jest tak, że $f: A \rightarrow_{\text{na}} \mathbf{Pot}(A)$.

Twierdzenie to zostanie wykorzystane do okazania, że wiele jest różnych liczb kardynalnych pozaskończonych. W sformułowanych niżej twierdzeniach i uwagach o skali liczb kardynalnych będą także odwołania do pojęć już znanych, tj. przeciwdziedziny (zbioru wartości) funkcji, zbioru potęgowego zbioru A oraz sumy rodziny zbiorów \mathbf{A} (**RIV.2: **D12.1** i **RIV.1: **D3, D6.a4**). Suma rodziny zbiorów \mathbf{A} będzie oznaczana w sposób wcześniej (i zwykle) stosowany, tj. przez $\cup \mathbf{A}$, tak jak dotychczas, tj. przez $f(A)$, będzie symbolizowany zbiór wartości funkcji f dla argumentów ze zbioru A , natomiast zbiór potęgowy zbioru A będzie w poniższych rozważaniach oznaczany również symbolem $\mathbf{P}(A)$, będącym skrótem symbolu $\mathbf{Pot}(A)$ (inne oznaczenie, tj. 2^A , utrudnia konstruowanie potrzebnych napisów), a przy tym zamiast pisać $\mathbf{P}(\mathbf{P}(A))$, będzie stosowany skrót $\mathbf{P}^2(A)$, a ogólniej: $\mathbf{P}^i(A)$.

T13 Zbiór $\mathbf{Pot}(A)$ nie jest równoliczny z żadnym podzbiorem zbioru A – także z A .

D o w ó d:

Przyppuszczenie, że 1. zbiór $\mathbf{Pot}(A)$ jest równoliczny z jakimś podzbiorem zbioru A {zdn.} jest równoważne twierdzeniu, że 2. istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna, której dziedziną jest podzbiór zbioru A , a zbiorem wartości jest rodzina $\mathbf{Pot}(A)$ {**D1**: 1} – co jest sprzeczne z twierdzeniem **T12**. ■

Kolejny wniosek jest zrozumiały w kontekście **T13** oraz wcześniejszych ustaleń co do rozumienia zbiorów nieskończonych i przeliczalnych.

W7.b (i) Zbiór $\mathbf{Pot}(\mathcal{N})$ nie jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych \mathcal{N} ;

(ii) Zbiór $\mathbf{Pot}(\mathcal{N})$ jest nieskończonym zbiorem nieprzeliczalnym.

D o w ó d:

Twierdzenie (i) jest bezpośrednią konsekwencją prawidłowości **T13**, ponieważ dotyczy ona także zbioru \mathcal{N} .

Jeśli chodzi o W7.b(ii), to wobec (i) jest oczywiste, że $|\mathbf{Pot}(\mathcal{N})| \neq |\mathcal{N}|$ {T3.a}, co znaczy, że $|\mathbf{Pot}(\mathcal{N})| \neq \aleph_0$, a ponieważ zbiór $\mathbf{Pot}(\mathcal{N})$ jest nieskończony, więc – zgodnie z D7 – jest zbiorem nieprzeliczalnym. ■

Prawidłowość T13 jest kluczowa także w dowodzie kolejnego twierdzenia.

T14 Żadne dwa spośród zbiorów ciągu $A, \mathbf{P}^1(A), \mathbf{P}^2(A), \mathbf{P}^3(A), \dots, \mathbf{P}^i(A), \dots$ nie są równoliczne.

Dowód:

Niech 1. Z_m oraz Z_n , $m < n$, są m -tym i n -tym zbiorem ciągu $A, \mathbf{P}^1(A), \mathbf{P}^2(A), \mathbf{P}^3(A), \dots, \mathbf{P}^i(A), \dots$ oraz przypuśćmy, że $Z_m \sim Z_n$ {zdn.}. Jest oczywiste, że 2. zbiór poprzedzający w tym ciągu zbiór Z_n , tj. Z_{n-1} jest równoliczny z podzbiorem właściwym P_n zbioru Z_n zawierającym wszystkie i tylko zbiory jednoelementowe utworzone z wszystkich i tylko elementów zbioru Z_{n-1} , tj. $\{x\} \in P_n \Leftrightarrow x \in Z_{n-1}$, co znaczy, że $Z_{n-1} \sim P_n$. Ponieważ $P_n \subset Z_n$, więc wobec $Z_m \sim Z_n$ {1}: 3. zbiór Z_{n-1} jest równoliczny także z podzbiorem zbioru Z_m . Analogiczne rozumowanie przeprowadzone dla zbioru poprzedzającego zbiór Z_{n-1} , tj. zbioru Z_{n-2} (w rozumowaniu tym korzysta się z 3.), następnie dla Z_{n-3} itd., prowadzi do wniosku, że 4. każdy ze zbiorów Z_i , $m < i < n$ jest równoliczny z podzbiorem zbioru Z_m . Wobec tego także zbiór Z_{m+1} jest równoliczny z podzbiorem zbioru Z_m , co jest jednak sprzeczne z T13, jako że $Z_{m+1} = \mathbf{Pot}(Z_m)$. ■

T15 Jeżeli \mathbf{A} jest rodziną zbiorów taką, że dla każdego $X \in \mathbf{A}$ istnieje zbiór $Y \in \mathbf{A}$, który nie jest równoliczny z żadnym podzbiorem zbioru X , to suma $\cup \mathbf{A}$ nie jest równoliczna z żadnym zbiorem X rodziny \mathbf{A} , ani z żadnym podzbiorem zbioru X .

Dowód:

Niech 1. $X \in \mathbf{A}$, $X_1 \subset X$ oraz $\cup \mathbf{A} \sim X_1$ {zdn.}. Wobec założonej równoliczności tych zbiorów 2. istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna f taka, że $f(\cup \mathbf{A}) = X_1$ {D1: 1}. Jednocześnie, zgodnie z założeniem dowodzonego twierdzenia: 3. istnieje zbiór $Y \in \mathbf{A}$, który nie jest równoliczny z żadnym podzbiorem zbioru X . Ponieważ $Y \subset \cup \mathbf{A}$ $\{Y \in \mathbf{A} \Rightarrow Y \subset \cup \mathbf{A}\}$, więc 4. $f(Y) \subset f(\cup \mathbf{A})$ {**RIV.2: T12: $Y \subset \cup \mathbf{A}$ }. Jako że funkcja $f_{|Y}$, tj. funkcja f ograniczona do zbioru Y , jest wzajemnie jednoznaczna, więc 5. $Y \sim f(Y)$ {D1}. Ponieważ jednocześnie $f(Y) \subset f(\cup \mathbf{A}) = X_1$ {4, 2}, a $X_1 \subset X$ {1}, więc 6. $f(Y) \subset X$ {**RIV.1: T3}. Koniunkcja $5 \wedge 6$ jest jednak sprzeczna z 3. ■

Twierdzenia **T14** i **T15** dają podstawę dla skonstruowania przykładu ilustrującego skalę liczb kardynalnych. Jak wiemy, mocą zbioru liczb naturalnych \mathcal{N} jest \aleph_0 (**D6.a**). Na podstawie **T14** można uznać, że w ciągu nieskończonym

$$(i) \quad \mathcal{N}, \mathbf{P}^1(\mathcal{N}), \mathbf{P}^2(\mathcal{N}), \mathbf{P}^3(\mathcal{N}), \dots, \mathbf{P}^i(\mathcal{N}), \dots$$

żadne dwa zbiory nie są równoliczne, co znaczy, że jest nieskończenie wiele liczb kardynalnych będących mocami kolejnych zbiorów ciągu (i). Uzyskany w ten sposób nieskończony ciąg liczb kardynalnych $\aleph_0 = |\mathcal{N}|, |\mathbf{P}^1(\mathcal{N})|, |\mathbf{P}^2(\mathcal{N})|, \dots$ jest nazywany skalą potęgową.

Ponieważ rodzina \mathbf{A} , której elementami są wszystkie zbiory ciągu (i), spełnia – zgodnie z **T14** – warunek, że dla każdego zbioru X będącego jej elementem istnieje inny zbiór tej rodziny, który nie jest równoliczny z żadnym podzbiorem X , więc – w myśl **T15** – suma $\cup \mathbf{A}$ nie jest różniczna z każdym (nie jest równoliczna z żadnym) zbiorem ciągu (i) i dowolnym podzbiorem danego zbioru. Wychodząc od tej sumy, można utworzyć nieskończony ciąg zbiorów:

$$(ii) \quad \cup \mathbf{A}, \mathbf{P}^1(\cup \mathbf{A}), \mathbf{P}^2(\cup \mathbf{A}), \mathbf{P}^3(\cup \mathbf{A}), \dots, \mathbf{P}^i(\cup \mathbf{A}), \dots,$$

w którym moc wyjściowego zbioru $\cup \mathbf{A}$ jest różna od mocy każdego ze zbiorów ciągu (i) oraz – ponownie w myśl **T14** – dowolne dwa zbiory w ciągu (ii) są różnej mocy, a wobec tego każdy ma moc różną od każdego zbioru ciągu (i). Moce zbiorów ciągu (ii) tworzą więc nieskończony ciąg liczb kardynalnych pozaskończonych, którego każdy element jest różny od każdej liczby nieskończonego ciągu liczb wyznaczonego przez ciąg zbiorów (i).

Można z kolei utworzyć rodzinę \mathbf{B} wszystkich zbiorów ciągów (i) oraz (ii), a także, analogiczny do ciągów (i) i (ii), ciąg zbiorów:

$$(iii) \quad \cup \mathbf{B}, \mathbf{P}^1(\cup \mathbf{B}), \mathbf{P}^2(\cup \mathbf{B}), \mathbf{P}^3(\cup \mathbf{B}), \dots, \mathbf{P}^i(\cup \mathbf{B}), \dots$$

który określa nowy niekończony ciąg liczb kardynalnych pozaskończonych; itd. – w nieskończoność.

Z obrazem naszkicowanym powyższą konstrukcją jest zgodne kolejne twierdzenie, ukazujące od innej strony niewyobraźną skalę świata liczb kardynalnych.

T16 Nie istnieje rodzina zbiorów \mathbf{U} , która dla każdego zbioru X zawiera jako swój element zbiór Y równoliczny z X .

Dowód:

Przypuśćmy, że

1. istnieje rodzina \mathbf{U} taka, że dla dowolnego zbioru X istnieje zbiór Y : $Y \in \mathbf{U}$ oraz $Y \sim X$ {zdn.}.

Niech $X = \mathbf{Pot}(\mathbf{UU})$ {def.}, a wtedy

2. istnieje zbiór $Y_1 \in \mathbf{U}$, taki że $Y_1 \sim \mathbf{Pot}(\mathbf{UU})$ {def., 1}.

Z **T13** wiadomo jednak, że

3. zbiór $\mathbf{Pot}(\mathbf{UU})$ nie jest równoliczny z żadnym podzbiorem zbioru \mathbf{UU} .

Ponieważ $Y_1 \subset \mathbf{UU}$ $\{Y_1 \in \mathbf{U} \Rightarrow Y_1 \subset \mathbf{UU}\}$, więc trzeba uznać, że $X = \mathbf{Pot}(\mathbf{UU})$ nie jest równoliczny również z Y_1 , co sprzeczne z 2. ■

Interpretując **T16** w kontekście konstrukcji ukazującej bogactwo świata liczb kardynalnych, można powiedzieć, że różnorodnych liczb kardynalnych jest tak wiele, że nie da się utworzyć nawet zbioru, który zawierałby tylko po jednym zbiorze każdej mocy, czyli takiego, w którym każda liczba kardynalna byłaby reprezentowana przez moc jednego tylko zbioru.

T17 Nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.

Dowód:

Gdyby zbiór taki istniał, to istniałaby także rodzina \mathbf{U} zbiorów, o której z **T16** wiemy, że istnieć nie może. ■

Twierdzenie **T17** potwierdza, podkreślaną w tych rozważaniach, konieczność relatywizowania uniwersum do kontekstu analiz oraz ujawnia, dlaczego wszystkie twierdzenia zakładające istnienie takiego niezrelatywizowanego do rozważań zbioru uniwersalnego prowadzą do sprzeczności.

3.3 Relacje w zbiorze liczb kardynalnych

W analizach tego paragrafu zostaną uwzględnione najpierw szczególnego rodzaju relacje w zbiorze liczb kardynalnych, tj. działania na liczbach kardynalnych, a następnie nierówności między liczbami kardynalnymi.

3.3.1 Równości (działania na liczbach kardynalnych)

Działania rozumiane wąsko to funkcje dwuargumentowe, których argumenty i wartości należą do danego zbioru. Zostaną określone działania dodawania, mnożenia i potęgowania w zbiorze liczb kardynalnych, a przy tym zostanie zachowana symbolika i terminologia znana z arytmetyki liczb naturalnych i rzeczywistych.

D8.a Liczba kardynalna m jest sumą liczb n_1 i n_2 , tj. $m = n_1 + n_2$ wtedy i tylko, gdy $(\forall A, B) [\|A\| = n_1 \wedge \|B\| = n_2 \wedge (A \cap B) = \emptyset \wedge m = \|A \cup B\|]$.

Liczba kardynalna m , o której mowa w **D8** na pewno istnieje, suma $A \cup B$ jest bowiem zbiorem o określonej mocy, a nadto można okazać, że jest określona jednoznacznie.

W8 Istnieje dokładnie jedna liczba kardynalna będąca sumą dowolnych dwóch liczb kardynalnych.

Dowód: W dowodzie **W8** przydatne jest następujące twierdzenie pomocnicze:

L5 Jeżeli $A \sim B$ i $A_1 \sim B_1$ oraz $(A \cap A_1) = (B \cap B_1) = \emptyset$, to $(A \cup A_1) \sim (B \cup B_1)$.

Dowód **L5**:

Jeśli – zgodnie z założeniem tego lematu rozwiniętym według **D1** – funkcja f odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie zbiór A na B , tj. $f: A \rightarrow_{\text{na}} B$, a jedno-jednoznaczna funkcja $g: A_1 \rightarrow_{\text{na}} B_1$ oraz iloczyny $D_I(f) = A$ i $D_I(g) = A_1$ i $D_{II}(f) = B$ i $D_{II}(g) = B_1$ są puste, to – w myśl ****RIV.2: T17** – relacja $f \cup g$ odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie $(A \cup A_1) = D_I(f \cup g)$ na sumę $(B \cup B_1) = D_{II}(f \cup g)$, co znaczy, że $(A \cup A_1) \sim (B \cup B_1)$ **{D1}**.

Korzystając z tego lematu, można stwierdzić, że: jeśli 1. $\|A_1\|, \|A_2\| = n_1$, $\|B_1\|, \|B_2\| = n_2$ i $(A_1 \cap B_1) = (A_2 \cap B_2) = \emptyset$ oraz $m_1 = \|A_1 \cup B_1\|$ i $m_2 = \|A_2 \cup B_2\|$, to – zgodnie z **T3.a** – 2. $A_1 \sim A_2$ i $B_1 \sim B_2$ oraz – na podstawie $(A_1 \cap B_1) = (A_2 \cap B_2) = \emptyset$ i **L5** – 3. $(A_1 \cup B_1) \sim (A_2 \cup B_2)$, czyli $m_1 = m_2$ **{T3.a: 3}**. ■

Definicję sumy można więc zapisać w postaci prostszej:

D8.b Jeżeli $(A \cap B) = \emptyset$, to $\|A\| + \|B\| = \|A \cup B\|$.

Zgodnie z **D8.a** dla ustalenia sumy liczb kardynalnych n_1 oraz n_2 wystarczy określić dwa zbiory rozłączne o mocy n_1 i n_2 oraz wyznaczyć moc ich sumy. Da się jednak udowodnić następujące twierdzenie.

T18 $m = n_1 + n_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\exists A, B) [\|A\| = n_1 \wedge \|B\| = n_2 \wedge (A \cap B) = \emptyset \Rightarrow m = \|A \cup B\|]$.

Dowód:

□ Założenie 1. $m = n_1 + n_2$ jest – zgodnie z **D8.a** – równoważne twierdzeniu 2. $(\exists A, B) [\|A\| = n_1 \wedge \|B\| = n_2 \wedge (A \cap B) = \emptyset \wedge m = \|A \cup B\|]$,

które daje podstawę np. takiej konkretyzacji:

$$3. |A_1| = n_1 \wedge |B_1| = n_2 \wedge (A_1 \cap B_1) = \emptyset \wedge m = |A_1 \cup B_1| \{\mathbf{OV}: 2\}.$$

Jeśli dla zbiorów A i B przypuści się, że

$$1.1 |A| = n_1 \wedge |B| = n_2 \wedge (A \cap B) = \emptyset \{\text{zd.}\}, \text{ to można uznać kolejno:}$$

$$1.2 A_1 \sim A \text{ i } B_1 \sim B \quad \{\mathbf{T3.a}: 2, 1.1\};$$

$$1.3 (A_1 \cup B_1) \sim (A \cup B) \quad \{\mathbf{L5}: 1.2, 3, 1.1\};$$

$$1.4 m = |A \cup B| \quad \{\mathbf{T3.a}: 1.3, 3\}.$$

Ponieważ założenie 1.1 dotyczy dowolnych zbiorów, więc $1.1 \Rightarrow 1.4$ można uogólnić, co kończy dowód implikacji prostej.

□ Skoro, zgodnie z **T3.c**, istnieje dla dowolnego zbioru liczba kardynalna będąca jego mocą, to do założenia

$$1. (\wedge A, B) [(|A| = n_1 \wedge |B| = n_2 \wedge (A \cap B) = \emptyset) \Rightarrow m = |A \cup B|],$$

można dołączyć koniunkcję:

$$2. |A_1| = n_1 \wedge |B_1| = n_2.$$

Zastosowanie do tej koniunkcji twierdzeń **L3.b-c** i **T3.a** daje podstawę do uznania, że np.:

$$3. |A_1 \times \{0\}| = n_1 \wedge |B_1 \times \{1\}| = n_2, \text{ a przy tym } (A_1 \times \{0\}) \cap (B_1 \times \{1\}) = \emptyset.$$

Wobec tego

$$4. m = |(A_1 \times \{0\}) \cup (B_1 \times \{1\})| \quad \{\mathbf{RO}: \mathbf{O\Lambda}: 1, 3\},$$

co po dołączeniu kwantyfikatora szczegółowego do koniunkcji 3 \wedge 4 prowadzi do wzoru:

$$5. (\vee A, B) [|A| = n_1 \wedge |B| = n_2 \wedge (A \cap B) = \emptyset \wedge m = |A \cup B|],$$

który – w myśl **D8.a** – jest równoważny równości: $m = n_1 + n_2$. ■

Równoważność zapisana w **T18** może być zatem traktowana jako inna niż **D8.a** definicja sumy liczb kardynalnych¹⁴.

Dla dodawania liczb kardynalnych są spełnione prawa przemienności i łączności:

T19. Dla dowolnych liczb kardynalnych n_1, n_2, n_3 :

$$\mathbf{a} \quad n_1 + n_2 = n_2 + n_1;$$

$$\mathbf{b} \quad (n_1 + n_2) + n_3 = n_1 + (n_2 + n_3).$$

Dowód:

D o w ó d T19.a: Jeśli $|A| = n_1 + n_2$, to, zgodnie z **D8.a** istnieją zbiory A_1 i A_2 takie, że $|A_1| = n_1, |A_2| = n_2, (A_1 \cap A_2) = \emptyset$ i $|A| = |A_1 \cup A_2|$. Ponieważ

¹⁴ Określenie takie jest przyjęte np. w: K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości. Wraz ze wstępem...*, dz. cyt., s. 184.

$A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1$, więc $\|A\| = n_2 + n_1$. Analogicznie, na podstawie równości $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, dowodzi się T19b. ■

Prawdziwe są następujące równości:

- T20. a** Dla dowolnej liczby kardynalnej m : $m + 0 = m$;
b Dla dowolnego $n \in \mathcal{N}$: $n + \aleph_0 = \aleph_0$;
c $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Dowód:

W dowodach tych twierdzeń opartych na **D8.a** wystarczy podać przykład dwóch zbiorów rozłącznych o mocach równych składnikom sumy po lewej stronie dowodzonej równości i okazać, że suma tych zbiorów ma moc równą liczbie kardynalnej po prawej stronie równości.

W dowodzie T20.a wystarczy przypomnieć, że 0 jest mocą zbioru pustego, że dowolny zbiór A o mocy m jest rozłączny ze zbiorem \emptyset oraz że $(A \cup \emptyset) = A$.

W dowodzie twierdzenia 20.b: niech A będzie zbiorem początkowych n -liczb zbioru \mathcal{N} , a B zbiorem pozostałych liczb tego zbioru; zbiory tak określone są rozłączne, ich suma jest identyczna z \mathcal{N} , $\|A\| = n$ i $\|B\| = \aleph_0$ {**W5.b.i**}, więc $\|A \cup B\| = \aleph_0$.

W dowodzie T20.c: jeśli A jest zbiorem liczb naturalnych parzystych, a B zbiorem liczb naturalnych nieparzystych, to również są spełnione warunki wymagane do ogłoszenia, że $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, mianowicie zbiory te są rozłączne, ich suma jest identyczna ze zbiorem \mathcal{N} oraz mocą każdego z tych zbiorów jest \aleph_0 {**W5.b.iii i iv**}.

W dowodach twierdzeń T20.b i T20.c można także powołać się na definicję zbioru przeliczalnego {**D7**} i prawidłowości dotyczące zachowywania przeliczalności zbiorów (**T9 i W6.a**): T20.b jest bezpośrednim wnioskiem z **W6.a**, a T20.c – z **T9.b** (przeliczalna suma, o której mowa w tym wniosku i w tym twierdzeniu, nie może być zbiorem skończonym, skoro liczba kardynalna \aleph_0 jest mocą każdego zbioru równolicznego z nieskończonym zbiorem \mathcal{N}). ■

Warto podkreślić, że o ile **T20.a** jest spełnione dla dowolnych liczb kardynalnych, co znaczy, że liczba 0 jest modulem dodawania także w zbiorze liczb naturalnych, to **T20.b** i **T20.c** nie mają swoich odpowiedników w arytmetyce liczb naturalnych. Z **T20.b** i **T20.c** wynikają bowiem równości:

$$\mathbf{W9} \quad \aleph_0 = 1 + \aleph_0 = 2 + \aleph_0 = 3 + \aleph_0 = \dots + \aleph_0 \dots = \aleph_0 + \aleph_0,$$

świadczące o tym, że jednoznacznie określone działanie odwrotne do dodawania jest ograniczone tylko do liczb kardynalnych skończonych.

Definicje kolejnych działań na liczbach kardynalnych, tj. mnożenia i potęgowania, zostaną podane tylko w postaci skróconej, analogicznej do definicji sumy w **D8.b**.

$$\mathbf{D9} \quad |A| \cdot |B| = |A \times B|.$$

Iloczyn mocy dowolnych zbiorów jest więc równy mocy ich iloczynu kartezjańskiego. Dłuższe jest odczytanie tej definicji w terminologii liczb kardynalnych: iloczyn dowolnych liczb kardynalnych jest równy liczbie kardynalnej będącej mocą iloczynu kartezjańskiego zbiorów, których moce są mnożonymi liczbami kardynalnymi.

Mnożenie liczb kardynalnych spełnia prawa przemienności i łączności oraz rozdzielności względem dodawania:

T21. Dla dowolnych liczb kardynalnych n_1, n_2, n_3 :

- a** $n_1 \cdot n_2 = n_2 \cdot n_1$;
- b** $(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)$;
- c** $(n_1 + n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot n_3 + n_2 \cdot n_3$.

Dowód:

Niech $n_1 = |A|$, $n_2 = |B|$, $n_3 = |C|$.

Dowód T21.a: Korzystając z tej umowy i kolejno z **D9**, **L3.a** i **T3.a** oraz ponownie z **D9**, można uznać następujące równości:

$$n_1 \cdot n_2 = |A| \cdot |B| = |A \times B| = |B \times A| = |B| \cdot |A| = n_2 \cdot n_1;$$

Dowód T21.b: Podstawowe dla dowodu są **D9** oraz równość **T1.4**:

$$(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = (|A| \cdot |B|) \cdot |C| = |A \times B| \cdot |C| = |(A \times B) \times C| = |A \times (B \times C)| = |A| \cdot |B \times C| = |A| \cdot (|B| \cdot |C|) = n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3);$$

Dowód T21.c: W dowodzie trzeba założyć (na co pozwala **L3.d**), że $(A \cap B) = \emptyset$, a wtedy także (zgodnie z **RIV.2: T3.a**) $(A \times C) \cap (B \times C) = \emptyset$. Odwołanie do definicji sumy i mnożenia liczb kardynalnych (**D8.b**, **D9**) oraz równości $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ {**T1.1**} daje wtedy podstawę do stwierdzenia, że:

$$\begin{aligned} (n_1 + n_2) \cdot n_3 &= (|A| + |B|) \cdot |C| = |A \cup B| \cdot |C| = |(A \cup B) \times C| = \\ &= |(A \times C) \cup (B \times C)| = |A \times C| + |B \times C| = |A| \cdot |C| + |B| \cdot |C| = \\ &= n_1 \cdot n_3 + n_2 \cdot n_3. \blacksquare \end{aligned}$$

Bardziej interesujące są kolejne twierdzenia – zwłaszcza gdy sformułowane w języku naturalnym, w którym łatwiej dostrzec, że nie wszystkie prawidłowości dotyczące mnożenia liczb naturalnych są tu spełnione.

- T22. a** Dla dowolnej liczby kardynalnej m : $m \cdot 0 = 0$ oraz $m \cdot 1 = m$;
b dla dowolnej liczby kardynalnej m i dowolnej liczby naturalnej n różnej od zera: $m \cdot n = m + \dots + m$ (n składników sumy);
c dla dowolnej liczby naturalnej n różnej od zera: $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$;
d $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Dowód:

Niech w poniższych wnioskowaniach $m = |A|$, $n = |B|$ i $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.
Dowód T22.a: Dowód jest oparty na **D9**, a ponadto na $(A \times \emptyset) = \emptyset$ {**RIV.2: **T2.a**} i $|\emptyset| = 0$ w przypadku równości $m \cdot 0 = 0$ oraz na $A \sim (A \times \{x\})$ – dla równości okazującej, że 1 jest modulem mnożenia: $m \cdot 0 = |A| \cdot 0 = |A \times \emptyset| = |\emptyset| = 0$; $m \cdot 1 = |A| \cdot 1 = |A \times \{x\}| = |A| = m$.

Dowód T22.b: Oprócz przyjętych umów i definicji iloczynu liczb kardynalnych (**D9**) trzeba w dowodzie skorzystać najpierw z **RIV.2: **T1.1** i **RIV.2: **T2.b**, uzyskując kolejno:

$$m \cdot n = |A| \cdot |B| = |A| \cdot |\{b_1\} \cup \{b_2\} \cup \dots \cup \{b_n\}| = |(A \times (\{b_1\} \cup \{b_2\} \cup \dots \cup \{b_n\}))| = |A \times \{b_1\} \cup A \times \{b_2\} \cup \dots \cup A \times \{b_n\}|.$$

Ponieważ składniki sumy $(A \times \{b_1\} \cup A \times \{b_2\} \cup \dots \cup A \times \{b_n\})$ są parami rozłączne, więc – zgodnie z **D8.b**: $|A \times \{b_1\} \cup A \times \{b_2\} \cup \dots \cup A \times \{b_n\}| = |A \times \{b_1\}| + |A \times \{b_2\}| + \dots + |A \times \{b_n\}|$, co z kolei – na podstawie **L3.b** – daje podstawę do uznania, że $|A \times \{b_1\}| + |A \times \{b_2\}| + \dots + |A \times \{b_n\}| = |A| + \dots + |A| = m + \dots + m$ (n składników sumy).

Dowód T22.c: Obok definicji mnożenia (**D9**) są w dowodzie odwołania do **RIV.2: **T2.b**, **L3.b**:

$$\aleph_0 \cdot n = |\mathcal{N}| \cdot |B| = |\mathcal{N} \times B| = |\mathcal{N} \times (\{b_1\} \cup \{b_2\} \cup \dots \cup \{b_n\})| = |\mathcal{N}| + \dots + |\mathcal{N}|$$

(n składników). W myśl **T22.b**, $|\mathcal{N}| + \dots + |\mathcal{N}| = |\mathcal{N}|$, a $|\mathcal{N}| = \aleph_0$ {**D6.a**}.

Dowód T22.d: W dowodzie korzysta się kolejno z **D6.a**, **D9**, **L4** i **D6.a**: $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = |\mathcal{N}| \cdot |\mathcal{N}| = |\mathcal{N} \times \mathcal{N}| = |\mathcal{N}| = \aleph_0$. ■

Ponownie warto dostrzec, że **T22.a** jest spełnione dla dowolnych liczb kardynalnych, a więc także w arytmetyce liczb naturalnych: liczba 0 jest tzw. elementem pochłaniającym, a liczba 1 jest elementem neutralnym (modulem) mnożenia w zbiorze liczb kardynalnych. Natomiast **T22.b** i **T22.c** są spełnione, tylko gdy czynnik (mnożnik) n jest mocą niepustego zbioru skończonego, a **T22.d** dotyczy tylko mnożenia mocy zbiorów

równolicznych z nieskończonym zbiorem \mathcal{N} . Z **T2.c** i **T22.d** wynikają równości:

$$\aleph_0 = 1 \cdot \aleph_0 = 2 \cdot \aleph_0 = 3 \cdot \aleph_0 = \dots i \cdot \aleph_0 \dots = \aleph_0 \cdot \aleph_0.$$

W zbiorze liczb kardynalnych pozaskończonych nie ma zatem działania odwrotnego do mnożenia.

W definicji potęgowania jest użyte pojęcie klasy odwzorowań zbioru B w zbiór A , oznaczanej jako A^B (**RIV2: **D13**).

D10 $|A|^{|B|} = |A^B|.$

Jak widać, potęga o podstawie $|A|$ i wykładniku $|B|$, czyli moc zbioru $|A|$ podniesiona do potęgi równej mocy zbioru $|B|$ jest równa licznosci (mocy) zbioru wszystkich odwzorowań zbioru B w zbiór A .

T23. Dla dowolnych liczb kardynalnych m, n, t :

- a** $m^0 = 1; \quad 1^m = 1; \quad m^1 = m;$
- b** $m^{n+t} = m^n \cdot m^t;$
- c** $(m \cdot n)^t = m^t \cdot n^t;$
- d** $(m^n)^t = m^{n \cdot t}.$

Dowód:

Niech (*) $m = |A|, n = |B|, t = |C|.$

Dowód T23.a: W kontekście (*) i zgodnie z $|\emptyset| = 0$ i **D10**: $m^0 = |A^\emptyset|$, a ponieważ jedyną funkcją odwzorowującą zbiór \emptyset w dowolny inny jest zbiór \emptyset (\emptyset spełnia, choć osobiście, i definicję funkcji **RIV.2: **D10**, i warunki należenia do funkcji odwzorowujących jeden zbiór w drugi – **RIV.2: **D13**), więc $|A^\emptyset| = 1$; jako że $|\{x\}| = 1$, więc – według **D10**:

$1^m = |\{x\}^A|$, a ponieważ – zgodnie z **L3.b** – $\{x\}^A \sim \{x\}$, więc $|\{x\}^A| = 1$ {**T3**}; natomiast równość $m^1 = m$, tj. $|A|^{|\{x\}|} = |A^{\{x\}}| = |A|$ uzyskuje się, korzystając z: $A \sim A^{\{x\}}$ {**L3.b**} i **T3**. ■

Dowód T23.b: Na podstawie (*), założenia, że $(B \cap C) = \emptyset$ {**L3.d**} oraz **D8** i **D10** można uznać, że:

1. $m^{n+t} = |A|^{|B|+|C|} = |A|^{|B \cup C|} = |A^{B \cup C}|.$

Przejsie od 1. do równości $m^{n+t} = m^n \cdot m^t$ jest prostsze, gdy skorzysta się z następującej prawidłowości dotyczących równoliczności dowolnych zbiorów:

L6 $A^{B \cup C} \sim (A^B \times A^C).$

Dowód L6. Ponieważ $A^{B \cup C}, A^B$ i A^C to rodziny funkcji przekształcających, odpowiednio, sumę $B \cup C$ w zbiór A , zbiór B w A i zbiór C w A {**RIV.2:

D13}, więc jeśli $f \in A^{B \cup C}$, to ograniczenia tej funkcji (**RIV.2: **D4**) do zbiorów A oraz B , tj. funkcje częściowe (**RIV.2: **D15.3**) są elementami A^B i A^C : $f|_B \in A^B$ i $f|_C \in A^C$. Da się okazać, że funkcja F przyporządkowująca każdej funkcji $f \in A^{B \cup C}$ parę jej funkcji częściowych ustala równoliczność zbiorów $A^{B \cup C}$ oraz $(A^B \times A^C)$ – w zapisie symbolicznym:

$$1. D_1(F) = A^{B \cup C}, D_{II}(F) = (A^B \times A^C) \text{ oraz } F(f) = \langle f|_B, f|_C \rangle.$$

By uznać, że F jest funkcją wzajemnie jednoznaczną, wystarczy – zgodnie z **RIV.2: **T15.1** – okazać, że wartości funkcji F dla różnych argumentów, tj. funkcji z $A^{B \cup C}$ są różne:

$$1.1 f, g \in A^{B \cup C} \text{ i } f \neq g \{ \text{zd.} \}.$$

Ponieważ $f \neq g$, więc w $D_1(f) = D_1(g) = (B \cup C)$ istnieje element, dla którego wartości funkcji f oraz g są różne:

$$1.2 x_1 \in (B \cup C) \wedge f(x_1) \neq g(x_1).$$

Jeśli przy tym 1.1.1 $x_1 \in B$ {zd.}, to 1.1.2 $f|_B(x_1) \neq g|_B(x_1)$, a jeśli

2.1.1 $x_1 \in C$ {zd.}, to 2.2.2 $f|_C(x_1) \neq g|_C(x_1)$. Czyli:

$$1.3 \langle f|_B, f|_C \rangle \neq \langle g|_B, g|_C \rangle \{ \text{**RIV.2:D1: } 1.1.1 \Rightarrow 1.1.2, 2.1.1 \Rightarrow 2.1.2, 1.2 \}$$

$$1.4 F(f) \neq F(g) \quad \{ \text{df } F, 1.3 \}.$$

Zatem:

$$2. F \in \mathbf{1-1} \quad \{1, \text{**RIV.2: T15.1: } 1.1 \Rightarrow 1.4 \}.$$

Wobec 1. i 2.: $A^{B \cup C} \sim_F (A^B \times A^C)$ {**D1.a**}, czyli $A^{B \cup C} \sim (A^B \times A^C)$ {**D1.b**} – co kończy dowód tego lematu.

Na podstawie **L6** można w dowodzie T23.b uznać równość:

$$2. \|A^{B \cup C}\| = \|A^B \times A^C\|, \text{ a następnie – korzystając z } \mathbf{D9} \text{ i } \mathbf{D10} \text{ i } (*):$$

$$3. \|A^B \times A^C\| = \|A^B\| \times \|A^C\| = \|A\|^{|B|} \cdot \|A\|^{|C|} = m^n \cdot m^t.$$

$$\text{Zatem: } m^{n+t} = m^n \cdot m^t \quad \{1, 2, 3\}. \blacksquare$$

D o w ó d T23.c: W kontekście (*), **D9** i **D10** są uzasadnione następujące równości:

$$1. (m \cdot n) = (\|A\| \cdot \|B\|)^{|C|} = (\|A \times B\|)^{|C|} = \|(A \times B)^C\|.$$

Można udowodnić, że zbiory odwzorowań $(A \times B)^C$ oraz $(A^C \times B^C)$ są równoliczne:

$$\mathbf{L7} \quad (A^C \times B^C) \sim (A \times B)^C.$$

D o w ó d L7: W dowodzie tego lematu trzeba zdefiniować funkcję F , która przyporządkowuje wzajemnie jednoznacznie elementy zbioru $(A^C \times B^C)$, tj. pary funkcji, z których pierwsza odwzorowuje C w A , a druga C w B , elementom zbioru $(A \times B)^C$, tj. funkcjom odwzorowującym zbiór C w iloczyn kartezjański $(A \times B)$. Niech:

- (i) $f, f' \in A^C$ oraz $g, g' \in B^C$, a wtedy $\langle f, g \rangle, \langle f', g' \rangle \in (A^C \times B^C)$.
 Funkcje h oraz h' , które elementom zbioru C przyporządkowują pary będące elementami zbioru $(A \times B)$, są określone następująco: $D_1(h) = D_1(h') = C$, $D_{II}(h) = D_{II}(h') = (A \times B)$ i dla każdego $x \in C$: $h(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$, $h'(x) = \langle f'(x), g'(x) \rangle$.
- (ii) Niech funkcja F jest taka, że: $D_1(F) = (A^C \times B^C)$, $D_{II}(F) = (A \times B)^C$ i dla dowolnych funkcji $f \in A^C$ oraz $g \in B^C$, $F(\langle f, g \rangle) = h$.

Da się okazać – w sposób analogiczny do dowodu **L6** – że F jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym, co znaczy, że:

$$(A^C \times B^C) \sim_F (A \times B)^C, \text{ czyli } (A^C \times B^C) \sim (A \times B)^C \text{ – co kończy dowód L7.}$$

Na podstawie **L7**, a następnie **D9**, **D10** i (*) można następująco kontynuować równości zapisane w 1:

$$2. \|(A \times B)^C\| = \|A^C \times B^C\| = \|A^C\| \times \|B^C\| = \|A\|^{|C|} \cdot \|B\|^{|C|} = m^t \cdot n^t$$

Zatem: $(m \cdot n)^t = m^t \cdot n^t \{1, 2\}$. ■

D o w ó d T23.d: Stosując umowę (*) oraz **D10**, można uznać:

$$1. (m^n)^t = (\|A\|^{\|B\|})^{|C|} = (\|A^B\|)^{|C|} = \|(A^B)^C\|.$$

By kontynuować te równości aż do uzyskania równości dowodzonej, wystarczy okazać, że zbiory odwzorowań $(A^B)^C$ oraz $A^{B \times C}$ są równoliczne, tj. że:

$$\mathbf{L8} \quad A^{B \times C} \sim (A^B)^C.$$

Dowód L8: W dowodzie tego lematu trzeba wskazać funkcję wzajemnie jednoznaczną, która każdej funkcji dwuargumentowej określonej na zbiorze $B \times C$, o wartościach w zbiorze A , przyporządkowuje funkcję określoną na zbiorze C , której wartościami są funkcje odwzorowujące zbiór B w zbiór A . Niech:

- (i) dla dowolnych funkcji $f, g \in A^{B \times C}$, tj. $f, g: (B \times C) \rightarrow_w A$ **{**RIV.2: D13}** są następująco określone funkcje jednoargumentowe zrelatywizowane do $z \in C$:
- (+) $f_z(y) = f(y, z)$, $g_z(y) = g(y, z)$, tj. $f_z, g_z: (B \times C) \rightarrow_w A$;
 a funkcje $f_1, g_1 \in (A^B)^C$ są określone równościami:
- (++) $f_1(z) = f_z$, $g_1(z) = g_z$, tj. $f_1, g_1: C \rightarrow_w A^B$.
- (ii) F jest taką funkcją taką, że: $D_1(F) = A^{B \times C}$, $D_{II}(F) = (A^B)^C$ oraz dla każdej funkcji $h \in A^{B \times C}$: $F(h) = h_1$, a przy tym wartość h_1 jest rozumiana zgodnie z (++), co znaczy, że:

$$1. F(f) = f_1, F(g) = g_1.$$

Na podstawie definicji przyjętych w (i) oraz (ii) da się łatwo okazać, że

$$2. \text{jeśli } f \neq g, \text{ to także } f_1 \neq g_1, \text{ czyli } F(f) \neq F(g), \text{ a więc}$$

3. $F \in \mathbf{1-1}$ {**RIV.2:T15.1: 2}.

Ponieważ funkcja F jest różnowartościowa oraz $D_I(F) = A^{B \times C}$, $D_{II}(F) = (A^B)^C$, więc można – zgodnie z **D1** – uznać, że $A^{B \times C} \sim_F (A^B)^C$, a więc $A^{B \times C} \sim (A^B)^C$.

Posiłkując się wyżej udowodnionym **L8**, można w dowodzie T23.d uznać

2. $\| (A^B)^C \| = \| A^{B \times C} \|$, a następnie – na podstawie **D10**, **D9** i (*):

3. $\| A^{B \times C} \| = \| A \|^{B \times C} = \| A \|^{B \cdot C} = m^{n \cdot i}$, co kończy dowód {1, 2, 3}¹⁵. ■

Sformułowane niżej twierdzenia ukazują kolejne ograniczenia praw znanych z działań na liczbach kardynalnych skończonych.

T24. Dla dowolnej liczby kardynalnej m oraz dowolnej liczb naturalnej n różnej od 0:

a $m^n = m \cdot \dots \cdot m$ (n czynników);

b $\aleph_0^n = \aleph_0$.

D o w ó d T24.a: Założeniem wstępnym dowodu indukcyjnego dla $n = 1, 2, \dots, i, \dots$ jest równość

1. $m^1 = m$ {**T23.a**}. Z założenia indukcyjnego

2. $m^i = m \cdot \dots \cdot m$ (i czynników), na podstawie równości $m^{i+1} = m^i \cdot m^1$ {**T23.b**} oraz $m^1 = m$ uzyskuje się równość:

$$m^{i+1} = m \cdot \dots \cdot m \text{ (} i + 1 \text{ czynników).}$$

D o w ó d T24.b: Powołując się na **T24.a**, można uznać, że

$$\aleph_0^n = \aleph_0 \cdot \dots \cdot \aleph_0 \text{ (} n \text{ czynników), a zgodnie z T22.d } \aleph_0 \cdot \dots \cdot \aleph_0 = \aleph_0. \blacksquare$$

Z twierdzenia **T24.b** wynika, że prawdziwe są równości:

W10 $\aleph_0^1 = \aleph_0^2 = \aleph_0^3 = \aleph_0^4 = \dots,$

świadczące o tym, że działanie logarytmowania nie jest określone jednoznacznie dla liczb kardynalnych pozaskończonych.

Równości zapisane w kolejnym twierdzeniu odsłaniają niektóre własności liczby kardynalnej c oraz ograniczenia w stosowaniu praw dotyczących działań na liczbach skończonych.

¹⁵ Dowody lematów **L6–L8** są wzorowane na sformułowanych w: K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości. Wraz ze wstępem...*, dz. cyt., s. 172–173 i L. Borowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 253–255.

- T25. a** $c = 2^{\aleph_0}$;
b $c + c = c$;
c $c \cdot c = c$;
d jeżeli n jest liczbą naturalną różną od 0, to:
(i) $c \cdot n = c$ oraz **(ii)** $c^n = c$;
e $c^{\aleph_0} = c$.

D o w ó d T25.a: W dowodzie korzysta się z twierdzeń znanych z teorii systemów liczbowych. W pozytywnych systemach liczbowych dwójkowych, trójkowych, czwórkowych itd. każda liczba rzeczywista jest jednoznacznie reprezentowana przez nieskończony ciąg elementów czerpanych ze zbiorów, odpowiednio, $\{0, 1\}$, $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 2, 3\}$ itd. Wobec tego:

$$\mathbf{L9} \quad \mathcal{R} \sim \{0, 1\}^{\aleph} \sim \{0, 1, 2\}^{\aleph} \sim \{0, 1, 2, 3\}^{\aleph} \sim \dots$$

Skoro – zgodnie z **L9** – $\mathcal{R} \sim \{0, 1\}^{\aleph}$, to:

$$c = |\{0, 1\}^{\aleph}| = |\{0, 1\}|^{|\aleph|} = 2^{\aleph_0} \quad \{\mathbf{D6.b}, \mathbf{D10}, \mathbf{D6a}\}.$$

D o w ó d T25.b: Korzystając kolejno z **T24.a**, **T25.a**, **W9** i **T25.a**, można uznać następujący ciąg równości:

$$c + c = 2 \cdot c = 2 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{1+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c.$$

D o w ó d T25.c: Dowód tej równości jest oparty na (kolejno) **T25.a**, **T23.b**, **T20.c** i **T25.a**:

$$c \cdot c = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c.$$

D o w ó d T25.d: O ile n jest liczbą naturalną różną od 0, to uznanie równości (i) jest uzasadnione twierdzeniami **T22.b** i **T25.b**:

$$c \cdot n = c + \dots + c \quad (n \text{ składników}) = c;$$

natomiast widoczne w (ii) równościowe przejście od c^n do c jest oparte na **T24.a** i **T25.c**:

$$c^n = c \cdot \dots \cdot c \quad (n \text{ czynników}) = c.$$

D o w ó d T25.e jest oparty na **T25.a**, **T23.d**, **T22.d** i **T25.a**:

$$c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c. \blacksquare$$

Kolejne ograniczenie w stosowaniu praw znanych z liczb kardynalnych skończonych wynika bezpośrednio z **T25.a**:

$$\mathbf{W11} \quad 2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = 4^{\aleph_0} = \dots$$

Równości **W11** świadczą bowiem o tym, że również drugie działanie odwrotne do potęgowania, tj. pierwiastkowanie, nie jest określone jednoznacznie w zbiorze liczb pozaskończonych.

Natomiast z **T25.e** wynika – w kontekście wcześniej udowodnionych prawidłowości:

W12 $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^{\mathcal{N}}$,

czyli wynika, że zbiór liczb rzeczywistych jest równoliczny ze zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych, których zasobem jest zbiór \mathcal{R} . Jest tak niewątpliwie, skoro bowiem $c^{\aleph_0} = c$, to $|\mathcal{R}|^{\aleph_0} = |\mathcal{R}|$ {**D6.b**, **D6.a**}; tj. $|\mathcal{R}^{\mathcal{N}}| = |\mathcal{R}|$ {**D10**}, a jest tak wtedy i tylko, gdy $\mathcal{R}^{\mathcal{N}} \sim \mathcal{R}$ {**T3.a**}, czyli $\mathcal{R} \sim \mathcal{R}^{\mathcal{N}}$ {**T1.2**}. ■

Na to, że nie wszystkie intuicje i pojęcia wyniesione z dziedziny zbiorów skończonych mogą być stosowane w dziedzinie nieskończoności, wskazują dobitnie równości zapisane w kolejnym twierdzeniu.

T26.a $|\{x \in \mathcal{R}: -1 < x < 1\}| = c$;

b Jeśli $y < z$, to $|\{x \in \mathcal{R}: y < x < z\}| = c$.

Dowód:

Równoliczność zbioru \mathcal{R} ze zbiorem $\{x \in \mathcal{R}: -1 < x < 1\}$ okazuje funkcja f taka, że $f(x) = \frac{x}{x+1}$ {**D1.a**}, co – zgodnie z **D1.b** i **T3.a** – daje podstawę do uznania równości **T26.a**;

natomiast funkcja: $f(x) = \frac{z-y}{2} \cdot x + \frac{z+y}{2}$ ustala równoliczność zbioru $\{x \in \mathcal{R}: -1 < x < 1\}$ ze zbiorem $\{x \in \mathcal{R}: y < x < z\}$ {**D1.a**}, co – w myśl **T1.3** oraz **D1.b** i **T3.a** – uzasadnia równość **26.b**. ■

Zgodnie z **T26.b** podzbiór liczb rzeczywistych należących do dowolnego otwartego przedziału zbioru \mathcal{R} jest równoliczny ze zbiorem \mathcal{R} , czyli – wysłowiając to w sposób uwidaczniający załamanie się przedstawień intuicyjnych – liczność nawet znikomo małego fragmentu (przedziału) continuum zbioru liczb rzeczywistych jest taka sama jak liczność całego zbioru \mathcal{R} .

W rozważaniach kolejnego podrozdziału będzie wykorzystane twierdzenie, które mówi o liczności rodziny **Pot**(A) wszystkich podzbiorów danego zbioru A (**RIV.1: **D3**).

T27 $|\mathbf{Pot}(A)| = 2^{|A|}$.

Dowód:

Zgodnie z **D10** $2^{|A|} = |\{0, 1\}^A|$. Zbiór $\{0, 1\}^A$ jest zbiorem funkcji określonych na zbiorze A , których wartościami są 0 albo 1.

Każda funkcja $f \in \{0, 1\}^A$ jest wyznaczona jednoznacznie przez zbiór $X_f \subset A$ taki, że $X_f = \{x \in A: f(x) = 1\}$ (np. dla $X_f = A$ funkcja f jest taka, że $(\forall x \in A) [f(x) = 1]$); oraz odwrotnie, tj. różnym funkcjom $f_1, f_2 \in \{0, 1\}^A$ odpowiadają różne zbiory $X_{f_1}, X_{f_2} \subset A$. Funkcja F taka, że $D_1(F) = \{0, 1\}^A$, $D_{II}(F) = \mathbf{Pot}(A)$ i $F(f) = X_f$ okazuje więc równoliczność zbiorów $\{0, 1\}^A$ i $\mathbf{Pot}(A)$ **{D1.a}**, a skoro zbiory te są równoliczne **{D1.b}**, to równość **T27** jest zawsze spełniona **{T3.a}**. ■

3.3.2 Nierówności

Oto określenia podstawowe dla rozważań zawartych w tym paragrafie.

D11.a1 Liczba kardynalna m jest nie większa od liczby kardynalnej n , tj. $m \leq n$ wtedy i tylko, gdy $(\forall A, B) [|A| = m \text{ i } |B| = n \text{ oraz } (\forall C \subset B) [A \sim C]]$;

D11.a2 Liczba kardynalna m jest mniejsza od liczby kardynalnej n , tj. $m < n$ wtedy i tylko, gdy $m \leq n$ oraz $m \neq n$.

Dla ogłoszenia, że liczby kardynalne m oraz n wiąże relacja niewiększości, wystarczy więc wskazać (zdefiniować) zbiór mocy m , który jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru mocy n . Gdy się ponadto udowodni, że moce m oraz n są różne, wtedy można uznać, że pierwsza liczba kardynalna jest mniejsza od drugiej.

Relacje niewiększości i mniejszości liczb kardynalnych można, w zgodzie z **D11.a**, określić zwięźle.

D11.b1 $|A| \leq |B|$ wtedy i tylko, gdy $(\forall C \subset B) A \sim C$;

D11.b2 $|A| < |B|$ wtedy i tylko, gdy $|A| \leq |B|$ oraz $|A| \neq |B|$.

Wnioskiem z **D11.b1** – oczywistym wobec **T1.1**: $A \subset A$ – jest

W13.a Jeżeli $A \subset B$, to $|A| \leq |B|$,

bezpośrednio z **D11.2** wynika, że dla dowolnych liczb kardynalnych m oraz n :

W13.b Jeżeli $m < n$, to $m \leq n$.

Definicje relacji niewiększości i mniejszości liczb kardynalnych są również podstawowe w dowodach następujących nierówności:

T28.a Jeżeli $n \in \mathcal{N}$, to $n < \aleph_0$;

b dla dowolnej liczby kardynalnej m : $m < 2^m$;

c $\aleph_0 < c$.

Dowód T28.a: Dowolny zbiór A , taki że $|A| = n$ jest równoliczny z każdym n -elementowym zbiorem liczb naturalnych $B \subset \mathcal{N}$, więc (i) $|A| \leq |\mathcal{N}|$ {**D11.b1**}; a ponieważ nie jest równoliczny z \mathcal{N} , więc (ii) $|A| \neq |\mathcal{N}|$. Zatem: $n < \aleph_0$ {**D11.b2**: (i), (ii)}.

Dowód T28.b: Dowolny zbiór A , taki że $|A| = m$ jest równoliczny z podzbiorem Z rodziny zbiorów $\mathbf{Pot}(A)$ zawierającym wyłącznie i wszystkie zbiory jednoelementowe, czyli – zgodnie z **D11.b1** i **T27** – (i) $m \leq 2^m$; a ponieważ zbiór $\mathbf{Pot}(A)$ nie jest równoliczny z A {**T13**}, więc (ii) $m \neq 2^m$ {**T27**}, czyli $m < 2^m$ {**D11.b2**: (i), (ii)}.

Dowód T28.c: Ponieważ $\mathcal{N} \sim \mathcal{N}$ {**T1.1**} i $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}$, więc $\aleph_0 \leq c$ {**D11.b1**}; a jako że wiadomo, że $c \neq \aleph_0$ {**T10**}, więc $\aleph_0 < c$ {**D11.b2**}. ■

Prawo T28.b jest zwane twierdzeniem Cantora, a wynika z niego, że dla dowolnej liczby kardynalnej istnieje liczba od niej większa.

Okazywanie, że są spełnione prawidłowości zebrane w **T29**, ponownie dokonuje się w kontekście definicji **D11.1** i **D11.2**, choć i w tych rozumowaniach jest potrzebne odwoływanie się do twierdzeń udowodnionych wcześniej.

T29. Dla dowolnych liczb kardynalnych m, n, t :

a $\sim(m < m)$;

b $m \leq m + n$;

c jeżeli $m = n$, to $m \leq n$;

d jeżeli $m \leq n$ oraz $n \leq t$, to $m \leq t$;

e jeżeli $m \leq n$, to $m + t \leq n + t$;

f jeżeli $m \leq n$, to $m \cdot t \leq n \cdot t$;

g jeżeli $m \leq n$, to $m^t \leq n^t$;

h jeżeli $m \leq n$, to $t^m \leq t^n$.

Dowód:

Niech w poniższych wnioskowaniach:

(*) $m = |A|, n = |B|, t = |C|$.

Dowód T29.a: Gdyby 1. $m < m$ {zdn.}, toby – zgodnie z (*) i **D11.2**: $|A| \neq |A|$.

Dowód T29.b: Na podstawie **L3.d** można założyć $(A \cap B) = \emptyset$, a więc, zgodnie z (*), $|A| = |A| + |B|$. Ponieważ $A \subset (A \cup B)$ {**RIV.1: **T11**} oraz $A \sim A$ {**T1.1**}, więc w myśl **D11.1** i (*): $m \leq m + n$.

Dowód T29.c: Skoro $|A| = |B| \Leftrightarrow A \sim B$ {**T3.a**}, a $B \subset B$, więc $|A| \leq |B|$ {**D11.1**}, co znaczy, że $m \leq n$.

Dowód T29.d: Założenie dowodzonego twierdzenia: jeżeli $m \leq n$ oraz $n \leq t$ – zgodnie z **D11.1** i (*) – jest równoważne z koniunkcją:

1. $A \sim B_1 \subset B$ oraz $B \sim C_1 \subset C$. Wobec tego:
2. istnieją funkcje f, g takie, że: $A \sim_f B_1$ oraz $B \sim_g C_1$.

Ponieważ $f, g \in \mathbf{1-1}$ {**D1.a**}, więc również złożenie $g \circ f$ tych funkcji jest funkcją wzajemnie jednoznaczną {**RIV.2: **T16.2**}; złożenie to ustala równoliczność zbiorów A oraz $g(B_1) \subset C_1$:

3. $A \sim_{g \circ f} g(B_1) \wedge g(B_1) \subset C_1$, a zatem:
4. $|A| \leq |C|$ {**D11.1**: 3, 1}, tj. $m \leq t$ {(*): 4}.

Wspólne dla T29.e–T29.h jest założenie $m \leq n$, które – zgodnie z (*) i **D11.1** – można zapisać w postaci:

- (**) 1. $|A| \leq |B|$, tj. 2. $A \sim B_1, B_1 \subset B$. Niech nadto 3. $A \sim_f B_1$.

Dowód T29.e: By okazać, że:

(i) $|A| + |C| \leq |B| + |C|$,

co równoważne (ii) $|A \cup C| \leq |B \cup C|$ {**L3.d, D8**: (i)}, wystarczy wskazać (zdefiniować) zbiór Z_1 : $Z_1 \subset (B \cup C)$ i $(A \cup C) \sim Z_1$ {**D11.1**}. Warunki te spełnia $Z_1 = (B_1 \cup C)$, jest bowiem wobec (**.2) oczywiste, że (iii) $(B_1 \cup C) \subset (B \cup C)$, a równoliczność zbiorów $(A \cup C)$ i $(B_1 \cup C)$ okazuje funkcja $g = f \cup I_{|C}$. Funkcja g jest wzajemnie jednoznaczna, jako że i funkcja f , i ograniczona do C funkcja identyczności są różnowartościowe {**D1.a:3, L1.c**}, a ich dziedziny i przeciwdziedziny są rozłączne {**RIV.2:**T17**: (ii)} oraz

(iv) $D_1(g) = (A \cup C)$ i $D_{II}(g) = (B_1 \cup C)$.

Zatem $(A \cup C) \sim (B_1 \cup C)$ {**D1.a**: $g \in \mathbf{1-1}$, (iv)}, co łącznie z (iii) pozwala stwierdzić, że spełniona jest nierówność (i), a wobec tego $m + t \leq n + t$ {(i), (*)}.

Dowód T29.f: Korzystając z (**), można powiedzieć, że do okazania jest, że:

(i) $|A| \cdot |C| \leq |B| \cdot |C|$,

co równoważne (ii) $|A \times C| \leq |B \times C|$ {**D9**: (i)}. Zgodnie z **D11.1** wystarczy więc określić zbiór zawarty w zbiorze $(B \times C)$ i równoliczny ze zbiorem $(A \times C)$. Zbiorem takim jest $Z_1 = (B_1 \times C)$. Rzeczywiście (i) $Z_1 \subset (B \times C)$, jako że założenie, że $1.1 \langle x, y \rangle \in Z_1$ jest równoważne z $1.2 x \in B_1$

i $y \in C \{^{**}\text{RIV.2: D2.a1}\}$, a więc 1.3 $x \in B$ i $y \in C \{^{**}\text{RIV.1: T4: (**.2)}\}$, czyli 1.4 $\langle x, y \rangle \in (B \times C)$. A także (ii) $(A \times C) \sim Z_1$, bo skoro $A \sim B_1 \{^{**}.2\}$ oraz $C \sim C \{\text{T1.1}\}$, to także – na podstawie **L3.c** – $(A \times C) \sim (B_1 \times C) = Z_1$.

Skoro (i), to $m \cdot t \leq n \cdot t \{^{**}\}$.

D o w ó d T29.g: W dowodzie tym, analogicznym do powyższych, trzeba wskazać podzbiór zbioru odwzorowań B^C równoliczny ze zbiorem A^C , jako że istnienie takiego podzbioru pozwala, na podstawie **D10** i **D11.1**, ogłosić $\|A\|^C \leq \|B\|^C$, a nierówność ta jest równoważna napisowi $m^t \leq n^t$. Da się łatwo okazać, że warunki te spełnia zbiór $Z_1 = B_1^C$. Wobec $B_1 \subset B \{^{**}\}$ jest oczywiste, że $Z_1 \subset B^C$, natomiast równoliczność zbiorów A^C oraz B_1^C ujawnia funkcja F , która każdej funkcji $f_1 \in A^C$ przyporządkowuje funkcję $g \in B_1^C$ taką, że $(\wedge \langle c, a \rangle \in f_1) [\langle c, f(a) \rangle \in g]$.

D o w ó d T29.h: Dla skrócenia dowodu można, nawiązując do poprzedzających rozumowań, powiedzieć, że zbiór $Z_1 = C^{B_1}$. Jest bowiem tak, że $Z_1 \subset C^B \{B_1 \subset B, ^{**}\}$, natomiast równoliczność zbiorów C^B oraz $Z_1 = C^{B_1}$ okazuje funkcja F , która każdej funkcji $f_1 \in C^A$ przyporządkowuje funkcję $g \in C^{B_1}$ taką, że $(\wedge \langle a, c \rangle \in f_1) [\langle f(a), c \rangle \in g]$. ■

Warto odnotować, że zgodnie z **T29.d** relacja \leq jest przechodnia, natomiast prawa **T29.e–T29.h** wskazują na monotoniczność działań dodawania, mnożenia i potęgowania liczb kardynalnych względem relacji niewiększości \leq . Trzeba przy tym dostrzec, że prawa te nie są spełnione dla relacji mniejszości $<$, bo np. dla dowolnej liczby $n \in \mathcal{N}$, $n < \aleph_0 \{\text{T28.a}\}$, a także $n + \aleph_0 = \aleph_0 \{\text{T20.b}\}$ i $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \{\text{T22.c}\}$ oraz np. $2 < 3$, lecz $2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} \{\text{W11}\}$ i $\aleph_0^2 = \aleph_0^3 \{\text{W10}\}$. Z drugiej strony implikacje odwrotne do **T29.e–T29.h**, zwane prawami skracania, prawdziwe dla liczb naturalnych $n > 1$, przestają obowiązywać (są fałszywe) dla dowolnych liczb kardynalnych, jak widać np. w wyniku podstawienia: $m = 2$, $n = 3$, $t = \aleph_0$. Da się natomiast okazać, że prawa skracania obowiązują dla relacji mniejszości $<$, choć w dowodzie korzysta się z tzw. prawa trychotomii dla liczb kardynalnych. Oto dwa równoważne sformułowania tego prawa:

- T30.a** Dla dowolnych liczb kardynalnych m oraz n : $m \leq n$ lub $n \leq m$;
b Dla dowolnych liczb kardynalnych m oraz n : $m < n$ albo $n < m$ albo $m = n$.

W sformułowaniu **b** lepiej widać, dlaczego **T30** nazywa się prawem trychotomii. Trzeba przy tym dostrzec, że relacje wskazane w sformułowaniu

a nie wykluczają się (dlatego jest „lub” rozumiane zgodnie z \vee), a relacje wymienione w **b** wykluczają się („albo” w znaczeniu \vee).

W dowodach wielu twierdzeń dotyczących liczb kardynalnych korzysta się również z twierdzenia Cantora-Bernsteina¹⁶:

T31.a Dla dowolnych liczb kardynalnych m i n : jeżeli $m \leq n$ oraz $n \leq m$,
to $m = n$;

b Dla dowolnych zbiorów A, B, C : jeśli $A \subset B \subset C \wedge A \sim C$, to
 $A \sim B$ i $B \sim C$.

Zgodnie z **a**, jeśli każda z pary liczb jest nie większa od drugiej, to liczby te są równe, a zgodnie z **b**, jeśli zbiory A oraz C są równoliczne, to każdy zbiór środkowy w łańcuchu: $A \subset B \subset C$, jest równoliczny z oboma zbiorami skrajnymi, tj. ze swoim podzbiorem i nadzbiorem. Jeśli chodzi o dowody, to określenia **T31.a** i **T31.b** są równoważne, choć zwykle dowodzi się tego twierdzenia w sformułowaniu **b**, natomiast dowód prawa trychotomii jest oparty na aksjomacie wyboru¹⁷.

Z **T31.a** można łatwo wyprowadzić następujący wniosek:

W14 Dla dowolnych liczb kardynalnych m, n, t :
jeżeli $m \leq n \wedge n \leq t \wedge m = t$, to $n = t$,

z założenia $m \leq n \wedge n \leq t \wedge m = t$ wynika bowiem, że $t \leq n \wedge n \leq t$, a zatem $n = t$ {**T31.a**}.

T32 Dla dowolnych liczb kardynalnych m i n : $\sim(m \leq n \text{ oraz } n < m)$.

Dowód:

Warto rozważyć prawo $\sim(m \leq n \text{ oraz } n < m)$ najpierw bez odwoływania się do **T31**. Otóż w narzucającym się w tej sytuacji dowodzie niewprost trzeba okazać, że prowadzi do sprzeczności koniunkcja

1. $m \leq n$ oraz $n < m$ {zdn.}.

Niech: (*) $m = |A|$, $n = |B|$.

Zastosowanie do założenia niewprost **D11.1** i **D11.2** i (*) daje napis:

¹⁶ Twierdzenie to, postulowane przez Cantora, zostało udowodnione przez F. Bernsteina. Zob. K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości. Wraz ze wstępem...*, dz. cyt., s. 190–193, gdzie – oprócz wzmianek historycznych i odesłań do literatury – jest dowód tego twierdzenia i jego uogólnienia (pochodzące od S. Banacha) oraz przykłady jego zastosowania (zaczepnięte z pracy S. Banacha i A. Tarskiego).

¹⁷ Sformułowanie i dowód prawa trychotomii jest np. w: tamże, s. 188, 230–231, a dowód twierdzenia Cantora tamże, s. 189–191 oraz w: L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 258–260.

2. (i) $A \sim B_1 \subset B$ oraz $B \sim A_1 \subset A \wedge$ (ii) $\sim(A \sim B)$. Niech:

3. $A \sim_f B_1 \wedge B \sim_g A_1$.

Gdyby $B_1 = B$ lub $A_1 = A$, to $A \sim B$ {2}, co sprzeczne z 2.ii. Zatem

4. $B_1 \neq B \wedge A_1 \neq A$,

co znaczy, że

5. zbiory A i B są sumami rozłącznych zbiorów: $A = A_1 \cup A_1'$ oraz $B = B_1 \cup B_1'$.

Funkcje $f|_{A_1}$ i $g|_{B_1}$ to ograniczenia funkcji f oraz g , a zbiory wartości tych funkcji to B' i A' , tj.:

6. $f|_{A_1}(A_1) = B'$ oraz $g|_{B_1}(B_1) = A'$ {df.}.

Ponieważ funkcje f oraz g są różnowartościowe {D1: 3}, więc

7. $f|_{A_1}$ i $g|_{B_1}$ również są funkcjami wzajemnie jednoznaczными,

a wobec tego

8. $A_1 \sim_{f|_{A_1}} A'$ oraz $B_1 \sim_{g|_{B_1}} B'$ {D1: 7, 6}.

Jako że

9. $A \sim_f B_1 \wedge B_1 \sim_{g|_{B_1}} B'$ oraz $B \sim_g A_1 \wedge A_1 \sim_{f|_{A_1}} A'$,

więc – zgodnie z **D1.b** i **T1.3**:

10. $A \sim A'$ oraz $B \sim B'$, a ponieważ

11. $B' \subset B_1$ oraz $A' \subset A_1$ {2, 5}

oraz zbiory A_1 i B_1 są podzbiarami właściwymi zbiorów, odpowiednio, A i B , więc zbiory A i B są nieskończone {D5.a, T6: 10, 11}, a założenie dowodu niewprost (koniunkcja 1.) ma być spełnione dla dowolnych liczb kardynalnych. By zbliżyć się do okazania, że założenie 1. prowadzi do sprzeczności także w dziedzinie zbiorów nieskończonych, warto wypisać związki między liczbami kardynalnymi, związki zgodne z wierszami 2–10. Otóż:

12. $|A| = |A_1| + |A_1'|$ oraz $|B| = |B_1| + |B_1'|$ {D8.b, 5}

13. $|A_1| = |B|$ oraz $|B_1| = |A|$ {T3.a: 2.i}

14. $|A| = |B| + |A_1'| = |B_1| + |B_1'| + |A_1'| = |A| + |A_1'| + |B_1'|$

oraz, analogicznie: $|B| = |B| + |B_1'| + |A_1'|$ {12, 13}.

Ponieważ zbiory A oraz B są nieskończone, więc równości 14. wskazują na to, że moce tych zbiorów zachowują się w działaniach tak, jak liczby \aleph_0 i c {T20.b-c, T25.b}, co prowadzi do stwierdzenia, że $|A| = |B|$, sprzeczne z 2.ii.

Skuteczne i znacznie prostsze są dowody oparte na twierdzeniu Cantora-Bernsteina. Wiadomo, że

12'. $A \sim A'$ {9, 10}, a jednocześnie 13'. $A' \subset A_1 \subset A$, więc – na podstawie

T31.b – 14'. $A \sim A_1$, a ponieważ $A_1 \sim B$ {2.i}, więc 15'. $A \sim B$ {T1.3: 14},

co sprzeczne z 2.ii.

Jeszcze prostsze jest rozumowanie oparte na **T31.a**: skoro $1' \cdot |A| \leq |B| \wedge |B| < |A|$, więc $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |A|$ {**W13.b**}, a zatem $|A| = |B|$ {**T31.a**}, wbrew 2.ii. ■

W kolejnym twierdzeniu są zgrupowane prawidłowości dotyczące działań, których argumentem jest liczba \aleph_0 lub liczba c {**D6**}, prawidłowości uzupełniające **T20–T25** i **W9–W12**.

T33.a Jeżeli $n \in \mathcal{N}$, to $n + c = c$;

b $\aleph_0 + c = c$;

c jeśli n jest liczbą naturalną ≥ 2 , to $n^{\aleph_0} = c$;

d $\aleph_0^{\aleph_0} = c$.

D o w ó d:

Dowody twierdzeń **a–d** mają wspólne podstawy, tj.:

1. Wiadomo, że: (i) jeśli $n \in \mathcal{N}$, to $n < \aleph_0$ {**T28.a**} oraz (ii) $\aleph_0 < c$ {**T28.c**}. Stosując do koniunkcji (i) oraz (ii) **W13.b**, można zatem uznać, że są spełnione następujące relacje:

2. $n \leq \aleph_0 \leq c$.

D o w ó d T33.a i T33.b: Ponieważ działanie dodawania liczb kardynalnych jest monotoniczne względem relacji \leq {**T29.e**}, więc

3. $n + c \leq \aleph_0 + c \leq c + c$, a wobec $c \leq n + c$ {**T29.b**}:

4. $c \leq n + c \leq \aleph_0 + c \leq c + c$.

Ponieważ $c = c + c$ {**T25.b**}, więc – na podstawie **W14** – można uznać, że $n + c = c$ oraz $\aleph_0 + c = c$.

D o w ó d T33.c i T33.d: Jako że monotoniczne względem relacji \leq jest również działanie potęgowania {**T29.g**}, więc

3. $n^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq c^{\aleph_0}$,

a jeśli przy tym (zgodnie z założeniem T33.c) $2 \leq n$, to

4. $2^{\aleph_0} \leq n^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq c^{\aleph_0}$.

Ponieważ $2^{\aleph_0} = c = c^{\aleph_0}$ {**T25.a, T25.a**}, zatem – ponownie na podstawie **W14**: $n^{\aleph_0} = c$ oraz $\aleph_0^{\aleph_0} = c$. ■

W kontekście twierdzeń mówiących o relacjach między liczbami kardynalnymi warto wrócić do skonstruowanego w poprzednim paragrafie przykładu ilustrującego skalę liczb kardynalnych. Jak wiemy, nie są równoliczne żadne dwa zbiory w ciągach – nie tylko w jednym ciągu, lecz także w różnych ciągach:

(i) $\mathcal{N}, \mathbf{P}^1(\mathcal{N}), \mathbf{P}^2(\mathcal{N}), \mathbf{P}^3(\mathcal{N}), \dots, \mathbf{P}^i(\mathcal{N}), \dots$

(ii) $UA, \mathbf{P}^1(UA), \mathbf{P}^2(UA), \mathbf{P}^3(UA), \dots, \mathbf{P}^i(UA), \dots$

(iii) $UB, \mathbf{P}^1(UB), \mathbf{P}^2(UB), \mathbf{P}^3(UB), \dots, \mathbf{P}^i(UB), \dots$

.....,

przy czym \mathbf{A} to rodzina, której elementami są wszystkie zbiory ciągu (i), \mathbf{B} zawiera jako swoje elementy wszystkie zbiory ciągu (ii) itd. Każdy spośród ciągów (i), (ii), (iii), ... wyznacza więc nieskończenie wiele różnych liczb kardynalnych będących mocami zbiorów tworzących ciąg, a ciągów jest nieskończenie wiele. Teraz można więc rozwinąć wcześniej sformułowany wniosek mówiący o skali liczb kardynalnych. Wiadomo bowiem, że $|\mathbf{Pot}(A)| = 2^{|A|}$, tj. – jeśli $|A| = m$: $|\mathbf{Pot}(A)| = 2^m$ {T27} oraz że dla dowolnej liczby kardynalnej m : $m < 2^m$ {T28.b}, czyli $m = |A| < |\mathbf{Pot}(A)| = 2^{|A|} = 2^m$. Dlatego o kolejnych zbiorach ciągów (i), (ii), (iii) itd. można powiedzieć nie tylko, że nie są równoliczne, lecz że ich liczebność rośnie, że odpowiadające im ciągi liczb kardynalnych są rosnące. Taka interpretacja liczb kardynalnych wyznaczonych ciągami (i), (ii), (iii), ... jest zgodna z twierdzeniem Cantora (T28.b), z twierdzenia tego bowiem wynika, że dla każdej liczby kardynalnej istnieje liczba od niej większa.

4. Antynomie teorii mnogości

Terminy „antynomia” i „paradoks” bywają używane zamiennie, są także rozumiane tak, że antynomia to szczególnego rodzaju (skrajny) paradoks. W niniejszych analizach o antynomii mowa tylko wtedy, gdy w wyniku poprawnego logicznego wnioskowania uzyskuje się dwa zdania sprzeczne. Tak rozumiane antynomie są odróżniane od paradoksów, czyli poprawnych rozumowań prowadzących do wniosku niezgodnego z twierdzeniem uznanym na innych podstawach (np. obserwacyjnych, zdroworozsądkowych), jak również od tzw. sofizmatów, tj. prowadzących do sprzeczności wnioskowań kryjących błędy logiczne.

Ze względu na dziedzinę, w której wstępują, są wyróżniane antynomie logiczne, teoriomnogościowe i semantyczne¹⁸. W kontekście szerokiego rozumienia logiki – przyjętego w niniejszym opracowaniu zagadnień logiki (jest zapowiedziane i uzasadnione w uwagach wprowadzających do *) – obejmującego m.in. semiotykę logiczną i ogólną teorię mnogości,

¹⁸ Zob. np.: L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 213; S. Krajewski, *Antynomie*, w: *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny...*, dz. cyt., s. 174–178; J. Woleński, *Semantics and Truth*, Cham 2019, s. 166–172.

trafniej jest mówić o antynomiach teoriomnogościowych i semantycznych: w pierwszych funkcjonują pojęcia teorii zbiorów (zbioru, klasy, bycia elementem, funkcji wyznaczających zbiory itd.), w drugich kluczową rolę grają pojęcia semantyczne (oznaczenia, odnoszenia się, definiowania, prawdziwości, znaczenia itd.).

W rozważaniach tego podrozdziału zostaną uwzględnione wyłącznie antynomie teoriomnogościowe: najpierw wzorcowe przykłady takich sprzeczności, a następnie sposoby ich usuwania.

4.1 Antynomie klasycznej teorii zbiorów

Klasyczną jest zwana teoria zbiorów opracowana przez Cantora. Kluczowe pojęcia tej teorii – pojęcie zbioru, bycia elementem zbioru, warunku wyznaczającego zakres zbioru itp. – były w niej uznane za oczywiste, niewymagające uściślenia ani ograniczeń w ich stosowaniu. Sam Cantor, a następnie rozwijający jego teorię dostrzegli jednak sprzeczności tkwiące w tej „intuicyjnej” teorii mnogości.

Antynomia Russella

Są nazwy zbiorów, z których treści (pojęcia) wynika, że zbiór oznaczany przez taką nazwę jest sam swoim elementem. Na przykład nazwa „zbiór wszystkich zbiorów” oznacza zbiór, którego elementami są jakiegokolwiek zbiory, czyli także zbiór oznaczany przez tę nazwę. Z kolei nazwa „zbiór wszystkich zbiorów nieskończonych” też oznacza zbiór będący swoim elementem, jako że zbiorów nieskończonych jest nieskończenie wiele (zob. **RIV.3.2.2). Rozważane zwykle zbiory – jak zbiór funktorów prawdziwościowych KRZ, ogół poprawnie zbudowanych wyrażeń WRP, zbiór \mathcal{N} liczb naturalnych, zbiór \mathcal{R} liczb rzeczywistych itd. – nie są swoimi elementami.

Zbiór \mathbf{Z} wszystkich zbiorów, które nie są swoimi elementami, można zdefiniować formułą:

$$X \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \sim(X \in X),$$

której podstawieniem jest równoważność:

$$\mathbf{Z} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \sim(\mathbf{Z} \in \mathbf{Z}),$$

która daje podstawę do udowodnienia każdego z tych sprzecznych wyrażeń, $\mathbf{Z} \in \mathbf{Z}$ oraz $\sim(\mathbf{Z} \in \mathbf{Z})$, jako że z równoważności dowolnych dwóch wyrażeń sprzecznych, tj. z $\Phi \Leftrightarrow \sim\Phi$, da się wyprowadzić – w dowodach

niewprost, stosując $\mathbf{RO}_{\Leftrightarrow}$ – zarówno Φ , jak i $\sim\Phi$, a – ogólniej, korzystając z \mathbf{DA} – zarówno Ψ , jak i $\sim\Psi$ ¹⁹.

Antynomia zbioru wszystkich zbiorów

Źródłem sprzeczności jest także pojęcie zbioru \mathbf{Z} wszystkich zbiorów. Rodziną wszystkich podzbiorów zbioru \mathbf{Z} jest zbiór potęgowy $\mathbf{Pot}(\mathbf{Z})$ (**RIV.1: **D3**). Ponieważ każdy element zbioru $\mathbf{Pot}(\mathbf{Z})$ jest zbiorem, więc $\mathbf{Pot}(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$, a na podstawie tej inkluzji można ogłosić, że (i) $|\mathbf{Pot}(\mathbf{Z})| \leq |\mathbf{Z}|$ {**RIV.3: **W13.a**}. Jednakże moc zbioru potęgowego dowolnego zbioru jest większa niż moc danego zbioru {**RIV.3: **T28.b**}, co znaczy, że (ii) $|\mathbf{Pot}(\mathbf{Z})| > |\mathbf{Z}|$, a to jest sprzeczne z (i)²⁰.

Antynomia zbioru uniwersalnego

Elementem zbioru uniwersalnego \mathbf{U} jest dowolny przedmiot (indywidualny lub zbiór), a więc także każdy element zbioru potęgowego $\mathbf{Pot}(\mathbf{U})$, co znaczy, że $\mathbf{Pot}(\mathbf{U}) \subset \mathbf{U}$, a zatem (i) $|\mathbf{Pot}(\mathbf{U})| \leq |\mathbf{U}|$ {**RIV.3: **W13.a**}. Z drugiej strony na podstawie twierdzenia Cantora (**RIV.3: **T28.b**) trzeba uznać, że $|\mathbf{Pot}(\mathbf{U})| > |\mathbf{U}|$.

W kontekście twierdzeń podstawowych dla okazania tej sprzeczności jest oczywisty wniosek (uzasadniony w dowodzie niewprost):

W1 Nie istnieje zbiór uniwersalny.

Antynomia zbioru wszystkich liczb kardynalnych

Dla dowolnego zbioru liczb kardynalnych istnieje liczba kardynalna większa od każdej liczby należącej do tego zbioru: warunek ten spełnia suma wszystkich liczb kardynalnych danego zbioru, co wynika z wzoru $m \leq m + n$ {**RIV.3: **T29.b**} zastosowanego tak, że po prawej jego stronie jest suma uogólniona liczb kardynalnych (wszystkich z danego zbioru), a po lewej kolejna liczba z tego zbioru. Na podstawie tej prawidłowości

¹⁹ W sposób analogiczny Russell wskazał, że do sprzeczności w rachunku predykatów prowadzi pojęcie własności, która nie przysługuje samej sobie: gdy w definicji takiej własności, tj. w $R(A) \Leftrightarrow \sim A(A)$, dokona się podstawienia A/R , wtedy uzyskuje się równoważność $R(R) \Leftrightarrow \sim R(R)$. Podobnie w języku naturalnym uzyskuje się sprzeczne odpowiedzi na pytanie: *Czy fryzjer, który może golić tych tylko, którzy nie golą się sami, może ogolić sam siebie?* Zob. tamże, s. 176.

²⁰ Antynomia zbioru wszystkich zbiorów jest zwana paradoksem Cantora – na tej podstawie, że o sprzeczności tej Cantor informował już w 1891 roku (w liście do Dedekinda). Zob. tamże, s. 195.

można uznać, że również dla zbioru \mathbf{K} wszystkich liczb kardynalnych istnieje liczba \mathbf{k} większa od każdej liczby z \mathbf{K} , a więc także większa od siebie, co sprzeczne z tym, że dla dowolnej liczby kardynalnej m : $\sim(m < m)$ {**RIV.3: T29.a}.

W kontekście przywołanych twierdzeń jest zatem oczywisty wniosek:

W2 Nie istnieje zbiór wszystkich liczb kardynalnych.

Do antynomii na gruncie klasycznej teorii mnogości prowadzą także założenia o istnieniu zbioru wszystkich liczb porządkowych, uniwersum (zbioru wszystkich) zbiorów równolicznych z sobą itd.

4.2 Usuwanie antynomii

Okazjonalne uwagi co do zagrożeń sprzecznościami i ograniczeń niezbędnych, by ich w teorii mnogości uniknąć, były już formułowane (zob. uwagi do pojęcia uniwersum w *RIV.3 i **RIV.1). Systemowe sposoby zapobiegania antynomiom zostały zaproponowane w teorii typów logicznych oraz w aksjomatycznym ujęciu teorii mnogości²¹.

4.2.1 Teoria typów logicznych

Odnosząc się do antynomii teorii Cantora, B. Russell zbudował system logiczny, którego fragmentem jest teoria mnogości, zwany rozgałęzioną teorią typów logicznych²². Rdzeniem tej teorii jest pomysł, by przedmioty, których nazwy można podstawiać za zmienne w języku systemu, podzielić na typy (rzędy). Do typu zerowego należą przedmioty indywidualne, niebędące zbiorami; w typie pierwszym są zbiory, których wszystkie elementy są indywidualiami, czyli przedmiotami typu zerowego; w typie drugim są zbiory przedmiotów typu pierwszego, czyli zbiory zbiorów indywidualiów; w typie trzecim są zbiory zbiorów typu drugiego; w typie

²¹ Wzmianki o innych metodach eliminowania antynomii są tamże, s. 178–181.

²² Celem Russella było wyeliminowanie antynomii teorii mnogości, rachunku predykatów oraz antynomi semantycznych. Dla usunięcia antynomii teoriomnogościowych i rachunku predykatów L. Chwistek i F.P. Ramsey opracowali tzw. prostą teorię typów logicznych. Zob. L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 215.

czwartym są zbiory przedmiotów typu trzeciego itd. Gdy przestrzega się tego podziału, wtedy nie pojawiają się w formułach teorii nazwy zbiorów, których elementy należą do różnych typów: przedmiot typu n może być elementem wyłącznie zbioru typu $n + 1$: indywidua (i tylko indywidua) elementami zbiorów typu pierwszego, zbiory indywiduów elementami zbiorów typu drugiego itd. Zdania (formuły zdaniowe), w których symbol \in wiąże zmienne zinterpretowane w sposób niespełniający tego warunku, jak również negacje takich zdań, są bezsensowne. Zgodnie z tym wymogiem bezsensowna jest również, kluczowa w antynomi Russella, równoważność: $\mathbf{Z} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \sim(\mathbf{Z} \in \mathbf{Z})$, ponieważ napis „ $\mathbf{Z} \in \mathbf{Z}$ ” nie spełnia tego wymogu. Warunek budowania formuł zgodnie z typem przedmiotów reprezentowanych przez zmienne wyklucza nie tylko antynomię Russella, lecz wszystkie inne antynomie teorii mnogości. Budowanie systemów zgodnych z tym wymogiem oraz ich stosowanie jest jednak utrudnione²³.

4.2.2 Aksjomatyzacja teorii mnogości

Współcześnie przyjmowanym sposobem eliminowania antynomii z teorii mnogości jest jej budowanie w postaci systemu aksjomatycznego. Przyjmowane dzisiaj aksjomatyki najczęściej nawiązują do pierwszej aksjomatyzacji teorii mnogości opracowanej przez niemieckiego matematyka E. Zermelo, dopracowanej następnie przez Fraenkla i Skolema (tzw. aksjomatyki ZFS); odrębne aksjomatyki pochodzą od J. von Neumanna, P. Bernaysa i K. Gödla (aksjomatyki NBG) oraz Quine’a²⁴. Aksjomatyka niżej omówiona, oparta na ZFS, jest stosunkowo prosta i sformułowana tak, by łatwiej było nawiązywać do wcześniejszych wyników niniejszego opracowania²⁵.

²³ Zob. tamże, s. 215–216.

²⁴ Zob. np. W. Marciszewski, *Aksjomatyczne ujęcie teorii mnogości*, w: *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny...*, dz. cyt., s. 121–131. Historyczne i porównawcze uwagi o różnych aksjomatach teorii mnogości oraz odesłania do publikacji są np. w: K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości. Wraz ze wstępem...*, dz. cyt., s. 70.

²⁵ Niniejsza prezentacja jest wzorowana na zawartej tamże, s. 65–70. Aksjomatyka Zermelo-Fraenkla jest omówiona w: L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 217–223. W: J. Słupecki, K. Halkowska, K. Piróg-Rzepecka, *Logika i teoria mnogości*, dz. cyt., s. 234–239 jest zaproponowany system aksjomatyczny (oznaczony jako **T**), którego jedynymi terminami pierwotnymi są symbole zbioru pustego i bycia elementem; sformułowanie aksjomatów systemu **T**

A.I Aksjomat jednoznaczności. Jeśli zbiory A i B mają jednakowe elementy, to zbiory te są identyczne.

Twierdzenie to, zwane także aksjomatem ekstensjonalności, można w przyjętym w tym opracowaniu języku symbolicznym zapisać tak: $(\wedge x) [x \in A \leftrightarrow x \in B] \Rightarrow (A = B)$. Implikacja ta jest zgodna z **ZE**:
 $A = B \Leftrightarrow (\wedge x) [x \in A \leftrightarrow x \in B]$ {**RIV.1: **D1**}.

A.II Aksjomat zbioru pustego. Istnieje zbiór taki, że żadne x nie jest elementem tego zbioru: $(\forall Z \wedge x) x \notin Z$.

Jedyny zbiór spełniający **A.II** jest (także w niniejszym opracowaniu) oznaczany symbolem \emptyset .

A.III Aksjomat pary. Dla dowolnych przedmiotów x i y istnieje zbiór, którego jedynymi elementami są te przedmioty:
 $(\wedge x, y \vee X) X = \{x, y\}$ ²⁶.

A.IV Aksjomat sumy. Dla każdej rodziny zbiorów \mathbf{K} istnieje zbiór S zawierający wszystkie i tylko te elementy, które są elementami jakiegoś zbioru X należącego rodziny \mathbf{K} :
 $(\wedge \mathbf{K} \vee S \wedge x) [x \in S \Leftrightarrow (\vee X \in \mathbf{K}) x \in X]$.

Warto zauważyć, że zbiór S , którego istnienie zapewnia **A.III**, jest rozumiany zgodnie z definicją $x \in \cup \mathbf{A} \Leftrightarrow (\vee A \in \mathbf{A}) x \in A$ {**RIV.1: **D6.a4**}, a suma $(A \cup B)$, określona równoważnością $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$ {**RIV.1: **D6.a1**} jest rozumiana jak suma rodziny zbiorów $\{A, B\}$.

A.V Aksjomat zbioru potęgowego. Dla każdego zbioru Z istnieje rodzina \mathbf{P} wszystkich jego podzbiorów: $(\wedge Z \vee \mathbf{P}) X \in \mathbf{P} \Leftrightarrow X \subset Z$.

Zbiór podzbiorów, którego istnienie jest zapewnione przez **A.V**, jest zwany zbiorem potęgowym, oznaczanym symbolem $\mathbf{Pot}(Z)$, $\mathbf{P}(Z)$ lub 2^Z (rozumiana zgodnie z tym aksjomatem jest **RIV.1: **D3**).

jest jednak poprzedzone kilkunastoma definicjami innych pojęć (zbioru, rodziny zbiorów, równozakresowości, inkluzji, iloczynu, sumy zbiorów, zbioru potęgowego, zbioru nieskończonego itd.).

²⁶ Aksjomat ten jest zwykle formułowany odrębnie, choć jest zależny od pozostałych aksjomatów. Zob. K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości. Wraz ze wstępem...*, dz. cyt., s. 66.

A.VI Aksjomat nieskończoności. Istnieje rodzina zbiorów \mathbf{K} taka, że należy do niej zbiór pusty i jeśli jej elementem jest zbiór A , to jej elementem jest również zbiór $(A \cup \{A\})$:

$$(\forall \mathbf{K}) [\emptyset \in \mathbf{K} \wedge (\wedge A \in \mathbf{K}) (A \cup \{A\}) \in \mathbf{K}].$$

Jako że elementem rodziny \mathbf{K} jest zbiór pusty \emptyset , więc jej elementem jest również $(\emptyset \cup \{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$, kolejnym jest $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, następnie $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ itd. Elementy te tworzą więc ciąg nieskończony, którego kolejne wyrazy są zbiorami zawierającymi jako swoje elementy wszystkie poprzedzające wyrazy tego ciągu.

A.VII Aksjomat wyboru. Dla każdej niepustej rodziny \mathbf{K} zbiorów niepustych i wzajemnie rozłącznych istnieje zbiór C , który ma dokładnie jeden element wspólny z każdym zbiorem rodziny \mathbf{K} :

$$\begin{aligned} (\wedge X, Y \in \mathbf{K}) [X \neq \emptyset \wedge (X \neq Y \Rightarrow (X \cap Y) = \emptyset)] \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists C \wedge X \in \mathbf{K} \forall_1 x) x \in (C \cap X). \end{aligned}$$

Wykorzystując pojęcie funkcji, można powiedzieć, że w każdej takiej rodzinie \mathbf{K} istnieje funkcja, która każdemu zbiorowi tej rodziny przyporządkowuje (jako swoją wartość) jeden element danego zbioru.

Aksjomat ten daje podstawę dla udowodnienia wielu twierdzeń, których nie da się wyprowadzić z pozostałych aksjomatów teorii mnogości. Do twierdzeń takich należy twierdzenie Zermelo:

T1 Dla każdego zbioru X istnieje relacja, która ten zbiór dobrze porządkuje.

Twierdzenie to, a także lemat Kuratowskiego-Zorna (zob. **RIV.4: T21), jest równoważne z aksjomatem VII, co znaczy także, że równoważne są T1 oraz ten lemat²⁷.

Aksjomat VII, zwany także aksjomatem Zermelo, nie przez wszystkich jest przyjmowany. Dlatego w wykładach teorii mnogości uwzględniających ten fakt są odrębnie oznaczane (nazywane) systemy aksjomatów z pewnikiem wyboru oraz dowody twierdzeń, w których aksjomat ten jest zakładany²⁸.

²⁷ Zob. J. Słupecki, K. Hałkowska, K. Piróg-Rzepecka, *Logika i teoria mnogości*, dz. cyt., s. 238.

²⁸ Zob. np. K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości. Wraz ze wstępem...*, dz. cyt., s. 67–70. Prosty przykład zastosowania aksjomatu wyboru jest podany w: J. Słupecki, K. Hałkowska, K. Piróg-Rzepecka, *Logika i teoria mnogości*, dz. cyt.,

Istotne znaczenie w dyskusji nad aksjomatem wyboru i podstawami teorii mnogości miało twierdzenie opublikowane w 1924 roku przez Tarskiego i Stefana Banacha w *Fundamenta Mathematicae*, zwane twierdzeniem o paradoksalnym rozkładzie kuli. Zgodnie z tym twierdzeniem dowolnej wielkości kulę (obiekt matematyczny) można podzielić na skończoną liczbę części, z których można następnie złożyć kulę dowolnej innej wielkości. Wynik ten przeczył intuicji (przekonaniom zdroworozsądkowym), dlatego twierdzenie to nazywa się często paradoksem Banacha-Tarskiego, choć w przeciwieństwie do innych znanych paradoksów, które rzeczywiście prowadzą do sprzeczności, twierdzenie Banacha-Tarskiego było niesprzeczne z powszechnie akceptowanymi aksjomatami teorii mnogości. Jednakże w dowodzie twierdzenia o paradoksalnym rozkładzie kuli w sposób istotny był wykorzystany aksjomat wyboru (postulujący istnienie pewnego zbioru bez podania metody jego konstrukcji). Wynik Banacha-Tarskiego wskazywał więc paradoksalne konsekwencje przyjęcia w podstawach teorii mnogości tego aksjomatu, który wcześniej był uznawany za intuicyjny i był powszechnie stosowany w dowodach matematycznych²⁹.

A.VIII Aksjomat podzbiorów. Aksjomatem jest każde wyrażenie o postaci: $(\forall A \vee B \wedge x) [x \in B \Leftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x))]$.

Schemat powyższy można odczytać tak: dla dowolnego zbioru A istnieje zbiór B złożony z wszystkich i tylko tych elementów zbioru A , które spełniają warunek Φ . Podane sformułowanie (pochodzące od Skolema) tego aksjomatu – zwanego również aksjomatem o podziorach dla formuły Φ , aksjomatem wyróżniania lub aksjomatem definicyjnym – wskazuje wprost, że **A.VIII** jest schematem reprezentującym nieskończenie wiele aksjomatów teorii mnogości, $\Phi(x)$ w podanym schemacie reprezentuje bowiem dowolną formułę zdaniową aksjomatycznej teorii mnogości, w której występuje jako wolna zmienna x i nie występuje jako wolna

s. 238–239, gdzie jako przykład zastosowania tego aksjomatu w dowodach przeprowadzanych w innych działach matematyki jest wskazane twierdzenie o równoważności Cauchy’ego oraz Heinego definicji granicy funkcji.

²⁹ Twierdzenie Banacha-Tarskiego miało duże znaczenie dla rozwoju badań nad podstawami teorii mnogości, inicjując poszukiwanie konstruktywnych metod dowodzenia, tj. nieodwołujących się do aksjomatu wyboru. W późniejszym okresie Tarski sformułował około 30 równoważnych aksjomatowi wyboru sformułowań, głównie w terminach operacji i relacji na liczbach kardynalnych.

zmienna B (jeśli są ponadto inne zmienne wolne, to są one parametrami, od których zależy B).

Nawiązując do antynomii teoriomnogościowych warto dodać, że istotny jest warunek, by elementy zbioru B wyznaczonego formułą Φ były wyłącznie elementami danego (ustalonego) zbioru A . Aksjomat bez tego ograniczenia, tj. $(\forall B \wedge x) [x \in B \Leftrightarrow \Phi(x)]$ – przyjęty przez Cantora jako postulat charakteryzujący pojęcie zbioru – zwany w literaturze aksjomatem komprehenzji lub pewnikiem abstrakcji – głosi, że dla dowolnej sensownej formuły Φ istnieje zbiór tych i tylko tych elementów, które dany warunek spełniają. Pewnik komprehenzji wzmacnia możliwości dowodowe teorii mnogości, lecz prowadzi do sprzeczności, takich jak antynomia Russella.

A.IX Aksjomat zastępowania. Aksjomatem jest każde wyrażenie o postaci: $(\wedge x, y, z) [\Phi(x, y) \wedge \Phi(x, z) \Rightarrow y = z] \Rightarrow \Rightarrow (\wedge A \vee B \wedge y) [y \in B \Leftrightarrow (\forall x \in A) \Phi(x, y)]$.

Ponieważ zgodnie z poprzednikiem tej implikacji forma zdaniowa $\Phi(x, y)$ jest jednoznaczna (zob. **RIV.2: **D10.1**), dlatego można zgodnie z tym symbolicznym zapisem stwierdzić, że: jeśli dla każdego x istnieje dokładnie jeden y taki, że $\Phi(x, y)$, to dla każdego zbioru A istnieje zbiór B , którego elementami są te i tylko elementy y , które dla pewnego $x \in A$ spełniają warunek $\Phi(x, y)$. Zbiór ten, którego istnienie jest gwarantowane przez **A.IX**, jest zwany obrazem zbioru A , tj. zbiorem wyznaczonym jednoznacznie przez formę zdaniową $\Phi(x, y)$ (zob. **RIV.2: **D12.1**). Aksjomat ten, tak samo jak poprzedni, jest schematem nieskończenie wielu aksjomatów, w którym $\Phi(x, y)$ reprezentuje formuły zdaniowe teorii mnogości (o zmiennych wolnych x i y , niezawierające B jako zmiennej wolnej), które pojawiają się w konkretnym aksjomacie o budowie zgodnej z powyższym wzorem.

Aksjomat **A.IX** (wprowadzony przez Fraenkla) jest mocniejszy niż **A.VIII**, który okazał się niewystarczający w dowodach niektórych twierdzeń teorii mnogości³⁰. Ponieważ **A.VIII** i **A.IX** reprezentują nieskończone zbiory aksjomatów, więc system oparty na aksjomatach **I–IX** nie jest skończenie aksjomatyzowalny.

³⁰ Schemat łatwego dowodu wyprowadzalności **A.VIII** z **A.IX** jest np. w: L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 222.

W aksjomatach **II–IX** mowa o istnieniu pewnych zbiorów, a przy tym aksjomaty **II** i **VI** są bezwarunkowe, tzn. postulują istnienie odnośnych zbiorów niezależnie od jakichkolwiek założeń, a pozostałe w tej grupie to tzw. warunkowe aksjomaty istnienia, tj. takie, w których istnienie pewnych zbiorów jest uwarunkowane spełnieniem założeń co do istnienia innych zbiorów. Warto podkreślić, że warunkowe aksjomaty istnienia określają jednoznacznie zbiór, którego istnienie stwierdzają. Natomiast nie jest w tym sensie jednoznaczny aksjomat **VII**: dla danej niepustej rodziny **K** zbiorów niepustych i wzajemnie rozłącznych zwykle można bowiem określić (podać sposób tworzenia) wiele zbiorów **C**, które mają dokładnie jeden element wspólny z każdym zbiorem takiej rodziny.

Podobnie jak w teorii typów logicznych, również na gruncie aksjomatycznej teorii mnogości antynomie są skutecznie usuwane (szczególna w tej eliminacji jest rola aksjomatu **VIII**). Odpowiednikami antynomii są w systemach aksjomatycznych twierdzenia o nieistnieniu tych obiektów (zbiorów), których pojęcie (założenie, że istnieją) prowadziło do sprzeczności, np. twierdzenia, że nie istnieje: zbiór wszystkich zbiorów (zob. ****RIV.3: T17**), zbiór uniwersalny (zob. **W1**), zbiór wszystkich liczb kardynalnych (zob. **W2**), zbiór wszystkich liczb porządkowych³¹, zbiór wszystkich zbiorów niebędących swoimi elementami itd.³²

³¹ Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do uzasadnienia dla **W2**. Antynomia zbioru wszystkich liczb porządkowych to pierwsza opublikowana antynomia klasycznej teorii mnogości (została ogłoszona przez Burali-Fortiego w 1897 r.) – zob. np. tamże, s. 296.

³² Oprócz aksjomatów **I–IX** są przyjmowane postulaty wzmacniające podstawy dowodowe teorii mnogości – jak aksjomat regularności (o istnieniu dla każdej niepustej rodziny zbiorów niepustego zbioru **X**, który jest elementem danej rodziny i nie ma z nią elementów wspólnych) – a także aksjomaty właściwe dla działów teorii mnogości, np. w teorii systemów relacyjnych aksjomat typów relacyjnych, tj. o istnieniu dokładnie jednego przedmiotu będącego typem relacyjnym danego systemu (****RIV.2: A1**) – zob. np. K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości. Wraz ze wstępem...*, dz. cyt., s. 69–70, 96–98.

ZAKOŃCZENIE

Zagadnienia podjęte w rozważaniach zostały podzielone, zgodnie z różnieniem przyjmowanym w opracowaniach z logiki, na zaczerpnięte z logiki formalnej oraz z ogólnej teorii mnogości. W części poświęconej logice (rozdziały I–III) są omówione rachunki zdań i predykatów, a w zakresie teorii mnogości są uwzględnione podstawowe wyniki rachunku zbiorów, teorii relacji, teorii liczb kardynalnych oraz kwestie związane z antynomiami tzw. klasycznej teorii mnogości.

Podstawowa dla pozostałych analiz jest charakterystyka rachunków klasycznych, tj. dwuwartościowych i ekstensjonalnych: klasycznego rachunku zdań (KRZ) oraz klasycznego rachunku predykatów. W rozdziale poświęconym KRZ jest opisany język tego rachunku, jego metody budowania oraz podstawowe prawa. W opisie języka (RI.1), po ustaleniach dotyczących przyjętego w tych analizach symbolicznego zapisu wyrażen elementarnych oraz reguł budowania wyrażen złożonych, jest obszerna charakterystyka semantyczna prawdziwościowych spójników KRZ, która oprócz standardowych (matrycowych) definicji tych spójników zawiera obszerne analizy zależności definicyjnych między nimi oraz opis ogólnej metody (algorytmu) ustalania tych związków (RI.1.2.3).

W charakterystyce metod budowania KRZ zostały uwzględnione: metoda rozstrzygania tautologiczności formuł KRZ (RI.2), a następnie metody dedukcyjne: założeniowa (RI.3) oraz metoda aksjomatyczna (RI.4). Prezentacja metody rozstrzygania została ograniczona do metody zero-jedynkowej (matrycowej), nie licząc wzmianek o innych sposobach sprawdzania, czy formuła jest prawem; natomiast w opisie metod dedukcyjnych jest wyraźnie wyróżniony sposób założeniowy, w wersji pochodzącej od Słupeckiego-Borkowskiego (S-B), wybrany jako podstawowy i w ujęciu KRZ, i pozostałych rachunków uwzględnionych w niniejszym opracowaniu. Dlatego również prawa KRZ zostały zaprezentowane jako

tezy tego systemu. Na tle założeniowego systemu KRZ jest ukazana metoda aksjomatyczna, zilustrowana rachunkiem zdań Hilberta-Bernaysa oraz aksjomatykami Łukasiewicza (także aksjomatem Nicoda-Łukasiewicza i rachunkami zdań częściowymi).

Spośród rachunków zdań nieklasycznych (RII), rozumianych w tej pracy jako wielowartościowe lub intensjonalne, zostały wybrane rachunki logiki wielowartościowej (RII.1), a zwłaszcza rachunki opracowane przez Łukasiewicza i jego następców; prawa logiki modalnej i deontycznej (RII.2.-3) oraz logika intuicjonistyczna i tzw. logiki pośrednie (RII.4).

Również charakterystyka logiki predykatów (RIII) jest skupiona na rachunkach klasycznych, tj. nadbudowanych nad KRZ. Po ogólnych uwagach o logice predykatów (funkcje, podstawowe pojęcia, rodzaje rachunków predykatów) jest rozwinięty (RIII.2) węższy rachunek predykatów (WRP) oraz jego odmiana wzbogacona o pojęcie identity, a następnie teoria wynikania zdań kategoriycznych. W założeniowym systemie WRP (wzorowanym na ujęciu S-B) zostały udowodnione podstawowe twierdzenia tego rachunku, także takie, w których jest użyte pojęcie identity (WRP z identity).

W rozdziale tym jest także omówiona (RIII.3) teoria wynikania zdań kategoriycznych: najpierw w sposób tradycyjny, z podziałem na prawa wniosowania bezpośredniego, które są ponadto zestawione z prawami logiki modalnej i deontycznej (RIII.3.1), oraz sylogizmy (RIII.3.2), przy czym tradycyjne metody sprawdzania poprawności logicznej sylogizmów (RIII.3.2.1) zostały uzupełnione (RIII.3.2.2) o modyfikacje metody Venna, stosowalne także do innych niż tradycyjnie analizowane wniosowania ze zdaniami kategoriycznymi. W paragrafie końcowym (RIII.3.3) teoria ta jest zinterpretowana w rachunku predykatów.

W rozdziale poświęconym teorii mnogości (RIV) są w kolejnych podrozdziałach omówione teorie zwykle umieszczane w jej części zwanej ogólną: rachunek zbiorów, teoria relacji oraz teoria liczb kardynalnych. Ponadto są w tym rozdziale uwzględnione (RIV.4) zagadnienia, ważne nie tylko z powodów historycznych, związane z antynomiami tzw. klasycznej teorii mnogości oraz ze sposobami ich usuwania.

W prezentacji rachunku zbiorów (RIV.1), po uwagach dotyczących języka i podstawowych jego pojęć (dystrybutywne i kolektywne rozumienie zbioru, zbiory uporządkowane i nieuporządkowane, zbiór pusty i uniwersalny), są w kolejnych paragrafach scharakteryzowane – definicjami i udowodnionymi twierdzeniami: relacje między zbiorami (tożsamości,

podporządkowania, rozłączności, krzyżowania); podstawowe działania na zbiorach (sumy, iloczynu – także działania uogólnione – różnicy, różnicy symetrycznej i dopełniania); pojęcie i własności zbiorów wyznaczonych przez funkcje zdaniowe. Ponadto są w rachunku zbiorów zinterpretowane zdania kategoryczne i prawa sylogistyki (RIV.1.5).

Prezentacja teorii relacji (RIV.2) również została ograniczona do jej podstawowych pojęć (iloczynu kartezjańskiego, relacji), a następnie do definicji i twierdzeń dotyczących: (RIV.2.2) działań na relacjach (suma, iloczyn, różnica, dopełnienie oraz konwers i złożenie relacji); (RIV.2.3) wyróżnionych rodzajów relacji (funkcje, ciągi) oraz własności relacji (RIV.2.3.2), własności podstawowych (zwrotność, spójność, symetryczność, asymetryczność, przechodniość) oraz (RIV.2.3.3-4) złożonych (relacje równoważnościowe, relacje porządkujące). Zostały także określone (RIV.2.3.4) odpowiadające relacjom porządkującym odmiany zbiorów uporządkowanych (uporządkowane częściowo, liniowo, dobrze) oraz związane ze zbiorami uporządkowanymi pojęcia (elementu pierwszego, minimalnego, ostatniego, maksymalnego; zbioru gęstego, ciągłego) i twierdzenia, m.in. lemat Kuratowskiego-Zorna, stosowany często w dowodach matematycznych okazujących istnienie postulowanego obiektu (RIV.2: **T21**). Ustalenia dotyczące funkcji dały podstawę (RIV.2.3.5) do określenia relacji między relacjami (izomorfizm i homomorfizm relacji) oraz wprowadzenia pojęć (struktury relacyjnej, typu relacyjnego) i sformułowania twierdzeń znajdujących wiele zastosowań w logice i matematyce (m.in. twierdzenie Lindenbauma-Tarskiego o izomorfizmie – RIV.2: **T23**).

Z problematyki teorii liczb kardynalnych zostały wybrane wyniki i zagadnienia ważne także filozoficznie. Dlatego po wprowadzeniu (RIV.3.1) podstawowych pojęć tej teorii (równoliczność zbiorów, moc zbioru, liczba kardynalna) analizy zostały skupione (RIV.3.2) na rodzajach zbiorów wyróżnionych ze względu na ich liczność. Omówione – definicyjnie i udowodnionymi twierdzeniami – zostały: (RIV.3.2.1) zbiory (moce zbiorów) skończone i nieskończone (także – nieskończone w sensie Dedekinda) oraz analogicznie podzielone liczby kardynalne skończone i pozaskończone, czyli moce zbiorów nieskończonych, a pośród nich liczba \aleph_0 (alef zero), tj. moc zbioru \mathcal{N} liczb naturalnych, oraz liczba c , tj. moc ogółu \mathcal{R} liczb rzeczywistych, zwana mocą kontinuum; (RIV.3.2.2) zbiory przeliczalne (skończone lub równoliczne ze zbiorem \mathcal{N}) i nieprzeliczalne. W dowodach twierdzeń o przeliczalności została zastosowana tzw. metoda

przekątniowa, wykorzystana także dla okazania bogactwa świata liczb kardynalnych pozaskończonych (RIV.3: **T12–T16**) oraz twierdzenia o nieistnieniu zbioru wszystkich zbiorów (RIV.3: **T17**). W kolejnej części (RIV.3.3) są sformułowane podstawowe definicje i udowodnione twierdzenia dotyczące działań (sumy, mnożenia, potęgowania) oraz nierówności w zbiorze liczb kardynalnych. Filozoficznie znaczące są zwłaszcza wyniki dotyczące własności liczb \aleph_0 i c (RIV.3: **T20, T22, T24, T25, T28, T33**).

Wybrane zagadnienia i wyniki ogólnej teorii mnogości są uzupełnione podrozdziałem (RIV.4) poświęconym antynomiom tzw. klasycznej (intuicyjnej) teorii mnogości (Russella, zbioru wszystkich zbiorów, zbioru uniwersalnego, zbioru wszystkich liczb kardynalnych) oraz sposobom ich zapobiegania: (RIV.4.2.1) zapoczątkowanej przez B. Russella teorii typów logicznych, która dziś ma już znaczenie historyczne; oraz (RIV.4.2.2) przyjętej w logice metodzie aksjomatyzacji, której omówienie – lecz tylko na przykładzie wybranych aksjomatów i w kontekście usuwania antynomii – zamyka rozdział poświęcony teorii mnogości.

Oceniając całość rozważań zawartych w książce, warto po pierwsze podkreślić, że dotyczą podstawowych zagadnień logiki formalnej i ogólnej teorii mnogości. Dlatego trudno wymagać, by znalazły się w niniejszym opracowaniu wyniki poszerzające ogół wyników znanych. Oryginalności i pewnych zalet można się doszukiwać – mam nadzieję, że skutecznie – jedynie w układzie zagadnień, definicji i twierdzeń, w ich sformułowaniach zapisanych w jednolitej notacji (symbolice), komentarzach i przykładach, a także w dowodach (sposobie dowodzenia). Za innowacyjne, choć raczej dydaktycznie niż teoretycznie, można uznać jedynie opisaną w książce metodę wyszukiwania zależności definicyjnych między funktorami prawdziwościami oraz uproszczoną metodę sprawdzania poprawności logicznej wnioskowań ze zdaniemi kategorycznymi.

Po drugie, analizy dotyczą zagadnień wybranych z działów logiki wskazanych w tytule książki. Jest wobec tego nieuniknione, że brak w nich wielu problemów i związanych z nimi wyników – także takich, których można by oczekiwać w opracowaniu o podobnym zakresie. Dotyczy to zwłaszcza intensywnie dziś rozwijanych logik nieklasycznych, spośród których zostały tu uwzględnione jedynie rachunki nieklasyczne od dawna znane (można by rzec: klasyczne nieklasyczne) – a przy tym są one w książce tylko ogólnie scharakteryzowane i zilustrowane prawami, a nie przedstawione w postaci systemu. Interesujące, choć w porządku definicyjnym i dowodowym nie niezbędne, byłyby także pełniejsze wiadomości

historyczne, obejmujące nie tylko twórców, daty i tytuły dzieł, lecz także dziejowy kontekst badań i ogłaszanych wyników¹. Uwzględnienie takiego wymiaru logiki wymagałoby jednak opracowania, w którym, oprócz zdania sprawy z podstawowych jej wyników, trzeba by także pomieścić opis jej dziejów.

W rozważaniach zawartych w tej książce pojawiły się już wątki meta-przedmiotowe. Większość z nich jest w komentarzach do prezentowanych wyników logiki formalnej i teorii mnogości, na przykład w ogólnej charakterystyce własności systemów dedukcyjnych KRZ (także w uwagach porównujących systemy aksjomatyczne z założeniowymi), w rozróżnieniach dotyczących rachunku predykatów, w komentarzach co do skuteczności metod sylogistyki. Niektóre zagadnienia metalogiczne były także podjęte odrębnie, jak zależności definicyjne między spójnikami prawdziwościami (RI.1.2.3), interpretacja teorii wynikania zdań kategorycznych w WRP (RIII.3.3) i w rachunku zbiorów (RIV.1.5) oraz problemy (i rozwiązania) związane z antynomiami klasycznej teorii mnogości (RIV.4). Wątki takie wpisują się w zagadnienia podjęte w trzeciej, ostatniej części całego opracowania, poświęconej wybranym zagadnieniom metalogiki.

¹ Wiele takich informacji jest w: A. Dąbrowski, M. Hoły-Luczaj, A. Schumann i in., *Leksykon logików polskich 1900–1939*, dz. cyt. (zakres opracowania jest wskazany tytułem, w którym nazwa „logicy polscy” jest rozumiana szeroko, dzięki czemu zestaw hasel jest bogatszy).

BIBLIOGRAFIA

Zestawione są wyłącznie publikacje cytowane w niniejszej książce.

- Batóg T., *Podstawy logiki*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Adama Mickiewicza, Poznań 2003.
- Bonevac D., *The Art and Science of Logic*, Mayfield Publishing Company, Mountain View, CA 1990.
- Borkowski L., *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, Towarzystwo Naukowe Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin 1991.
- Czeżowski T., *Jak budować logikę dóbr? (1)*, w: tegoż, *Pisma z etyki i teorii wartości*, red. P. Smoczyński, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 1989, s. 130–135.
- Czeżowski T., *Jak budować logikę dóbr? (2)*, w: tegoż, *Pisma z etyki i teorii wartości*, red. P. Smoczyński, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 1989, s. 136–139.
- Czeżowski T., *Logika. Podręcznik dla studiujących nauki filozoficzne*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1968.
- Czeżowski T., *O formalnym pojęciu wartości*, „Przegląd Filozoficzny” 1919, t. 22, z. 1, s. 13–24.
- Dąbrowski A., Hoły-Łuczaj M., Schumann A., Szocik K., Woleński J., *Leksykon logików polskich 1900–1939*, Copernicus Center Press, Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Kraków–Rzeszów 2022.
- Grzegorzczak A., *Zarys logiki matematycznej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1981.
- Gumański L., *Wprowadzenie w logikę współczesną*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1990.
- Gumański L., *Wybrane zagadnienia logiki deontycznej*, w: tegoż, *Istnienie i logika*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 2006, s. 389–446.

- Haack S., *Philosophy of Logics*, Cambridge University Press, Cambridge 1978.
- Jonkisz A., *Aksjomatyczna teoria użyteczności O. Morgernsterna i J. Von Neumanna a T. Czeżowskiego formalna teoria wartości*, w: *Tadeusz Czeżowski (1889–1981): dziedzictwo idei: logika – filozofia – etyka*, red. W. Tyburski, R. Wiśniewski, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń 2002, s. 135–143.
- Jonkisz A., *Elementy logiki stosowanej*, Wyższa Szkoła Administracji w Bielsku-Białej, Bielsko-Biała 2011, 2015.
- Jonkisz A., *Formalna teoria wartości*. „Filozofia Nauki” 1998, nr 3–4, s. 121–132.
- Jonkisz A., *O tak zwanej logice dóbr*, w: *Myśli o języku, nauce i wartościach. Księga ofiarowana Profesorowi Jackowi Juliuszowi Jadackiemu w sześćdziesiątą rocznicę urodzin*, red. W. Strawiński, M. Grygianiec, A. Brożek, Wydawnictwo Naukowe Semper, Warszawa 2006, s. 421–429.
- Jonkisz A., *Tadeusza Czeżowskiego formalne pojęcie wartości*, w: *Polska filozofia analityczna. W kręgu Szkoły Lwowsko-Warszawskiej*, red. W. Tyburski, R. Wiśniewski, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 1999, s. 197–206.
- Jonkisz A., *Zagadnienia semiotyki logicznej i ogólnej metodologii nauk*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Ignatianum w Krakowie, Kraków 2023.
- Jonkisz A., *Zagadnienia syntaktyki i semantyki systemów dedukcyjnych*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Ignatianum w Krakowie, Kraków 2023.
- Kobziński J.K., *Logiki pośrednie*, w: *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, red. W. Marciszewski, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1987, s. 369–381.
- Koj L., *Powinności w nauce*. T. 1: *Określenie i poznawalność powinności*, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin 1998.
- Kopania J., *Systemy Leśniewskiego*, w: *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, red. W. Marciszewski, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1987, s. 397–405.
- Kozanecka A., *O rodzajach logik temporalnych*, „Roczniki Filozoficzne” 2007, t. 55, nr 1, s. 189–199.

- Kozanecka-Dymek A., *Geneza niektórych systemów logiki temporalnej*, „Roczniki Filozoficzne” 2009, t. 57, nr 1, s. 75–90.
- Krajewski S., *Antynomie*, w: *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, red. W. Marciszewski, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1987, s. 174–181.
- Krajewski S., *Logika intuicjonistyczna*, w: *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, red. W. Marciszewski, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1987, s. 360–368.
- Kulicki P., *Aksjomatyczne systemy rachunku nazw*, Wydawnictwo Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin 2011.
- Kuratowski K., Mostowski A., *Teoria mnogości. Wraz ze wstępem do opisowej teorii mnogości*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1978.
- Lechniak M., *Czym są modalności i jak je rozróżniać? Próby klasyfikacji modalności*, w: *Jedność i wielość logik modalnych*, red. M. Tkaczyk, *Jedność i wielość logik modalnych*, Wydawnictwo Naukowe Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin 2019, s. 63–80.
- Lechniak M., *Elementy logiki dla prawników*, Wydawnictwo Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin 2012.
- Lechniak M., *Interpretacje wartości matryc logik wielowartościowych*, Redakcja Wydawnictw Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin 1999.
- Lechniak M., *Logiki epistemiczne*, w: *Jedność i wielość logik modalnych*, red. M. Tkaczyk, Wydawnictwo Naukowe Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin 2019, s. 135–203.
- Lechniak M., *Przekonania i zmiana przekonań: analiza logiczna i filozoficzna*. Wydawnictwo Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin 2011.
- Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, red. W. Marciszewski, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1987.
- Łukasiewicz D., *Filozofia Tadeusza Czeżowskiego*, Wydawnictwo Akademii Bydgoskiej, Bydgoszcz 2020.
- Łukasiewicz J., *Elementy logiki matematycznej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1958.
- Łukasiewicz J., *O determinizmie*, w: tegoż, *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1961, s. 114–126.

- Łukasiewicz J., *Sylogistyka Arystotelesa z punktu widzenia współczesnej logiki formalnej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1988.
- Łukasiewicz J., *System logiki modalnej*, w: tegoż, *Z zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1961, s. 275–305.
- Malinowski G., *Logiki wielowartościowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
- Mała encyklopedia logiki*, red. W. Marciszewski, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 1988.
- Marciszewski W., *Aksjomatyczne ujęcie teorii mnogości*, w: *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, red. W. Marciszewski, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1987, s. 121–131.
- Pascucci M., Tuboly A.T. (red.), *Reflecting on the Legacy of C.I. Lewis: Contemporary and Historical Perspectives on Modal Logic*, „Organon F” (Special Issue) 2019, t. 26, nr 3, s. 318–539.
- Pogorzelski W.A., *Elementarny słownik logiki formalnej*, Dział Wydawnictw Filii Uniwersytetu Warszawskiego, Białystok 1992.
- Pogorzelski W.A., *Klasyczny rachunek kwantyfikatorów. Zarys teorii*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1981.
- Pogorzelski W.A., *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975.
- Słupecki J., Borkowski L., *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1963.
- Słupecki J., Hałkowska K., Piróg-Rzepecka K., *Logika i teoria mnogości*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1978.
- Świrydowicz K., *Logiczne teorie obowiązku warunkowego*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Adama Mickiewicza, Poznań 1995.
- Świrydowicz K., *Podstawy logiki modalnej*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Adama Mickiewicza, Poznań 2004.
- Tkaczyk M. (red.), *Jedność i wielość logik modalnych*, Wydawnictwo Naukowe Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin 2019.
- Tkaczyk M., *Założeniowe systemy normalnych logik modalnych*, „Roczniki Filozoficzne” 2007, t. 55, nr 1, s. 219–228.
- Woleński J., *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1985.
- Woleński J., *Łukasiewicz, Jan*, w: A. Dąbrowski, M. Hoły-Łuczaj, A. Schumann, K. Szocik, J. Woleński, *Leksykon logików polskich 1900–1939*,

- Copernicus Center Press, Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Kraków, Rzeszów 2022, s. 214–226.
- Woleński J., *Many-Valueness and Modality*, „Ruch Filozoficzny” 2019, t. 75, nr 2, s. 61–74.
- Woleński J., *O predykcje jest prawdą*, w: *Prawda*, red. D. Leszczyński, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2011, s. 31–44.
- Woleński J., *Przyczynek do analizy dozwolenia*, w: tegoż, *W stronę logiki*, Aureus, Kraków 1996, s. 177–181.
- Woleński J., *Semantics and Truth*, Springer, Cham 2019.
- Ziemiński Z., *Logika praktyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1974.

DEFINICJE, TWIERDZENIA, SCHEMATY

Zestawione są wyłącznie numerowane w tekście definicje i twierdzenia oraz schematy reguł wnioskowania – uporządkowane zgodnie z kolejnością rozdziałów i podrozdziałów książki.

****RI. Klasyczny rachunek zdań (KRZ)**

****RI.1 = Język KRZ**

D1 Wyrażeniami (formułami) KRZ są wszystkie i tylko:

- (i) pojedyncze zmienne zdaniowe;
- (ii) wyrażenia otrzymane z dowolnej formuły KRZ przez poprzedzenie tej formuły znakiem negacji, tzn. jeżeli Φ jest formułą KRZ, to również $\sim(\Phi)$ jest formułą KRZ;
- (iii) wyrażenia otrzymane z dowolnych dwóch formuł KRZ przez ich połączenie znakiem spójnika prawdziwościowego, tzn. jeśli są formułami Φ oraz Ψ , to są formułami także wyrażenia: $(\Phi) \wedge (\Psi)$, $(\Phi) \vee (\Psi)$, $(\Phi) \underline{\vee} (\Psi)$, $(\Phi) / (\Psi)$, $(\Phi) \Rightarrow (\Psi)$, $(\Phi) \Leftrightarrow (\Psi)$, $(\Phi) \Downarrow (\Psi)$ itd.

D2

- (i) Φ jest wyrażeniem 1. rzędu KRZ *wtw* Φ jest zmienną zdaniową;
- (ii) Φ jest wyrażeniem k -tego rzędu *wtw* istnieją takie wyrażenia Φ_1 i Φ_2 rzędów niższych od k , że Φ jest identyczne z $\lceil \sim\Phi_1 \rceil$ albo z jednym spośród wyrażeń:
 $\lceil \Phi_1 \wedge \Phi_2 \rceil$, $\lceil \Phi_1 \vee \Phi_2 \rceil$, $\lceil \Phi_1 \underline{\vee} \Phi_2 \rceil$, $\lceil \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \rceil$, $\lceil \Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2 \rceil$, $\lceil \Phi_1 \Downarrow \Phi_2 \rceil$,
 $\lceil \Phi_1 / \Phi_2 \rceil$ itd.;
- (iii) Φ jest wyrażeniem KRZ *wtw* istnieje taka liczba naturalna n , że Φ jest wyrażeniem n -tego rzędu KRZ.

*RV.4.1: **D1** Funktor zdaniotwórczy jest prawdziwościowy wtedy i tylko, gdy wartość logiczna każdego zdania, w którym dany funktor jest łącznikiem głównym, zależy wyłącznie od wartości logicznej jego argumentów w danym zdaniu.

D3.

- a Funkcje n -argumentowe o argumentach ze zbioru wartości logicznych A i wartościach w tym zbiorze to funkcje prawdziwościowe.
- b Wartościowania to nieskończone ciągi wartości logicznych czerpanych ze zbioru A .

*RV.4.2: **D3.a**

Φ	$\sim\Phi$
1	0
0	1

*RV.4.2: **D3.b**

Φ	Ψ	\wedge	\vee	$\underline{\vee}$	\Rightarrow	\Leftrightarrow	\Downarrow
1	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1

D4

Φ	vr	as	\sim	fl
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

D5

Φ	Ψ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0
		\vee			\Rightarrow /			\Leftrightarrow			$\underline{\vee}$		\Downarrow			\wedge	

- D6** n -argumentowy funktor prawdziwościowy F jest definiowalny za pomocą funktorów F_1, \dots, F_k *wtw* istnieje takie wyrażenie zdaniowe $\Phi(F_1, \dots, F_k; p_1, \dots, p_n)$ zapisane wyłącznie za pomocą zmiennych zdaniowych p_1, \dots, p_n oraz funktorów F_1, \dots, F_k , że prawdziwa jest równoważność: $F(p_1, \dots, p_n) \Leftrightarrow \Phi(F_1, \dots, F_k; p_1, \dots, p_n)$.
- T1** Każdy funktor prawdziwościowy F jest definiowalny przez koniunkcję, alternatywę i negację, czyli jest tak, że $F|\wedge, \vee, \sim$.
- T2** Każdy funktor prawdziwościowy F jest definiowalny przez dowolny funktor rodzaju 1/3 oraz negację, czyli jest tak, że $F|1/3, \sim$.
- T3** Każdy funktor prawdziwościowy rodzaju 1/3 jest definiowalny przez dowolny funktor rodzaju 1/3 oraz negację, czyli jest tak, że $1/3|1/3', \sim$.
- T4** Każdy funktor prawdziwościowy F jest definiowalny wyłącznie przez \Downarrow oraz wyłącznie przez $/$.

****RI.2 = Tautologie/prawa KRZ**

RIX.1: **D10** Tautologia KRZ to formuła, która dla dowolnego podstawienia wartości logicznych za występujące w niej zmienne zdaniowe (dla dowolnego wartościowania) uzyskuje końcową wartość prawdziwości (jedynekę).

D1 Formuła Φ jest tautologią KRZ wtedy i tylko, gdy dla każdego jej wartościowania w : $V(\langle \Phi, w \rangle) = 1$.

****RI.3 = Założeniowy system KRZ**

RO

$$\frac{\Phi \Rightarrow \Psi}{\Phi} \Psi$$

DK

$$\frac{\Phi \quad \Psi}{\Phi \wedge \Psi}$$

OK

$$\frac{\Phi \wedge \Psi}{\Phi(\Psi)}$$

DR

$$\frac{\begin{array}{c} \Phi \Rightarrow \Psi \\ \Psi \Rightarrow \Phi \end{array}}{\Phi \Leftrightarrow \Psi}$$

OR

$$\frac{\Phi \Leftrightarrow \Psi}{\Phi \Rightarrow \Psi (\Psi \Rightarrow \Phi)}$$

DA

$$\frac{\Phi}{\Phi \vee \Psi}$$

OA

$$\frac{\begin{array}{c} \Phi \vee \Psi \\ \sim \Phi (\sim \Psi) \end{array}}{\Psi (\Phi)}$$

D1.a Reguła R dołączania nowych wierszy do dowodu jest w danym systemie założeniowym wtórna ze względu na tezę T *wtw* dla dowolnych wyrażeń Φ oraz $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, o ile Φ jest wyprowadzalne z $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ według reguły R , to jest też wyprowadzalne z $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ i tezy T według reguł pierwotnych tego systemu.

D1.b Reguła R dołączania nowych wierszy do dowodu jest w danym systemie założeniowym wtórna *wtw* dla dowolnych wyrażeń Φ oraz $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, o ile Φ jest wyprowadzalne z $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ według reguły R , to jest też wyprowadzalne z $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ i tez danego systemu według jego reguł pierwotnych.

D1.c Jeśli R oraz R' są regułami tworzenia dowodów, to reguła R' jest wtórna ze względu na regułę R *wtw* dla dowolnego wyrażenia Φ , o ile istnieje dowód Φ według reguły R' , to istnieje dowód wyrażenia Φ według reguły R .

T1 $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$.

T2 $(p \vee q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow p)$.

T3 $\sim \sim p \Rightarrow p$;

T4 $p \Rightarrow \sim \sim p$

T5 $\sim \sim p \Leftrightarrow p$

ON

$$\frac{\sim \sim \Phi}{\Phi}$$

DN

$$\frac{\Phi}{\sim \sim \Phi}$$

OA:

$$\frac{\begin{array}{c} \sim \Phi \vee \Psi \\ \Phi \end{array}}{\Psi}$$

$$\frac{\begin{array}{c} \Phi \vee \sim \Psi \\ \Psi \end{array}}{\Phi}$$

$$\mathbf{T6} \quad [(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$$

TOL

$$\frac{\begin{array}{c} \Phi \Rightarrow \Psi \\ \sim \Psi \end{array}}{\sim \Phi}$$

TOL:

$$\frac{\begin{array}{c} \Phi \Rightarrow \Psi \\ \sim \Psi \end{array}}{\sim \Phi} \quad \frac{\begin{array}{c} \Phi \Rightarrow \sim \Psi \\ \Psi \end{array}}{\sim \Phi} \quad \frac{\begin{array}{c} \sim \Phi \Rightarrow \Psi \\ \sim \Psi \end{array}}{\Phi} \quad \frac{\begin{array}{c} \sim \Phi \Rightarrow \sim \Psi \\ \Psi \end{array}}{\Phi}$$

$$\mathbf{T7} \quad (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

$$\mathbf{TR} \quad \frac{\frac{\Phi \Rightarrow \Psi}{\sim \Psi \Rightarrow \sim \Phi}}$$

$$\mathbf{T8} \quad [p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)].$$

$$\mathbf{T9} \quad [(p \vee q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$$

$$\mathbf{T10} \quad [(p \vee q \vee r) \Rightarrow s] \Rightarrow [(p \Rightarrow s) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge (r \Rightarrow s)]$$

$$\mathbf{T11} \quad \sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

$$\mathbf{NA} \quad \frac{\frac{\sim(\Phi \vee \Psi)}{\sim \Psi \wedge \sim \Phi}}$$

$$\mathbf{T12} \quad p \vee \sim p$$

$$\mathbf{T13} \quad \sim(p \wedge \sim p)$$

$$\mathbf{T14} \quad (p \wedge \sim p) \Rightarrow q$$

$$\mathbf{T15} \quad \sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

$$\mathbf{NK} \quad \frac{\frac{\sim(\Phi \wedge \Psi)}{\sim \Psi \vee \sim \Phi}}$$

$$\mathbf{T16} \quad (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

$$\mathbf{T17} \quad [(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q]$$

$$\mathbf{T18} \quad q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

T19 $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

T20 $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q),$

NI
$$\frac{\sim(\Phi \Rightarrow \Psi)}{\Phi \wedge \sim \Psi}$$

T21 $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow r)$

T22 $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$

T23 $[(p \Leftrightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

RO
$$\Leftrightarrow \frac{\Phi \Leftrightarrow \Psi}{\frac{\Phi(\Psi)}{\Psi(\Phi)}}$$

T24 $[(p \Leftrightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

TOL
$$\Leftrightarrow \frac{\Phi \Leftrightarrow \Psi}{\frac{\sim \Psi(\sim \Phi)}{\sim \Phi(\sim \Psi)}}$$

T25 $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Leftrightarrow \sim p)$

TR
$$\Leftrightarrow \frac{\Phi \Leftrightarrow \Psi}{\sim \Psi \Leftrightarrow \sim \Phi}$$

T26 $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

T27 $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$

MIS
$$\frac{\begin{array}{l} \Phi_1 \Rightarrow \Psi_1 \\ \Phi_2 \Rightarrow \Psi_2 \\ \dots\dots\dots \\ \Phi_n \Rightarrow \Psi_n \end{array}}{(\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \dots \wedge \Phi_n) \Rightarrow (\Psi_1 \wedge \Psi_2 \wedge \dots \wedge \Psi_n)}$$

T28 $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow r$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{DKP} \quad \Phi_1 \Rightarrow \Psi \\
 \quad \quad \Phi_2 \Rightarrow \Psi \\
 \quad \quad \dots\dots\dots \\
 \quad \quad \Phi_n \Rightarrow \Psi \\
 \hline
 \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \dots \vee \Phi_n \\
 \Psi
 \end{array}$$

$$\mathbf{T29} \quad [(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{DKZ} \quad \Phi_1 \Rightarrow \Psi_1 \\
 \quad \quad \Phi_2 \Rightarrow \Psi_2 \\
 \quad \quad \dots\dots\dots \\
 \quad \quad \Phi_n \Rightarrow \Psi_n \\
 \hline
 \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \dots \vee \Phi_n \\
 \Psi_1 \vee \Psi_2 \vee \dots \vee \Psi_n
 \end{array}$$

$$\mathbf{T30} \quad [(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{DIS} \quad \quad \quad \Phi_1 \Rightarrow \Psi_1 \\
 \quad \quad \quad \Phi_2 \Rightarrow \Psi_2 \\
 \quad \quad \quad \dots\dots\dots \\
 \quad \quad \quad \Phi_n \Rightarrow \Psi_n \\
 \hline
 (\Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \dots \vee \Phi_n) \Rightarrow (\Psi_1 \vee \Psi_2 \vee \dots \vee \Psi_n)
 \end{array}$$

$$\mathbf{T31} \quad [(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge \sim(q \vee s)] \Rightarrow \sim(p \vee r)$$

$$\mathbf{T32} \quad [(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \vee r) \wedge \sim(q \wedge s)] \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (s \Rightarrow r)]$$

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{OIS} \quad \quad \quad \Phi_1 \Rightarrow \Psi_1 \\
 \quad \quad \quad \Phi_2 \Rightarrow \Psi_2 \\
 \quad \quad \quad \dots\dots\dots \\
 \quad \quad \quad \Phi_n \Rightarrow \Psi_n \\
 \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \dots \vee \Phi_n \\
 \sim(\Psi_i \wedge \Psi_j), \text{ dla } 1 \leq i \neq j \leq n \\
 \hline
 \Psi_1 \Rightarrow \Phi_1 \\
 \Psi_2 \Rightarrow \Phi_2 \\
 \quad \quad \quad \dots\dots\dots \\
 \Psi_n \Rightarrow \Phi_n
 \end{array}$$

T33 $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow s)] \Rightarrow [(p F r) \Leftrightarrow (q F s)], \quad F \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \dots\}$

T33a $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge s)]$

T33b $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee s)]$

T33c $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow s)] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow s)]$

MT33 $(\Phi \Leftrightarrow \Psi) \Rightarrow (X \Leftrightarrow X(\Phi//\Psi)).$

RZ _⇔	równoważnie:	
	$\frac{\Phi \Leftrightarrow \Psi}{X \Leftrightarrow X(\Phi//\Psi)}$	$\frac{\Phi \Leftrightarrow \Psi}{X}$ $\frac{X}{X(\Phi//\Psi)}$

RP
$$\frac{\Phi}{\Phi(t_1/\Psi_1, t_2/\Psi_2, \dots, t_n/\Psi_n)}$$

T34 $\sim(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$

T35 $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

T35a $[(p \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow [r \wedge (p \vee q)]$

T35b $(p \wedge r) \Leftrightarrow (r \wedge p)$

T35c $(q \wedge r) \Leftrightarrow (r \wedge q)$

T36 $[(p \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$

T37 $[r \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow [(r \wedge p) \vee (r \wedge q)]$

T37a $[p \wedge (r \vee s)] \Leftrightarrow [(p \wedge r) \vee (p \wedge s)]$

T37b $[q \wedge (r \vee s)] \Leftrightarrow [(q \wedge r) \vee (q \wedge s)]$

T38 $[(p \vee q) \wedge (r \vee s)] \Leftrightarrow \{[p \wedge (r \vee s)] \vee [q \wedge (r \vee s)]\}$

T39 $[(p \vee q) \wedge (r \vee s)] \Leftrightarrow \{[(p \wedge r) \vee (p \wedge s)] \vee [(q \wedge r) \vee (q \wedge s)]\}$

RZ_{=df}
$$\frac{\Phi \stackrel{\text{df}}{=} \Psi}{X}$$

 $X(\Phi//\Psi)$

****RII. Nieklasyczne rachunki zdań******RII.1 = Logika wielowartościowa****D1.1**

p	$\sim p$
1	0
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1

D1.2.a

$$\sim p = 1 - p;$$

$$p \wedge q = \min(p, q)$$

$$p \vee q = \max(p, q)$$

$$p \Rightarrow q = 1, \text{ gdy } p \leq q; = (1 - p + q), \text{ gdy } p > q$$

$$p \Leftrightarrow q = \min(\min(1, 1 - p + q), \min(1, 1 - q + p))$$

D1.2.b

$$V(\sim \Phi) = 1 - V(\Phi)$$

$$V(\Phi \wedge \Psi) = \min(V(\Phi), V(\Psi))$$

$$V(\Phi \vee \Psi) = \max(V(\Phi), V(\Psi))$$

$$V(\Phi \Rightarrow \Psi) = 1, \text{ gdy } V(\Phi) \leq V(\Psi), (1 - V(\Phi)) + V(\Psi), \text{ gdy } V(\Phi) > V(\Psi)$$

$$V(\Phi \Leftrightarrow \Psi) = 1 - |V(\Phi) - V(\Psi)|$$

D2

p	$\mathbf{M}p$
1	1
$\frac{1}{2}$	1
0	0

****RII.2 = Logika modalna**

T1.a $Kp / K\sim p$

T1.b $Mp \vee M\sim p$

T1.c $Kp \underline{\vee} M\sim p$

T2.a $Kp \Rightarrow p$

T2.b $Kp \Rightarrow Mp$

T2.c $p \Rightarrow Mp$

T3.a $[K(p \Rightarrow q) \wedge Kp] \Rightarrow Kq$

T3.b $[K(p \Rightarrow q) \wedge K\sim q] \Rightarrow K\sim p$

T4.a $K(p \wedge q) \Leftrightarrow (Kp \wedge Kq)$

T4.b $M(p \vee q) \Leftrightarrow (Mp \vee Mq)$

T5.a $(Kp \vee Kq) \Rightarrow K(p \vee q)$

T5.b $M(p \wedge q) \Rightarrow (Mp \wedge Mq)$

D1.a $Mp =_{\text{df}} \sim K\sim p$

D1.b $Kp =_{\text{df}} \sim M\sim p$

D2.a $(p \rightarrow q) =_{\text{df}} \sim M(p \wedge \sim q)$

D2.b $(p \triangle q) =_{\text{df}} M(p \wedge q)$

****RII.2 = Logika deontyczna**

T1.a $Np / N\sim p$

T1.b $Dp \vee D\sim p$

T1.c $Np \underline{\vee} D\sim p$

T1.d Np / Zp

T1.e $Zp \underline{\vee} Dp$

T2.a $Np \Leftrightarrow \sim D\sim p$

T2.b $Zp \Leftrightarrow N\sim p$

T2.c $Zp \Leftrightarrow \sim Dp$

T2.d $Np \Rightarrow Dp$

T3.a $[N(p \Rightarrow q) \wedge Np] \Rightarrow Nq$

$$\mathbf{T3.b} \quad [\mathbf{N}(p \Rightarrow q) \wedge \mathbf{D}p] \Rightarrow \mathbf{D}q$$

$$\mathbf{T3.c} \quad [\mathbf{N}(p \Rightarrow q) \wedge \mathbf{Z}q] \Rightarrow \mathbf{Z}p$$

$$\mathbf{T4.a} \quad \mathbf{N}(p \wedge g) \Leftrightarrow (\mathbf{N}p \wedge \mathbf{N}g)$$

$$\mathbf{T4.b} \quad \mathbf{D}(p \vee g) \Leftrightarrow (\mathbf{D}p \vee \mathbf{D}g)$$

$$\mathbf{T4.c} \quad \mathbf{Z}(p \vee g) \Leftrightarrow (\mathbf{Z}p \wedge \mathbf{Z}g)$$

$$\mathbf{D1.a} \quad \mathbf{Z}p =_{\text{df}} \mathbf{N}\sim p$$

$$\mathbf{D1.b} \quad \mathbf{D}p =_{\text{df}} \sim \mathbf{N}\sim p.$$

$$\mathbf{D2.a} \quad \mathbf{O}p =_{\text{df}} (\sim \mathbf{N}p \wedge \sim \mathbf{Z}p)$$

$$\mathbf{D2.b} \quad \mathbf{F}p =_{\text{df}} \sim \mathbf{N}p.$$

$$\mathbf{D2.c} \quad \mathbf{W}p =_{\text{df}} (\mathbf{N}p \vee \mathbf{Z}p).$$

**RIII. Rachunek predykatów

**RIII.2 = Klasyczny rachunek predykatów

Reguła opuszczania kwantyfikatora ogólnego

$$\mathbf{O}\Lambda \quad \frac{(\Lambda \alpha) \Phi}{\Phi(\alpha/\beta)}$$

Reguła dołączania kwantyfikatora ogólnego

$$\mathbf{D}\Lambda \quad \frac{\Phi}{(\Lambda \alpha) \Phi}$$

Reguła dołączania kwantyfikatora szczegółowego

$$\mathbf{D}\vee \quad \frac{\Phi(\alpha/\beta)}{(\vee \alpha) \Phi}$$

Reguła opuszczania kwantyfikatora szczegółowego

– z wprowadzaniem stałych

$$\mathbf{O}\vee \quad \frac{(\vee \alpha) \Phi}{\Phi(\alpha/\tau_{\beta_1}, \dots, \beta_n)}$$

dla $n = 0$:

$$\frac{(\forall \alpha) \Phi}{\Phi(\alpha/\tau)}$$

– bez wprowadzania stałych

$$\text{OV} \quad \frac{(\forall \alpha) \Phi \quad \Phi \Rightarrow \Psi}{\Psi}$$

$$\text{D1.a} \quad (\wedge \alpha) \Psi \Leftrightarrow (\wedge \alpha) [\Phi(\alpha) \Rightarrow \Psi]$$

albo $(\wedge \alpha) \Psi =_{\text{df}} (\wedge \alpha) [\Phi(\alpha) \Rightarrow \Psi]$

$$\text{D1.b} \quad (\forall \alpha) \Psi \Leftrightarrow (\forall \alpha) [\Phi(\alpha) \wedge \Psi]$$

albo $(\forall \alpha) \Psi =_{\text{df}} (\forall \alpha) [\Phi(\alpha) \wedge \Psi]$.

$$\text{T1} \quad (\wedge x) A(x) \Rightarrow A(y)$$

$$\text{T2} \quad A(y) \Rightarrow (\forall x) A(x)$$

$$\text{MT1} \quad \vdash (\wedge \alpha) \Phi \Rightarrow \Phi(\alpha/\beta)$$

$$\text{MT2} \quad \vdash \Phi(\alpha/\beta) \Rightarrow (\forall \alpha) \Phi$$

$$\text{T3} \quad \sim(\wedge x) A(x) \Leftrightarrow (\forall x) \sim A(x)$$

$$\text{T4} \quad \sim(\forall x) A(x) \Leftrightarrow (\wedge x) \sim A(x)$$

$$\sim\forall \quad \frac{\sim(\forall \alpha) \Phi}{(\wedge \alpha) \sim\Phi}$$

$$\text{MMT1} \quad \vdash \sim(\mathbf{K}) \Phi \Leftrightarrow \mathbf{K}' \sim\Phi.$$

$$\text{T5} \quad (\wedge x) [A(x) \wedge B(x)] \Leftrightarrow ((\wedge x) A(x) \wedge (\wedge x) B(x))$$

$$\wedge\wedge \quad \frac{(\wedge \alpha) [\Phi \wedge \Psi]}{(\wedge \alpha) \Phi \wedge (\wedge \alpha) \Psi}$$

$$\text{T6} \quad (\wedge x) [A(x) \Rightarrow B(x)] \Rightarrow ((\wedge x) A(x) \Rightarrow (\wedge x) B(x))$$

$$\wedge|\Rightarrow \quad \frac{(\wedge \alpha) [\Phi \Rightarrow \Psi] \quad (\wedge \alpha) \Phi}{(\wedge \alpha) \Psi}$$

$$\mathbf{T7} \quad (\wedge x) [A(x) \Rightarrow B(x)] \Rightarrow ((\vee x) A(x) \Rightarrow (\vee x) B(x))$$

$$\mathbf{T8} \quad (\wedge x) [A(x) \Leftrightarrow B(x)] \Rightarrow ((\wedge x) A(x) \Leftrightarrow (\wedge x) B(x))$$

$$\mathbf{T9} \quad (\wedge x) [A(x) \Leftrightarrow B(x)] \Rightarrow ((\vee x) A(x) \Leftrightarrow (\vee x) B(x))$$

$$\Lambda|\Leftrightarrow \frac{(\wedge \alpha) [\Phi \Leftrightarrow \Psi]}{(\wedge \alpha) \Phi \Leftrightarrow (\wedge \alpha) \Psi} \quad \Lambda|\vee_{\Leftrightarrow} \frac{(\wedge \alpha) [\Phi \Leftrightarrow \Psi]}{(\vee \alpha) \Psi \Leftrightarrow (\vee \alpha) \Phi}$$

$$\mathbf{MT3} \quad (\wedge \alpha) [\Phi \Leftrightarrow \Psi] \Rightarrow ((K\alpha) \Phi \Leftrightarrow (K\alpha) \Psi)$$

$$\mathbf{MMT2} \quad \vdash (\wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) [\Phi \Leftrightarrow \Psi] \Rightarrow (\mathbf{K} \Phi \Leftrightarrow \mathbf{K} \Psi)$$

$$\mathbf{RZ}_{\Lambda \Leftrightarrow} \frac{(\wedge \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) [\Phi \Leftrightarrow \Psi]}{X} \\ \hline X(\Phi // \Psi)$$

$$\mathbf{RZ}_{\Leftrightarrow} \frac{\Phi \Leftrightarrow \Psi}{X} \\ \hline X(\Phi // \Psi)$$

$$\mathbf{T10} \quad ((\wedge x) A(x) \vee (\wedge x) B(x)) \Rightarrow (\wedge x) [A(x) \vee B(x)]$$

$$\vee|\Lambda \frac{(\wedge \alpha) \Phi \vee (\wedge \alpha) \Psi}{(\wedge \alpha) [\Phi \vee \Psi]}$$

$$\mathbf{T11} \quad (\vee x) [A(x) \wedge B(x)] \Rightarrow ((\vee x) A(x) \wedge (\vee x) B(x))$$

$$\vee|\wedge \frac{(\vee \alpha) [\Phi \wedge \Psi]}{(\vee \alpha) \Phi \wedge (\vee \alpha) \Psi}$$

$$\mathbf{T12} \quad (\vee x) [A(x) \vee B(x)] \Leftrightarrow ((\vee x) A(x) \vee (\vee x) B(x))$$

$$\vee|\vee \frac{(\vee \alpha) [\Phi \vee \Psi]}{(\vee \alpha) \Phi \vee (\vee \alpha) \Psi}$$

$$\mathbf{T13} \quad (\wedge x) [p \vee A(x)] \Leftrightarrow (p \vee (\wedge x) A(x))$$

$$\mathbf{T14} \quad (\vee x) [p \wedge A(x)] \Leftrightarrow (p \wedge (\vee x) A(x))$$

$$\mathbf{T15} \quad (\wedge x) [p \Rightarrow A(x)] \Leftrightarrow (p \Rightarrow (\wedge x) A(x))$$

$$\mathbf{T16} \quad (\vee x) [p \Rightarrow A(x)] \Leftrightarrow (p \Rightarrow (\vee x) A(x))$$

$$\mathbf{T17} \quad (\wedge x) [A(x) \Rightarrow p] \Leftrightarrow ((\vee x) A(x) \Rightarrow p)$$

$$\mathbf{T18} \quad (\forall x) [A(x) \Rightarrow p] \Leftrightarrow ((\wedge x) A(x) \Rightarrow p)$$

$$\mathbf{T19} \quad (\wedge x) [A(x) \Rightarrow p] \Rightarrow ((\wedge x) A(x) \Rightarrow p)$$

$$\mathbf{T20} \quad ((\forall x) A(x) \Rightarrow p) \Rightarrow (\forall x) [A(x) \Rightarrow p]$$

$$\mathbf{A1} \quad x = x$$

$$\mathbf{T21} \quad (\forall y) y = x$$

$$\mathbf{RZ}_= \quad \frac{\tau_1 = \tau_2 \quad \Phi}{\Phi(\tau_1 // \tau_2)}$$

$$\mathbf{T22} \quad x = y \Rightarrow y = x$$

$$\mathbf{T23} \quad x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$$

$$\mathbf{T24} \quad (P(x) \wedge x = y) \Rightarrow P(y)$$

$$\mathbf{T25} \quad (P(x) \wedge \sim P(y)) \Rightarrow \sim(x = y)$$

$$\mathbf{T26} \quad P(x) \Leftrightarrow (\forall y = x) P(y)$$

$$\mathbf{T27} \quad P(x) \Leftrightarrow (\wedge y = x) P(y)$$

$$\mathbf{MD1} \quad \vdash^1 (\forall_1 \alpha) \Phi(\alpha) \Leftrightarrow (\forall \alpha) \Phi(\alpha) \wedge \sim(\forall \alpha, \beta) [\Phi(\alpha) \wedge \Phi(\beta) \wedge \alpha \neq \beta]^1$$

$$\mathbf{T28} \quad \sim(\forall_1 x) P(x) \Leftrightarrow \sim(\forall x) P(x) \vee (\forall x, y) [P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y]$$

$$\mathbf{MT4} \quad \vdash^1 (\forall_1 \alpha) \Phi(\alpha) \Leftrightarrow (\forall \alpha) \Phi(\alpha) \wedge (\wedge \alpha, \beta) [(\Phi(\alpha) \wedge \Phi(\beta)) \Rightarrow \alpha = \beta]^1$$

$$\mathbf{MT5} \quad \vdash^1 (\forall_1 \alpha) \Phi(\alpha) \Leftrightarrow (\forall \alpha) [\Phi(\alpha) \wedge (\wedge \beta) \Phi(\beta) \Rightarrow \beta = \alpha]^1$$

$$\mathbf{T29.a} \quad (\forall y) y = x$$

$$\mathbf{T29.b} \quad (\forall_1 y) y = x$$

$$\mathbf{T30.a} \quad (\forall y) y = x \wedge (\wedge y, z) [(y = x \wedge z = x) \Rightarrow y = z]$$

$$\mathbf{T30.b} \quad (\wedge x) [(\forall y) y = x \wedge (\wedge y, z) [(y = x \wedge z = x) \Rightarrow y = z]]$$

$$\mathbf{T31} \quad (\wedge x) [P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \Rightarrow ((\forall_1 x) P(x) \Leftrightarrow (\forall_1 x) Q(x))$$

**RIII.3 = Teoria wynikania zdań kategoriycznych

$\sim(S a P) \Leftrightarrow S o P$	$\sim(S e P) \Leftrightarrow S i P$	$\sim(S i P) \Leftrightarrow S e P$	$\sim(S o P) \Leftrightarrow S a P$
-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

zдания przeciwne	zдания podprzeciwne	zдания podporządkowane
$S a P \Rightarrow \sim(S e P)$ $S e P \Rightarrow \sim(S a P)$	$\sim(S i P) \Rightarrow (S o P)$ $\sim(S o P) \Rightarrow (S i P)$	$S a P \Rightarrow S i P$ $S e P \Rightarrow S o P$

- konwersja zwykła: $S e P \Leftrightarrow P e S$ $S i P \Leftrightarrow P i S$
- konwersja ograniczona: $S a P \Rightarrow P i S$ $S e P \Rightarrow P o S$
- obwersja:
 $S a P \Leftrightarrow S e n P$ $S i P \Leftrightarrow S o n P$ $S e P \Leftrightarrow S a n P$ $S o P \Leftrightarrow S i n P$
- kontrapozycja zupełna:
 $S a P \Leftrightarrow n P a n S$ $S o P \Leftrightarrow n P o n S$ $S e P \Rightarrow n P o n S$
- kontrapozycja ograniczona:
 $S a P \Leftrightarrow n P e S$ $S o P \Leftrightarrow n P i S$ $S e P \Rightarrow n P i S$
- inwersja zupełna: $S a P \Rightarrow n S i n P$ $S e P \Rightarrow n S o n P$
- inwersja niezupełna: $S a P \Rightarrow n S o P$ $S e P \Rightarrow n S i P$

I	II	III	IV
$M f P$ $S f M$	$P f M$ $S f M$	$M f P$ $M f S$	$P f M$ $M f S$
$S f P$	$S f P$	$S f P$	$S f P$

Tryby niezawodne:

- figura I: Barbara, Celarent, Darii, Ferio oraz Barbari i Celaront;
- figura II: Cesare, Camestres, Festino, Baroco oraz Cesaro i Camestros;
- figura III: Darapti, Disamis, Datisi, Felapton, Bocardo, Ferison;
- figura IV: Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison oraz Calemos.

Dyrektywy dla przesłanek i wniosku:

D(i) Pośród przesłanek ma być (co najmniej jedna) przesłanka twierdząca oraz przesłanka ogólna, a termin średni musi być w przesłankach (w co najmniej jednej) rozłożony.

D(ii) wniosek może być twierdzący, tylko gdy obie przesłanki są twierdzące, a ogólny, tylko gdy obie przesłanki są ogólne oraz termin rozłożony we wniosku musi być rozłożony w przesłankach.

S|WRP

- $S a P \Leftrightarrow$ Nie istnieją S , które nie są $P \Leftrightarrow (\wedge x) [S(x) \Rightarrow P(x)]$
- $S e P \Leftrightarrow$ Nie istnieją S , które są $P \Leftrightarrow (\wedge x) [S(x) \Rightarrow \sim P(x)]$
- $S i P \Leftrightarrow$ Istnieją S , które są $P \Leftrightarrow (\vee x) [S(x) \wedge P(x)]$
- $S o P \Leftrightarrow$ Istnieją S , które nie są $P \Leftrightarrow (\vee x) [S(x) \wedge \sim P(x)]$

Interpretacja mocna:

$$S a P \Leftrightarrow (\wedge x) [S(x) \Rightarrow P(x)] \wedge (\vee x) S(x);$$

$$S e P \Leftrightarrow (\wedge x) [S(x) \Rightarrow \sim P(x)] \wedge (\vee x) S(x).$$

**RIV. Ogólna teoria mnogości

**RIV.1 = Rachunek zbiorów

$$\mathbf{D1.a} \quad A = B \Leftrightarrow (\wedge x) [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$$

$$\mathbf{D1.b} \quad y \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \Leftrightarrow y = x_1 \vee y = x_2 \vee \dots \vee y = x_k.$$

$$\mathbf{T1} \quad \{a\} = \{b\} \Leftrightarrow a = b$$

T2 W dowolnej dziedzinie **U** istnieje dokładnie jeden zbiór pusty \emptyset

$$\mathbf{D2} \quad A \subset B \Leftrightarrow (\wedge x) [x \in A \Rightarrow x \in B]$$

$$\mathbf{T3} \quad (A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$$

$$\mathbf{T4} \quad (x \in A \wedge A \subset B) \Rightarrow x \in B$$

$$\mathbf{T5} \quad (A \subset B \wedge B = C) \Rightarrow A \subset C$$

$$\mathbf{T6} \quad A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$$

$$\mathbf{D3} \quad X \in \mathbf{Pot}(A) \ (X \in 2^A) \Leftrightarrow X \subset A$$

$$\mathbf{T7.a} \quad A \subset B \Rightarrow \mathbf{Pot}(A) \subset \mathbf{Pot}(B)$$

$$\mathbf{T7.b} \quad \mathbf{Pot}(A) \subset \mathbf{Pot}(B) \Rightarrow A \subset B$$

$$\mathbf{T7} \quad A \subset B \Leftrightarrow \mathbf{Pot}(A) \subset \mathbf{Pot}(B)$$

$$\mathbf{D4} \quad A \supset B \Leftrightarrow (\wedge x) [x \in A \Rightarrow x \notin B]$$

$$\mathbf{T8} \quad (A \subset B \wedge B \supset C) \Rightarrow A \supset C$$

$$\mathbf{T9} \quad (x \in A \wedge A \supset C) \Rightarrow x \notin C$$

$$\mathbf{D5} \quad A \ni B \Leftrightarrow (\vee x) [x \in A \wedge x \in B] \wedge (\vee x) [x \in A \wedge x \notin B] \wedge (\vee x) [x \notin A \wedge x \in B].$$

$$\mathbf{T10} \quad (A \ni B \wedge B \supset C) \Rightarrow \sim(A \subset C).$$

$$\mathbf{D6.a1} \quad x \in (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

$$\mathbf{T11} \quad A \subset (A \cup B),$$

$$\mathbf{T12} \quad A \subset B \Leftrightarrow (A \cup B) = B.$$

$$\mathbf{D7.a1} \quad x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

$$\mathbf{T13} \quad (A \cap B) \subset B$$

$$\mathbf{T14} \quad A \subset B \Leftrightarrow (A \cap B) = A$$

$$\mathbf{T15} \quad A \supset \subset B \Leftrightarrow (A \cap B) = \emptyset$$

$$\mathbf{T16} \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$\mathbf{D6.b} \quad S = (A \cup B) \Leftrightarrow \{A \subset S \wedge B \subset S \wedge (\wedge Z) [(A \subset Z \wedge B \subset Z) \Rightarrow S \subset Z]\}$$

$$\mathbf{D7.b} \quad I = (A \cap B) \Leftrightarrow \{I \subset A \wedge I \subset B \wedge (\wedge Z) [(Z \subset A \wedge Z \subset B) \Rightarrow Z \subset I]\}$$

T17 Definicje **D6.a1** oraz **D6.b** są równoważne.

T18 Definicje **D7.a1** oraz **D7.b** są równoważne.

$$\mathbf{D6.a2} \quad (\mathbf{df}\cup) \quad x \in \cup A_i, i = 1, \dots, n \Leftrightarrow (x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n)$$

$$\mathbf{D7.a2} \quad (\mathbf{df}\cap) \quad x \in \cap A_i, i = 1, \dots, n \Leftrightarrow (x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n)$$

$$\mathbf{D6.a3} \quad (\mathbf{df}\cup_{\infty}) \quad x \in \cup A_i, i = 1, \dots, \infty \Leftrightarrow (\forall i \in \mathcal{N}) x \in A_i$$

$$\mathbf{D7.a3} \quad (\mathbf{df}\cap_{\infty}) \quad x \in \cap A_i, i = 1, \dots, \infty \Leftrightarrow (\wedge i \in \mathcal{N}) x \in A_i$$

$$\mathbf{T19} \quad \cup (A_i \cup B_i) = \cup A_i \cup \cup B_i, \quad i = 1, \dots, \infty$$

$$\mathbf{T20} \quad \cap (A_i \cap B_i) = \cap A_i \cap \cap B_i, \quad i = 1, \dots, \infty$$

$$\mathbf{D6.a4} \quad (\mathbf{df}\cup\mathbf{A}) \quad x \in \cup \mathbf{A} \Leftrightarrow (\forall A \in \mathbf{A}) x \in A$$

$$\mathbf{D7.a4} \quad (\mathbf{df}\cap\mathbf{A}) \quad x \in \cap \mathbf{A} \Leftrightarrow (\wedge A \in \mathbf{A}) x \in A$$

$$\mathbf{D6.a5} \quad x \in \cup f(\mathbf{A}) \Leftrightarrow (\forall A \in \mathbf{A}) x \in f(A) \Leftrightarrow (\forall B \in \mathbf{B}) x \in B$$

$$\mathbf{D7.a5} \quad x \in \cap f(\mathbf{A}) \Leftrightarrow (\wedge A \in \mathbf{A}) x \in f(A) \Leftrightarrow (\wedge B \in \mathbf{B}) x \in B$$

$$\mathbf{D8} \quad (\mathbf{df}-) \quad x \in (A - B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$$

$$\mathbf{T21} \quad (A - B) \subset A$$

$$\mathbf{T22} \quad A \subset B \Leftrightarrow (A - B) = \emptyset$$

$$\mathbf{T23} \quad (A - B) \supset \subset (A \cap B)$$

$$\mathbf{D8.a} \quad (\mathbf{df}\div) \quad x \in (A \div B) \Leftrightarrow (x \in (A - B) \vee x \in (B - A))$$

$$\mathbf{T24} \quad (A \div B) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$\mathbf{D9} \quad (\mathbf{df}') \quad x \in A' \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \in \mathbf{U}).$$

$$\mathbf{T25} \quad A = B \Leftrightarrow A' = B'.$$

T26 $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$.

T27 $(A \cup B)' = (A' \cap B')$.

T28 $(A \cap B)' = (A' \cup B')$

D10 $y \in \{x: \Phi(x)\} \Leftrightarrow \Phi(y)$.

T29.1 $\{x: \Phi(x)\} \subset \{x: \Psi(x)\} \Leftrightarrow (\wedge x) [\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)]$

T29.2 $\{x: \Phi(x)\} = \{x: \Psi(x)\} \Leftrightarrow (\wedge x) [\Phi(x) \Leftrightarrow \Psi(x)]$

T29.3 $\{x: \Phi(x)\} \supset \{x: \Psi(x)\} \Leftrightarrow (\wedge x) [\Phi(x) \Rightarrow \sim \Psi(x)]$

T30.1 $\{x: \Phi(x)\} \cup \{x: \Psi(x)\} = \{x: \Phi(x) \vee \Psi(x)\}$

T30.2 $\{x: \Phi(x)\} \cap \{x: \Psi(x)\} = \{x: \Phi(x) \wedge \Psi(x)\}$

T30.3 $\{x: \Phi(x)\} - \{x: \Psi(x)\} = \{x: \Phi(x) \wedge \sim \Psi(x)\}$

T30.4 $\{x: \Phi(x)\}' = \{x: \sim \Phi(x)\}$

S|RZ

$S a P \Leftrightarrow (\wedge x) [x \in S \Rightarrow x \in P] \Leftrightarrow S \subset P$

$S e P \Leftrightarrow (\wedge x) [x \in S \Rightarrow x \notin P] \Leftrightarrow S \supset \subset P$

$S i P \Leftrightarrow (\forall x) [x \in S \wedge x \in P] \Leftrightarrow (S \cap P) \neq \emptyset$

$S o P \Leftrightarrow (\forall x) [x \in S \wedge x \notin P] \Leftrightarrow (S - P) \neq \emptyset$

****RIV.2 = Teoria relacji**

D1 $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle \Leftrightarrow (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \dots \wedge x_n = y_n)$

D2.a1 (df \times) $\langle x, y \rangle \in (A \times B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B)$

D2.a2 (df $\times n$) $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \Leftrightarrow (x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n)$

D2.b1 $(A \times B) = \{x, y: x \in A \wedge y \in B\}$

D2.b2 $(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n: x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n\}$

T1.1 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ oraz
 $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$

T1.2 $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ oraz
 $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$

T1.3 $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$ oraz
 $C \times (A - B) = (C \times A) - (C \times B)$

$$\mathbf{T1.4} \quad (A \times B) \times C = A \times (B \times C) \text{ oraz } A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

$$\mathbf{T2. a} \quad (A \times \emptyset) = \emptyset$$

$$\mathbf{b} \quad A \times \{1, 2, \dots, n\} = (A \times \{1\}) \cup (A \times \{2\}) \cup \dots \cup (A \times \{n\})$$

$$\mathbf{T3. a} \quad (A \cap B) = \emptyset \Rightarrow (A \times C) \cap (B \times C) = \emptyset.$$

$$\mathbf{b} \quad A \subset B \Rightarrow (A \times C) \subset (B \times C).$$

$$\mathbf{D3.a1} \quad \langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow x R y \text{ oraz}$$

$$\mathbf{D3.b1} \quad R = \{x, y: x R y\}$$

$$\mathbf{D3.a2} \quad \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in R \Leftrightarrow R(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ oraz}$$

$$\mathbf{D3.b2} \quad R = \{x_1, x_2, \dots, x_n: R(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

$$\mathbf{D4.a} \quad \langle x, y \rangle \in R_{|A} \Leftrightarrow x, y \in A \wedge x R y$$

$$\mathbf{D4.b} \quad R_{|A} = \{x, y: x, y \in A \wedge x R y\}$$

$$\mathbf{D5.1} \quad x \in D_I(R) \Leftrightarrow (\forall y) \langle x, y \rangle \in R$$

$$\mathbf{D5.2} \quad y \in D_{II}(R) \Leftrightarrow (\forall x) \langle x, y \rangle \in R$$

$$\mathbf{D5.3} \quad P(R) = D_I(R) \cup D_{II}(R)$$

$$\mathbf{D6.1} \quad R = S \Leftrightarrow (\wedge x, y) [\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in S]$$

$$\mathbf{D6.2} \quad R \subset S \Leftrightarrow (\wedge x, y) [\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle x, y \rangle \in S]$$

D7. 1–4:

$$\langle x, y \rangle \in (R \cup S) \Leftrightarrow (\langle x, y \rangle \in R \vee \langle x, y \rangle \in S) \quad \text{lub}$$

$$x R \cup S y \Leftrightarrow (x R y \vee x S y)$$

$$\langle x, y \rangle \in (R \cap S) \Leftrightarrow (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in S) \quad \text{lub}$$

$$x R \cap S y \Leftrightarrow (x R y \wedge x S y)$$

$$\langle x, y \rangle \in (R - S) \Leftrightarrow (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \notin S) \quad \text{lub}$$

$$x R - S y \Leftrightarrow (x R y \wedge \sim x S y)$$

$$\langle x, y \rangle \in R' \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \notin R \quad \text{lub}$$

$$x R' y \Leftrightarrow \sim x R y.$$

$$\mathbf{T4.1} \quad \{x, y: x R \cup S y\} = \{x, y: x R y\} \cup \{x, y: x S y\}$$

$$\mathbf{T4.2} \quad \{x, y: x R \cap S y\} = \{x, y: x R y\} \cap \{x, y: x S y\}$$

$$\mathbf{T4.3} \quad \{x, y: x R - S y\} = \{x, y: x R y\} - \{x, y: x S y\}$$

$$\mathbf{T4.4} \quad \{x, y: x R' y\} = \{x, y: x R y\}'.$$

$$\mathbf{D8} \quad \langle x, y \rangle \in R^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R \quad \text{lub} \quad x R^{-1} y \Leftrightarrow y R x$$

$$\mathbf{T5.1} \quad D_I(R^{-1}) = D_{II}(R)$$

$$\mathbf{T5.2} \quad D_{II}(R^{-1}) = D_I(R)$$

$$\mathbf{T5.3} \quad (R^{-1})^{-1} = R$$

$$\mathbf{T6.1} \quad (R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$

$$\mathbf{T6.2} \quad (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$

$$\mathbf{T6.3} \quad (X \times Y)^{-1} = Y \times X$$

$$\mathbf{D9} \quad \langle x, y \rangle \in (R \circ S) \Leftrightarrow (\exists z) [x S z \wedge z R y]$$

$$\mathbf{T7} \quad (R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

$$\mathbf{T8.1} \quad (R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$$

$$\mathbf{T8.2} \quad T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$$

$$\mathbf{T9.1} \quad (R \cap S) \circ T \subset (R \circ T) \cap (S \circ T)$$

$$\mathbf{T9.2} \quad T \circ (R \cap S) \subset (T \circ R) \cap (T \circ S)$$

$$\mathbf{T10} \quad (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$

$$\mathbf{D10.1} \text{ (dfun}_1) \quad R \in \mathbf{fun}_1 \Leftrightarrow (\forall x, y, z) [x R y \wedge x R z \Rightarrow y = z]$$

$$\mathbf{D10.2} \text{ (dfun}_2) \quad R \in \mathbf{fun}_2 \Leftrightarrow (\forall x, y, z, t) [R(x, y, z) \wedge R(x, y, t) \Rightarrow z = t]$$

$$\mathbf{D10.3} \text{ (dfun}_n) \quad R \in \mathbf{fun}_n \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2, \dots, x_n, y, z) [R(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \wedge R(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \Rightarrow y = z]$$

$$\mathbf{T11} \quad R \in \mathbf{fun}_1 \Leftrightarrow (\forall x \in D_1(R)) (\exists_1 y) x R y$$

$$\mathbf{D11.1} \quad (f \in \mathbf{fun}_1 \text{ oraz } x \in D_1(f) \Rightarrow (y = f(x) \Leftrightarrow x f y))$$

$$\mathbf{D11.2} \quad (f \in \mathbf{fun}_n \text{ i } x_1 \in D_1(f), \dots, x_n \in D_n(f) \Rightarrow (y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n, y)))$$

$$\mathbf{D12.1} \quad y \in R(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A) x R y \quad \text{lub} \quad R(A) = \{y: (\exists x \in A) x R y\}$$

$$\mathbf{D12.2} \quad x \in R^{-1}(B) \Leftrightarrow (\exists y \in B) x R y \quad \text{lub} \quad R^{-1}(B) = \{x: (\exists y \in B) x R y\}$$

$$\mathbf{T12} \quad A \subset B \Rightarrow R(A) \subset R(B).$$

$$\mathbf{D13} \quad \text{Funkcja } f \in B^A \Leftrightarrow f: A \rightarrow_w B \quad \text{lub} \quad B^A = \{f: f: A \rightarrow_w B\}$$

T13. Jeżeli f oraz g są funkcjami, to:

1 o ile $D_1(f) \cap D_1(g) = \emptyset$, to suma $f \cup g$ jest funkcją;

2 iloczyn $f \cap g$ jest funkcją.

T14. Jeżeli f oraz g są funkcjami, to:

1 $f \circ g \in \mathbf{fun}$;

2 o ile $D_{II}(g) = D_I(f)$ i $x \in D_I(g)$, to $f \circ g(x) = f(g(x))$.

D14 (df1-1) $R \in \mathbf{1-1} \Leftrightarrow R$ oraz R^{-1} są funkcjami ($R, R^{-1} \in \mathbf{fun}$)

T15. $R \in \mathbf{1-1}$ wtedy i tylko, gdy:

1 $(\wedge x_1, x_2, y_1, y_2) [x_1 R y_1 \wedge x_2 R y_2 \Rightarrow (x_1 = x_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2)]$

2 $(\wedge x \in D_I(R)) (\forall_1 y) [x R y]$ oraz $(\wedge y \in D_{II}(R)) (\forall_1 x) [x R y]$

T16.1 Jeżeli $R \in \mathbf{1-1}$, to $R^{-1} \in \mathbf{1-1}$

T16.2 Jeżeli $R, S \in \mathbf{1-1}$, to $R \circ S \in \mathbf{1-1}$

T17 Jeżeli $R, S \in \mathbf{1-1}$ i $D_I(R) \cap D_I(S) = D_{II}(R) \cap D_{II}(S) = \emptyset$,
to $R \cup S \in \mathbf{1-1}$

D15.1 Funkcja f jest ciągiem:

(a) nieskończonym \Leftrightarrow dziedziną tej funkcji jest zbiór wszystkich liczb naturalnych, tj. $D_I(f) = \mathcal{N}$;

(b) skończonym o n wyrazach $\Leftrightarrow D_I(f) = \{i: i \leq n\}$;

2 Funkcja wzajemnie jednoznaczna f jest permutacją zbioru $A \Leftrightarrow D_I(f) = D_{II}(f) = A$;

3 Przedłużeniem funkcji f jest każda funkcja g taka, że $f \subset g$; o funkcji f mówimy wtedy, że jest funkcją częściową dla funkcji g , a $g|_A$ to funkcja częściowa f dla funkcji g taka, że $D_I(f) = A$.

D16.1 $R \in \mathbf{zwr}_A \Leftrightarrow (\wedge x \in A) x R x$

2 $R \in \mathbf{sp}_A \Leftrightarrow (\wedge x, y \in A) [x \neq y \Rightarrow x R y \vee y R x]$

3 $R \in \mathbf{sym}_A \Leftrightarrow (\wedge x, y \in A) [x R y \Rightarrow y R x]$

4 $R \in \mathbf{asym}_A \Leftrightarrow (\wedge x, y \in A) [x R y \Rightarrow \sim y R x]$

5 $R \in \mathbf{przech}_A \Leftrightarrow (\wedge x, y, z \in A) [x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z]$

D17 $R \in \mathbf{równ}_A \Leftrightarrow (R \in \mathbf{zwr}_A \wedge R \in \mathbf{sym}_A \wedge R \in \mathbf{przech}_A)$.

D18 $(R \in \mathbf{równ}_A \wedge x \in A) \Rightarrow (y \in [x]_{A,R} \Leftrightarrow (y \in A \wedge x R y))$ lub
 $(R \in \mathbf{równ}_A \wedge x \in A) \Rightarrow ([x]_{A,R} = \{y: y \in A \wedge x R y\})$

T18. Jeżeli $R \in \mathbf{równ}_A$ oraz $x, y \in A$, to:

1 $x \in [x]_{A,R}$

2 $[x]_{A,R} \subset A$

3 $[x]_{A,R} = [y]_{A,R} \Leftrightarrow x R y$.

D19 Jeżeli $R \in \mathbf{równ}_A$, to $Y \in A/R \Leftrightarrow (\forall x \in A) Y = [x]_{A,R}$

T19. Jeżeli $R \in \mathbf{rown}_A$ oraz $X, Y \in A/R$, to:

- 1 (i) $X \neq \emptyset$ oraz (ii) $X \subset A$;
- 2 o ile $X \neq Y$, to $X \cap Y = \emptyset$;
- 3 $\cup A/R = A$;
- 4 rodzina klas abstrakcji A/R jest podziałem zbioru A .

D20.a Relacja R porządkuje częściowo zbiór $A \Leftrightarrow A \subset P(R)$ oraz R jest w zbiorze A asymetryczna i przechodnia;

D20.b Para uporządkowana $\langle A, R \rangle$ jest zbiorem uporządkowanym częściowo $\Leftrightarrow A = P(R) \wedge R$ porządkuje częściowo zbiór A .

D21.a Relacja R porządkuje liniowo zbiór $A \Leftrightarrow A \subset P(R)$ oraz R jest w zbiorze A spójna, asymetryczna i przechodnia;

D21.b Para uporządkowana $\langle A, R \rangle$ jest zbiorem uporządkowanym liniowo $\Leftrightarrow A = P(R) \wedge R$ porządkuje liniowo zbiór A .

D22. Przedmiot x jest w zbiorze uporządkowanym (częściowo, liniowo) $\langle A, R \rangle$ elementem:

- a1 minimalnym $\Leftrightarrow x \in A \wedge \sim(\forall y \in A) y R x$;
- a2 maksymalnym $\Leftrightarrow x \in A \wedge \sim(\forall y \in A) x R y$;
- b1 pierwszym $\Leftrightarrow x \in A \wedge (\forall y \in A) [x \neq y \Rightarrow x R y]$;
- b2 ostatnim $\Leftrightarrow x \in A \wedge (\forall y \in A) [x \neq y \Rightarrow y R x]$.

T20.a Jeżeli x jest elementem pierwszym (ostatnim) w zbiorze uporządkowanym (częściowo, liniowo) $\langle A, R \rangle$, to jest w tym zbiorze elementem minimalnym (maksymalnym);

b. Jeżeli x jest elementem minimalnym (maksymalnym) w zbiorze uporządkowanym liniowo $\langle A, R \rangle$, to jest w tym zbiorze elementem pierwszym (ostatnim).

D23.a Zbiór $\langle B, S \rangle$ uporządkowany częściowo jest podzbiorem częściowo uporządkowanego zbioru $\langle A, R \rangle \Leftrightarrow B \subset A \wedge S \subset R$;

b zbiór $\langle B, S \rangle$ uporządkowany liniowo jest podzbiorem uporządkowanego liniowo zbioru $\langle A, R \rangle \Leftrightarrow B \subset A$.

W1 Jeżeli zbiór uporządkowany liniowo $\langle B, S \rangle$ jest podzbiorem uporządkowanego liniowo zbioru $\langle A, R \rangle$, to $S \subset R$.

D24. Zbiór $\langle B, S \rangle$ jest w zbiorze uporządkowanym (częściowo, liniowo) $\langle A, R \rangle$:

1 ograniczony z dołu wtedy i tylko, gdy (i) $\langle B, S \rangle$ jest podzbiorem zbioru $\langle A, R \rangle$ oraz (ii) $(\forall x \in A) (\wedge y \in B) [x \neq y \Rightarrow x R y]$.

2 ograniczony z góry wtedy i tylko, gdy (i) $\langle B, S \rangle$ jest podzbiorem zbioru $\langle A, R \rangle$ oraz (ii) $(\forall x \in A) (\wedge y \in B) [x \neq y \Rightarrow y R x]$.

D25 Element y jest kresem dolnym (górnym) podzbioru $\langle B, S \rangle$ zbioru $\langle A, R \rangle$ uporządkowanego (częściowo, liniowo) wtedy i tylko wtedy, gdy y jest elementem pierwszym (ostatnim) zbioru $\langle B, S \rangle$, a jeśli zbiór ten nie ma elementu pierwszego (ostatniego), to y jest elementem ostatnim zbioru $\{x: x \in A \wedge (\wedge z \in B) x R z\}$ (pierwszym zbioru $\{x: x \in A \wedge (\wedge z \in B) z R x\}$).

D26. Zbiór $\langle A, R \rangle$ uporządkowany (częściowo, liniowo) jest:

1 gęsty $\Leftrightarrow (\wedge x, y \in A) [x R y \Rightarrow (\exists z \in A) x R z R y]$;

2 ciągly \Leftrightarrow jest gęsty oraz każdy ograniczony z dołu podzbiór zbioru $\langle A, R \rangle$ ma kres dolny.

D27 Zbiór $\langle A, R \rangle$ jest dobrze uporządkowany wtedy i tylko, gdy jest uporządkowany liniowo i każdy jego niepusty podzbiór ma element pierwszy, tj.:

$(\wedge \langle B, S \rangle) [(\langle B, S \rangle \subset \langle A, R \rangle \wedge B \neq \emptyset) \Rightarrow$

$(\exists y \in B) (\wedge z \in B) z \neq y \Rightarrow y R z]$.

W2.a Jeżeli relacja R dobrze porządkuje zbiór A , to relacja R porządkuje zbiór A liniowo (częściowo); jeżeli $\langle A, R \rangle$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym, to jest zbiorem uporządkowanym liniowo (częściowo).

b jeżeli zbiór $\langle A, R \rangle$ jest dobrze uporządkowany, to zbiór $\langle B, R \rangle$ taki, że $B \subset A$ również jest dobrze uporządkowany.

T21 Dla każdego zbioru $\langle A, R \rangle$ uporządkowanego częściowo jest tak, że:

(*) jeśli jego każdy dobrze uporządkowany podzbiór jest ograniczony z góry,

to w $\langle A, R \rangle$ istnieje element maksymalny.

D28.a1 $R \text{ iz}_f S$ wtedy i tylko, gdy $f \in \mathbf{1-1} \wedge f: P(R) \rightarrow_{\text{na}} P(S)$ oraz $(\wedge x, y \in P(R)) [x R y \Leftrightarrow f(x) S f(y)]$;

D28.b1 $R \text{ iz} S$ wtedy i tylko, gdy $(\forall f) R \text{ iz}_f S$.

D28.a2 $R \text{ iz}_f S$ wtedy i tylko, gdy $f \in \mathbf{1-1} \wedge f: P(R) \xrightarrow{\text{na}} P(S)$ oraz
 $(\wedge x_1, x_2, \dots, x_n \in P(R)) [R(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow S(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))]$.

W3 $R \text{ iz}_f S \Rightarrow R \text{ hom}_f S$.

D28.b2 Układy (struktury) relacyjne $\langle A, R \rangle$ i $\langle B, S \rangle$ są izomorficzne wtedy i tylko, gdy istnieje funkcja f wzajemnie jednoznaczna odwzorowująca zbiór A na zbiór B oraz dla dowolnych $x, y \in A$ jest tak, że $x R y \Leftrightarrow f(x) S f(y)$.

W4 Relacja izomorfizmu jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, co znaczy, że jest relacją równościową.

A1 Dla każdego systemu relacyjnego $\langle A, R \rangle$, takiego że $R \subset A \times A$, istnieje dokładnie jeden przedmiot α taki, że $\alpha \text{ tr} \langle A, R \rangle$, a przy tym dla dowolnych systemów $\langle A, R \rangle$ i $\langle B, S \rangle$ jest tak, że: $(\alpha \text{ tr} \langle A, R \rangle \wedge \beta \text{ tr} \langle B, S \rangle) \Rightarrow [\alpha = \beta \Leftrightarrow \langle A, R \rangle \text{ iz} \langle B, S \rangle]$.

T22. Jeżeli struktury relacyjne $\langle A, R \rangle$ i $\langle B, S \rangle$, że są izomorficzne, to:

- 1** $R \in \text{zwr}_A \Rightarrow S \in \text{zwr}_B$
- 2** $R \in \text{sym}_A \Rightarrow S \in \text{sym}_B$
- 3** $R \in \text{przech}_A \Rightarrow S \in \text{przech}_B$
- 4** $R \in \text{fun}_A \Rightarrow S \in \text{fun}_B$

T23 Jeżeli układy relacyjne $\langle A, R \rangle$ i $\langle B, S \rangle$ są izomorficzne oraz system $\langle A, R \rangle$ (relacja R) spełnia warunek (formułę) W , w którym nie występują symbole B i S (nie występuje symbol S), to system $\langle B, S \rangle$ (relacja S) spełnia warunek, który powstaje z formuły W w wyniku zastąpienia w każdym miejscu symbolu A symbolem B oraz symbolu R symbolem S .

****RIV.3 = Teoria liczb kardynalnych**

D1.a $A \sim_R B \Leftrightarrow R \in \mathbf{1-1} \wedge D_I(R) = A \wedge D_{II}(R) = B$

D1.b $A \sim B \Leftrightarrow (\forall R) A \sim_R B$

L1.a $D_I(I_A) = A$ **b.** $D_{II}(I_A) = A$ **c.** $I_A \in \mathbf{1-1}$

L2. a $A \sim_{I_A} A$;

b $A \sim_R B \Rightarrow B \sim_{R^{-1}} A$;

c $A \sim_R B \wedge B \sim_S C \Rightarrow A \sim_{S \circ R} C$.

- L3. a** $(A \times B) \sim (B \times A)$
b $(A \times \{x\}) \sim A \sim A^{\{x\}}; \{x\}^A \sim \{x\}$
c $A \sim B \wedge C \sim D \Rightarrow (A \times C) \sim (B \times D)$
d $(\wedge A, B) (\forall A_1, B_1) [A \sim A_1 \wedge B \sim B_1 \wedge (A_1 \cap B_1) = \emptyset]$
- T1.** Dla dowolnych zbiorów A, B, C jest tak, że:
1 $A \sim A$
2 $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
3 $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$
- W1** Równoliczność jest w dowolnej, lecz określonej rodzinie zbiorów \mathbf{A} relacją równościową: $\sim \in \mathbf{równ}_{\mathbf{A}}$.
- T2** Zbiory A oraz B są równoliczne wtedy i tylko, gdy systemy relacyjne $\langle A, A \times A \rangle$ oraz $\langle B, B \times B \rangle$ są izomorficzne:
 $A \sim B \Leftrightarrow \langle A, A \times A \rangle \mathbf{iz} \langle B, B \times B \rangle$.
- T3.a** Dla dowolnych zbiorów A oraz B jest tak, że: $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$
- D2** $|X| = [X]_{\mathbf{K}, \sim}$
- T3.a'** Dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathbf{K}$ jest tak, że: $|A| = |B| \Leftrightarrow A \sim_{|\mathbf{K}} B$
- D3** $\mathbf{Lk} = \mathbf{K} / \sim_{|\mathbf{K}}$
- T3.b'** $m \in \mathbf{Lk} \Leftrightarrow (\forall X \in \mathbf{K}) m = |X|$
- T3.c'** $Y \in \mathbf{K} \Rightarrow |Y| \in \mathbf{Lk}$
- T3.b** $(\wedge A) (\forall_1 m) m = |A|$
- T3.c** $(\wedge m) (\forall A) m = |A|$
- D4.a** A jest zbiorem skończonym wtedy i tylko, gdy $(\forall n \in \mathcal{N}) |A| = n$.
- D4.b** A jest zbiorem nieskończonym wtedy i tylko, gdy $\sim(\forall n \in \mathcal{N}) |A| = n$.
- D5.a** A jest zbiorem nieskończonym wtedy i tylko, gdy istnieje podzbiór właściwy B zbioru A taki, że $B \sim A$.
- D5.b** A jest zbiorem skończonym wtedy i tylko, gdy nie istnieje podzbiór właściwy B zbioru A taki, że $B \sim A$, czyli zbiór A jest skończony, gdy nie jest równoliczny z żadnym swoim podzbiorem właściwym.
- T4** Jeżeli $(\forall n \in \mathcal{N}) |A| = n$, to nie istnieje podzbiór właściwy B zbioru A taki, że $B \sim A$.

- W2** Jeżeli istnieje podzbiór właściwy B zbioru A taki, że $B \sim A$, to $\sim(\forall n \in \mathcal{N}) |A| = n$.
- A1** Dla każdej niepustej rodziny zbiorów niepustych i parami rozłącznych istnieje zbiór, który ma dokładnie jeden element wspólny z każdym zbiorem danej rodziny.
- T5** Jeżeli $\sim(\forall n \in \mathcal{N}) |A| = n$, to istnieje podzbiór właściwy B zbioru A taki, że $B \sim A$.
- W3** Jeżeli nie istnieje podzbiór właściwy B zbioru A taki, że $B \sim A$, to $(\forall n \in \mathcal{N}) |A| = n$.
- W4. a** $\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}_D$
b $\mathcal{NS}_D \Rightarrow \mathcal{NS}$
c $\mathcal{NS} \Rightarrow \mathcal{NS}_D$
d $\mathcal{S}_D \Rightarrow \mathcal{S}$
- T6** Zbiór A jest: skończony w rozumieniu **D4** \Leftrightarrow jest skończony w sensie **D5**; nieskończony w sensie **D4** \Leftrightarrow jest nieskończony w znaczeniu **D5**.
- D6. a** $\aleph_0 = |\mathcal{N}|$
b $c = |\mathcal{R}|$
a' $|A| = \aleph_0 \Leftrightarrow A \sim \mathcal{N}$
b' $|A| = c \Leftrightarrow A \sim \mathcal{R}$
- T7** $|A| = \aleph_0$ wtedy i tylko, gdy istnieje ciąg nieskończony $\{a_i; i \in \mathcal{N}\}$ o wyrazach niepowtarzających się, taki że $\{a_0, a_1, a_2, \dots\} = A$.
- D7** Zbiór A jest przeliczalny wtedy i tylko, gdy A jest zbiorem skończonym lub $|A| = \aleph_0$.
- W5.a** Zbiór równoliczny ze zbiorem przeliczalnym jest przeliczalny.
- W5.b** Do zbiorów nieskończonych przeliczalnych, tj. zbiorów mocy \aleph_0 , należą np.:
- (i) zbiór liczb naturalnych większych od dowolnej (ustalonej) liczby naturalnej k ;
 - (ii) $\mathcal{N} - \{0\}$;
 - (iii) ogół liczb naturalnych parzystych;
 - (iv) zbiór liczb naturalnych nieparzystych;
 - (v) zbiór liczb całkowitych ujemnych.

- T8** Niepusty zbiór A jest przeliczalny wtedy i tylko, gdy istnieje ciąg nieskończony, którego zapasem (zbiorem wyrazów) jest A .
- T9.** **a** Dowolny podzbiór zbioru przeliczalnego jest przeliczalny;
b Suma dwóch zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym;
c Suma dowolnej skończonej liczby zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym;
d Suma nieskończonej przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym;
e Iloczyn kartezjański dwóch zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny.
- L4** $(\mathcal{N} \times \mathcal{N}) \sim \mathcal{N}$.
- W6.** **a** Suma zbioru skończonego i przeliczalnego jest przeliczalna;
b Suma przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.
- T10** $c \neq \aleph_0$.
- W7.a** Zbiór liczb rzeczywistych \mathcal{R} jest nieskończonym zbiorem nieprzeliczalnym.
- T11** Zbiór C wszystkich nieskończonych ciągów liczb naturalnych jest nieprzeliczalny.
- T12** Jeżeli f jest funkcją oraz $D_I(f) \subset A$, $D_{II}(f) \subset \mathbf{Pot}(A)$, to zbiór $R = \{x \in D_I(f) : x \notin f(x)\} \notin D_{II}(f)$.
- T13** Zbiór $\mathbf{Pot}(A)$ nie jest równoliczny z żadnym podzbiorem zbioru A – także z A .
- W7.b** **(i)** Zbiór $\mathbf{Pot}(\mathcal{N})$ nie jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych \mathcal{N} ;
(ii) Zbiór $\mathbf{Pot}(\mathcal{N})$ jest nieskończonym zbiorem nieprzeliczalnym.
- T14** Żadne dwa spośród zbiorów ciągu A , $\mathbf{P}^1(A)$, $\mathbf{P}^2(A)$, $\mathbf{P}^3(A)$, ..., $\mathbf{P}^i(A)$, ... nie są równoliczne.
- T15** Jeżeli \mathbf{A} jest rodziną zbiorów taką, że dla każdego $X \in \mathbf{A}$ istnieje zbiór $Y \in \mathbf{A}$, który nie jest równoliczny z żadnym podzbiorem zbioru X , to suma $\cup \mathbf{A}$ nie jest równoliczna z żadnym zbiorem X rodziny \mathbf{A} , ani z żadnym podzbiorem zbioru X .

- T16** Nie istnieje rodzina zbiorów \mathbf{U} , która dla każdego zbioru X zawiera jako swój element zbiór Y równoliczny z X .
- T17** Nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.
- D8.a** Liczba kardynalna m jest sumą liczb n_1 i n_2 , tj. $m = n_1 + n_2$ wtedy i tylko, gdy $(\forall A, B) [\|A\| = n_1 \wedge \|B\| = n_2 \wedge (A \cap B) = \emptyset \wedge m = \|A \cup B\|]$.
- W8** Istnieje dokładnie jedna liczba kardynalna będąca sumą dowolnych dwóch liczb kardynalnych.
- L5** Jeżeli $A \sim B$ i $A_1 \sim B_1$ oraz $(A \cap A_1) = (B \cap B_1) = \emptyset$, to $(A \cup A_1) \sim (B \cup B_1)$.
- D8.b** Jeżeli $(A \cap B) = \emptyset$, to $\|A\| + \|B\| = \|A \cup B\|$.
- T18** $m = n_1 + n_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\exists A, B) [(\|A\| = n_1 \wedge \|B\| = n_2 \wedge (A \cap B) = \emptyset) \Rightarrow m = \|A \cup B\|]$.
- T19.** Dla dowolnych liczb kardynalnych n_1, n_2, n_3 :
- $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$;
 - $(n_1 + n_2) + n_3 = n_1 + (n_2 + n_3)$.
- T20.**
- Dla dowolnej liczby kardynalnej m : $m + 0 = m$;
 - Dla dowolnego $n \in \mathcal{N}$: $n + \aleph_0 = \aleph_0$;
 - $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
- W9** $\aleph_0 = 1 + \aleph_0 = 2 + \aleph_0 = 3 + \aleph_0 = \dots i + \aleph_0 \dots = \aleph_0 + \aleph_0$.
- D9** $\|A\| \cdot \|B\| = \|A \times B\|$.
- T21.** Dla dowolnych liczb kardynalnych n_1, n_2, n_3 :
- $n_1 \cdot n_2 = n_2 \cdot n_1$;
 - $(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)$;
 - $(n_1 + n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot n_3 + n_2 \cdot n_3$.
- T22.**
- Dla dowolnej liczby kardynalnej m : $m \cdot 0 = 0$ oraz $m \cdot 1 = m$;
 - dla dowolnej liczby kardynalnej m i dowolnej liczby naturalnej n różnej od zera: $m \cdot n = m + \dots + m$ (n składników sumy);
 - dla dowolnej liczby naturalnej n różnej od zera: $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$;
 - $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.
- D10** $\|A\|^{\|B\|} = \|A^B\|$.

T23. Dla dowolnych liczb kardynalnych m, n, t :

a $m^0 = 1$; $1^m = 1$; $m^1 = m$

b $m^{n+t} = m^n m^t$

c $(m \cdot n)^t = m^t \cdot n^t$

d $(m^n)^t = m^{n \cdot t}$

L6 $A^{B \cup C} \sim (A^B \times A^C)$

L7 $(A^C \times B^C) \sim (A \times B)^C$

L8 $A^{B \times C} \sim (A^B)^C$.

T24. Dla dowolnej liczby kardynalnej m oraz dowolnej liczby naturalnej n różnej od 0:

a $m^n = m \cdot \dots \cdot m$ (n czynników)

b $\aleph_0^n = \aleph_0$

W10 $\aleph_0^1 = \aleph_0^2 = \aleph_0^3 = \aleph_0^4 = \dots$

T25. a $c = 2^{\aleph_0}$

b $c + c = c$

c $c \cdot c = c$

d jeżeli n jest liczbą naturalną różną od 0, to:

(i) $c \cdot n = c$ oraz **(ii)** $c^n = c$

e $c^{\aleph_0} = c$

L9 $\mathcal{R} \sim \{0, 1\} \mathcal{N} \sim \{0, 1, 2\} \mathcal{N} \sim \{0, 1, 2, 3\} \mathcal{N} \sim \dots$

W11 $2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = 4^{\aleph_0} = \dots$

W12 $\mathcal{R} \sim \mathcal{RN}$

T26.a $|\{x \in \mathcal{R}: -1 < x < 1\}| = c$;

b Jeśli $y < z$, to $|\{x \in \mathcal{R}: y < x < z\}| = c$.

T27 $|\mathbf{Pot}(A)| = 2^{|A|}$.

D11.a1 Liczba kardynalna m jest nie większa od liczby kardynalnej n , tj.

$m \leq n$ wtedy i tylko, gdy $(\forall A, B) [|A| = m \text{ i } |B| = n \text{ oraz}$

$(\forall C \subset B) [A \sim C]$;

D11.a2 Liczba kardynalna m jest mniejsza od liczby kardynalnej n , tj.

$m < n$ wtedy i tylko, gdy $m \leq n$ oraz $m \neq n$.

D11.b1 $|A| \leq |B|$ wtedy i tylko, gdy $(\forall C \subset B) A \sim C$;

D11.b2 $|A| < |B|$ wtedy i tylko, gdy $|A| \leq |B|$ oraz $|A| \neq |B|$.

W13.a Jeżeli $A \subset B$, to $|A| \leq |B|$,

W13.b Jeżeli $m < n$, to $m \leq n$,

T28.a Jeżeli $n \in \mathcal{N}$, to $n < \aleph_0$;

b dla dowolnej liczby kardynalnej m : $m < 2^m$;

c $\aleph_0 < c$.

T29. Dla dowolnych liczb kardynalnych m, n, t :

a $\sim(m < m)$;

b $m \leq m + n$;

c jeżeli $m = n$, to $m \leq n$;

d jeżeli $m \leq n$ oraz $n \leq t$, to $m \leq t$;

e jeżeli $m \leq n$, to $m + t \leq n + t$;

f jeżeli $m \leq n$, to $m \cdot t \leq n \cdot t$;

g jeżeli $m \leq n$, to $m^t \leq n^t$;

h jeżeli $m \leq n$, to $t^m \leq t^n$.

T30.a Dla dowolnych liczb kardynalnych m oraz n : $m \leq n$ lub $n \leq m$;

b Dla dowolnych liczb kardynalnych m oraz n : $m < n$ albo $n < m$ albo $m = n$.

T31.a Dla dowolnych liczb kardynalnych m i n : jeżeli $m \leq n$ oraz $n \leq m$, to $m = n$;

b Dla dowolnych zbiorów A, B, C : jeśli $A \subset B \subset C \wedge A \sim C$, to $A \sim B$ i $B \sim C$.

W14 Dla dowolnych liczb kardynalnych m, n, t :

jeżeli $m \leq n \wedge n \leq t \wedge m = t$, to $n = t$.

T32 Dla dowolnych liczb kardynalnych m i n : $\sim(m \leq n \text{ oraz } n < m)$.

T33.a Jeżeli $n \in \mathcal{N}$, to $n + c = c$;

b $\aleph_0 + c = c$;

c jeśli n jest liczbą naturalną ≥ 2 , to $n^{\aleph_0} = c$;

d $\aleph_0^{\aleph_0} = c$.

****RIV.4 = Antynomie teorii mnogości**

W1 Nie istnieje zbiór uniwersalny.

W2 Nie istnieje zbiór wszystkich liczb kardynalnych.

- A.I Aksjomat jednoznaczności.** Jeśli zbiory A i B mają jednakowe elementy, to zbiory te są identyczne.
- A.II Aksjomat zbioru pustego.** Istnieje zbiór taki, że żadne x nie jest elementem tego zbioru: $(\forall Z \wedge x) x \notin Z$.
- A.III Aksjomat pary.** Dla dowolnych przedmiotów x i y istnieje zbiór, którego jedynymi elementami są te przedmioty: $(\wedge x, y \forall X) X = \{x, y\}$.
- A.IV Aksjomat sumy.** Dla każdej rodziny zbiorów \mathbf{K} istnieje zbiór S zawierający wszystkie i tylko te elementy, które są elementami jakiegoś zbioru X należącego do rodziny \mathbf{K} :
 $(\wedge \mathbf{K} \forall S \wedge x) [x \in S \Leftrightarrow (\exists X \in \mathbf{K}) x \in X]$.
- A.V Aksjomat zbioru potęgowego.** Dla każdego zbioru Z istnieje rodzina \mathbf{P} wszystkich jego podzbiorów: $(\wedge Z \forall \mathbf{P}) X \in \mathbf{P} \Leftrightarrow X \subset Z$.
- A.VI Aksjomat nieskończoności.** Istnieje rodzina zbiorów \mathbf{K} taka, że należy do niej zbiór pusty i jeśli jej elementem jest zbiór A , to jej elementem jest również zbiór $(A \cup \{A\})$:
 $(\forall \mathbf{K}) [\emptyset \in \mathbf{K} \wedge (\wedge A \in \mathbf{K}) (A \cup \{A\}) \in \mathbf{K}]$.
- A.VII Aksjomat wyboru.** Dla każdej niepustej rodziny \mathbf{K} zbiorów niepustych i wzajemnie rozłącznych istnieje zbiór C , który ma dokładnie jeden element wspólny z każdym zbiorem rodziny \mathbf{K} :
 $(\wedge X, Y \in \mathbf{K}) [X \neq \emptyset \wedge (X \neq Y \Rightarrow (X \cap Y) = \emptyset)] \Rightarrow$
 $\Rightarrow (\exists C \wedge X \in \mathbf{K} \forall_1 x) x \in (C \cap X)$.
- T1** Dla każdego zbioru X istnieje relacja, która ten zbiór dobrze porządkuje.
- A.VIII Aksjomat podzbiorów.** Aksjomatem jest każde wyrażenie o postaci: $(\wedge A \forall B \wedge x) [x \in B \Leftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x))]$.
- A.IX Aksjomat zastępowania.** Aksjomatem jest każde wyrażenie o postaci: $(\wedge x, y, z) [\Phi(x, y) \wedge \Phi(x, z) \Rightarrow y = z] \Rightarrow$
 $\Rightarrow (\wedge A \forall B \wedge y) [y \in B \Leftrightarrow (\exists x \in A) \Phi(x, y)]$.

INDEKS POJĘĆ I NAZWISK

Drukiem wytłuszczonym są wyróżnione pojęcia, które oprócz bezpośrednich mają także uszczegółowienia dalsze. Symbol \Rightarrow odsyła do pojęcia pokrewnego, a \Leftarrow wskazuje, że dane pojęcie jest w indeksie uwzględnione odrębnie. W zestawieniu nie uwzględniono pojęć i nazwisk występujących wyłącznie w bibliografii.

aksjomat/ty 78–80

- jednoznaczności 273, 321
- nieskończoności 274, 321
- Nicoda-Lukasiewicza 84–85
- pary 273, 321
- podzbiorów (wyróżniania, definicyjny) 275–276, 321
- sumy 273, 321
- typu relacyjnego 226–227
- wyboru (a. Zermelo) 224, 237, 274–275, 321
- zastępowania 276, 321
- zbioru potęgowego 273, 321
- zbioru pustego 273, 321

aksjomatyka/zacja 78–86

- aksjomatyki równoważne 100
- finitystyczna (skończona)/infinitystyczna 84, 276
- klasycznego rachunku zdań 78–86 \Rightarrow system KRZ
 - Hilberta-Bernaysa 79–83
 - Lukasiewicza 83–86
 - Nicoda-Lukasiewicza 84–85
- niezależność aksjomatów 79, 85
- rachunków deontycznych 98
- r. Heytinga 104–105
- r. modalnych 95, 98
- r. nazw 143
- r. wielowartościowego (systemu Ł3) 94
- teorii mnogości 174, 178, 226, 272–277
 - Zermelo-Fraenkla-Skolema 272–277
- węższego rachunku predykatów 119

algebra Boola 172

alternatywa \Rightarrow klasyczny rachunek zdań

antynomia/e 269–271

a. teorii mnogości \Rightarrow ogólna teoria mnogości

rodzaje a. 269–270

usuwanie a. 271–277

Arystoteles 93, 142

Banach S. 265, 275

Batóg T. 13, 83, 119

Bernays P. 78, 79, 272, 280

Bernstein F. 265, 266

binegacja \Rightarrow klasyczny rachunek zdań

Bonevac D. 44

Boole G. 172

Borel É. 103

Borkowski L. 11–13, 31, 38, 43, 44, 47, 77, 80, 86, 106, 118, 119, 129, 153, 229,
237, 258, 265, 268, 271, 272, 276, 279, 285, 288

Brouwer L.E.J. 103, 104

Brożek A. 217

Burali-Forti C. 277

Cantor G. 103, 262, 265, 266, 268–271, 276

Cauchy A.L. 275

Church A. 215

Chwistek L. 271

ciąg 24–25, 185, 215–218, 238–248, 259–260, 257–268, 274, 281, 311, 316–
317

definicja indukcyjna c. 216

dziedzina/przeciwdziedzina (zapas) ciągu 215, 238–241

nieskończony/skończony 215–216, 238–245, 247–248, 259–260, 267–268,
274, 316–317

podwójnie nieskończony 241–242

wyraz (element) ciągu 24–25, 185, 215–216, 218, 239–245, 274, 311, 316–
317

Czeżowski T. 20, 93, 217

Dąbrowski A. 84, 173, 283

Dedekind R. 236, 270, 281

definicja/e

indukcyjna (przez rekurencję) 21–22, 215–216

warunek indukcyjny 23, 216

warunek wstępny 216

przez abstrakcję 218

matrycowe (tabelkowe) funktorów \Rightarrow funktor

dowód

efektywny/nieefektywny 103–104

indukcyjny 22–23, 129, 258

intuicjonistyczny 103–104

rozgałęziony

wprost 68–69, 76, 78, 130–131

niewprost 70, 78

założeniowy

wprost 48–50, 53, 55–56, 153, 179

niewprost 48–50, 53–57, 59–60, 63, 67, 70, 104, 140, 142, 153, 179, 184, 188, 191, 209, 222, 236–237, 265–266, 270

zwykły

wprost 48, 50–51, 81

niewprost 48, 50–51, 60

Dummett M. 106

Duns Szkot J. 46, 61

dysjunkcja \Rightarrow klasyczny rachunek zdań

działania na zbiorach

dopełnienie 180, 188–190, 192, 197, 201, 281, 308

iloczyn 106, 182–187, 189, 192, 198, 201–202, 206, 209, 211–212, 273, 281, 307–308

rodziny zbiorów 187, 202

uogólniony 185–186, 201–202, 281

zawartości matryc 106

zbiorów wyznaczonych przez formuły zdaniowe 192–193

i. kartezjański (produkt) 195–199, 231, 240–241, 253, 256, 281, 308–309, 317

klasa odwzorowań zbioru w zbiór 211, 255–257, 264

różnica 182, 187–189, 192, 197–198, 201, 205, 281, 307

symetryczna 188, 281

zbiorów wyznaczonych przez formuły zdaniowe 192–193

suma 182–189, 197–198, 200–202, 205–206, 209, 211–212, 220, 232, 240–242, 246–248, 250, 252–255, 266, 273, 281, 307–308

rodziny zbiorów 187, 202, 246–248

uogólniona 185–186, 200–202

zbiorów wyznaczonych przez formuły zdaniowe 192–193

zbiór ilorazowy 219, 234

zbiór potęgowy 178, 187, 202, 233, 246, 248–249, 253, 260–261, 270–271, 273, 321

działanie/a 12, 74–75, 91, 182–190, 200–215

na funkcjach zdaniowych \Rightarrow reguła/y

d. podstawiania 75–76

d. zastępowania 73–77, 83–84, 119–120, 137–138

na liczbach kardynalnych \Rightarrow teoria l. k.

na relacjach 200–207 ⇒ **relacje**
na zbiorach ⇐
pojęcie działania ⇒ **funkcja**

Euler L. 157

Feys R. 98

Fraenkel A. 272, 276

Frege G. 46, 79, 80, 82

funkcja/e

argument/wartość f. 23–25, 185, 188–189, 197, 209–211, 213–215, 230,
246, 249, 256–257, 267

ciąg ⇐

częściowa 215–216, 240, 256, 311

działanie ⇐

dziedzina/przeciwdziedzina f. 208–210, 215

identycznościowa 187, 216, 230, 237, 263

f. i. ograniczona 230, 232

iloczyn f. 211–212

jedno-jednoznaczna (wzajemnie jednoznaczna, różnowartościowa, doskonała)
213–215, 225–226, 230–231, 238, 241, 246, 247, 250, 256–257, 263,
266, 311

odwrotna (konwers f.) 213, 238, 253, 255, 259

permutacja 215–216, 311

pojęcie f. 208–210

prawdziwościowa 23–24

pojęcie f. p. 24

wartościowanie 24–29, 44

f. wartościująca 25

przedłużenie f. 215, 311

rodzina f. 208, 211, 255

rodzina odwzorowań 211, 231, 253

suma f. 211–212

zdaniowa/e (formuła/y z.) 19, 31, 45, 171, 190, 193, 276, 281

rozłączne 191

zawsze niespełniona (antytautologia) / zawsze spełniona (tautologia) 17,
44–46, 85, 94, 105, 110, 114, 279, 293

złożenie f. 212–213, 263, 310

funktor/y (spójnik/i)

argument f. 20–21, 23–36, 39, 42, 89, 94, 97–98, 110, 126, 292

deontyczne (orzeczniki d., stałe d., terminy d.) 88, 98–102

modalne (orzeczniki m., stałe m., terminy m.) 87, 92–95, 97–98

nazwotwórczy 122

prawdziwościowe (ekstensjonalne, zakresowe) /niep prawdziwościowe (intensjonalne, treściowe) 17–43, 71–74, 83, 87, 89–90, 94, 112, 126, 136, 148, 269, 279, 282–283, 291–293 \Rightarrow klasyczny rachunek zdań \Rightarrow f. modalne \Rightarrow \Rightarrow f. deontyczne
 pojęcie f. p. 23, 292
 definicje matrycowe (tabelkowe) f. 18, 25–29, 44, 90, 279
 jako funkcje prawdziwościowe 24–25
 związki definicyjne między f. p. 29–43, 293
 zdaniotwórcze 23, 94, 110, 144, 292

Gentzen G. 43
 Gödel K. 98, 106, 107, 272
 Grygianiec M. 217
 Grzegorzczak A. 13, 109, 225
 Gumański L. 20, 103, 142, 158

Haack S. 89
 Hałkowska K. 11, 216, 220, 224, 225, 272, 274
 Heine H.E. 275
 Heyting A. 104–107
 Hilbert D. 78, 79, 280
 Hoły-Łuczaj M. 84, 173, 283

iloczyn

kartezjański zbiorów \Rightarrow działania na zbiorach
 relacji \Rightarrow relacja/e
 zbiorów \Rightarrow działania na zbiorach

implikacja \Rightarrow klasyczny rachunek zdań

interpretacja

matrycowa 92, 105
 semantyczna 117, 126, 195, 204
 zdań kategorycznych \Rightarrow teoria wynikania zdań kategorycznych \Rightarrow WRP
 mocna/słaba 165–166, 169, 193–194
 w rachunku zbiorów 171, 193–195, 283, 308
 w WRP 143, 145, 165–170, 283, 305–306

Jankov V.A. 106
 Jastrzębski P. 164
 Johansson I. 107
 Jonkisz A. 11, 13, 97, 109, 143, 217

klasyczny rachunek zdań (KRZ) 17–86

częściowy 280
 formuły (wyrażenia) KRZ 19–22

funktory (spójniki) KRZ

alternatywa

rozłączna 18, 26, 100

zwykła (nierozłączna) 18, 20, 26, 31–35, 39–42, 46–48, 53–54, 60, 62–63, 6971, 76–77, 87, 96–97, 101–106, 122, 126, 130–133, 148–149, 192, 212, 222, 293

binegacja 18, 27–28

dysjunkcja 28, 37, 40–41, 43, 84, 95, 100, 149

implikacja 19–20, 26–27, 49, 56, 84, 96, 98, 162, 165–170, 174–175, 177–186, 188–189, 191–192, 195, 201, 203, 206, 212–213, 218–219, 234, 236–237, 251, 264, 273, 276, 292

materialna 97

ściśła 96, 98

koniunkcja 18–19, 25–26, 28, 31–32, 34–35, 38–42, 45–49, 51, 57, 60, 62, 65, 68–69, 71, 75–77, 80, 83, 86–87, 91, 96–97, 101–102, 104–106, 126, 130, 138, 141, 148, 154, 175, 178, 183–186, 188, 191–192, 199, 201, 209, 212–214, 222, 230, 235, 247, 251, 253, 265–267, 292

negacja 18–21, 23, 25–27, 30–31, 34–36, 39–43, 45–46, 48–51, 53–56, 60, 65, 80, 83, 85, 96, 105, 119, 125, 136, 138, 141, 154–156, 158–159, 176, 192, 209, 235–236, 270, 291, 293

równoważność 18, 26–27, 30–31, 33–36, 39–40, 42–43, 46–48, 54–56, 59–60, 62–63, 65–66, 73, 75, 77, 80, 83–86, 91–92, 125–126, 128–129, 131, 136, 140–141, 146, 155, 165, 168, 174–176, 183–184, 190, 193–194, 201, 204–205, 214, 217, 220, 235, 238–239, 251, 269–270, 272, –273, 281, 292

związki definicyjne między f. 29–43

język/metajęzyk KRZ 17–23

notacja polska (beznawiasowa) 20

składnia 19–22

słownik 18–19

system KRZ \Leftarrow

tautologie (prawa) KRZ 43–47 \Rightarrow prawo/a

pojęcie t. 44

sprawdzanie tautologiczności 43–45

metodą Genzena 43–44

m. sprowadzania do postaci normalnych 44

m. tablic (drzew) semantycznych 43–44

m. zero-jedynkową 43–45, 279

Kobziński J.K. 103, 106

Koj L. 99

koniunkcja \Rightarrow klasyczny rachunek zdań

Kopania J. 173

Koszteln J. 15

Kozanecka A. 88

- Kozanecka-Dymek A. 88
 Krajewski S. 103, 268
 Kreisel G. 106
 Kripke S. 106
 Kronecker L. 103
 Kulicki P. 143
 Kuratowski K. 13, 224, 225, 229, 241, 245, 251, 258, 265, 272–274, 277, 281
 kwadrat logiczny
 klasyczne zdania kategoryczne 143, 145–149 \Rightarrow teoria wynikania zdań kate-
 gorycznych
 zdania modalne i deontyczne 147–149
 kwantyfikator \Rightarrow rachunek predykatów (kwantyfikatorów)
- Lebesgue H. 103
 Lechniak M. 88, 92, 97, 153
 Leibniz G.W. 139
 lemat Kuratowskiego-Zorna \Rightarrow twierdzenie
 Leszczyński D. 95
 Leśniewski S. 173
 Lewis C.I. 98
 liczba porządkowa \Rightarrow teoria liczb kardynalnych
 Lindenbaum A. 229, 281
- logika/i** (rachunki, systemy)
 deontyczna 12, 88, 98–103, 143, 280
 dwuwartościowa/ wielowartościowa 17, 27, 87–89, 279
 dynamiczna 88
 ekstensjonalna/intensjonalna 17, 87–88, 129–130, 142, 174, 178, 273, 279
 epistemiczna 88
 erotetyczna (pytań) 88
 intuicjonistyczna 88, 103–107
 klasyczna/nieklasyczna 17, 87–88, 279
 modalna (modalna aletyczna) 12, 87–88, 92, 94–99, 102, 143, 280
 parakonsystentna 88
 pośrednia 88, 106–107
 rozmyta 88
 temporalna 88
 zdań 12, 17- 107104–105, 110
 r. częściowy 84, 280
 r. klasyczny 17–88 \Rightarrow KRZ
 r. nieklasyczny 89–107 \Rightarrow logika nieklasyczna
- Łukasiewicz D. 93
 Łukasiewicz J. 20, 78, 79, 83–85, 89, 90, 92, 93, 95, 106, 142, 280

Malinowski G. 89

Marciszewski W. 88, 272

metoda/y

aksjomatyczna 17, 78–86, 114, 137, 279–280 ⇒ system dedukcyjny ⇒ system KRZ

dyrektywalna (w sylogistyce) 153–154, 157, 162, 166–168, 170, 305 ⇒ teoria wynikania zdań kategorycznych
 efektywna/nieefektywna 103–104

Gentzena 43

matrycowa 18, 25, –26, 43–44, 89–90, 92–93, 105–106, 279, 292, 299

matryce Heytinga 105–106

zawartość matrycy 105

mnemotechniczna (w sylogistyce) 151–157

nieskończonościowe 103

przekątniowa (przekątnych) 241–242, 245, 282

sprowadzania do postaci normalnych 44

tablic semantycznych 43–44

Venna (diagramów Venna) 144, 157–164, 167–168, 170, 180, 193–195 ⇒
 ⇒ teoria wynikania zdań kategorycznych

założeniowa 12, 17, 47, 114, 279 ⇒ system dedukcyjny ⇒ system KRZ

założeniowa a aksjomatyczna 17, 78, 80, 86, 114, 119, 279, 281 ⇒ system dedukcyjny

zero-jedynkowa (KRZ) 43–45 ⇒ klasyczny rachunek zdań

moc zbioru ⇒ teoria liczb kardynalnych

Morgan A. de 46, 60, 62, 101

Morgenstern O. 217

Mostowski A. 13, 224, 225, 229, 241, 245, 251, 258, 265, 272–274, 277

nazwa

cudzysłowowa, quasi cudzysłowowa 19, 115, 136

pusta, jednostkowa (indywiduowa), ogólna 137, 149 ⇒ rachunek predykatów

negacja

nazwowa (przed-, przynazwowa) 144, 150, 154, 158, 169

uogólniona 144

zdaniowa (przed-, przyzdaniowa) ⇒ klasyczny rachunek zdań

Neuman J. von 217, 232, 272

Nicod J. 84, 85, 280

ogólna teoria mnogości 171–277

aksjomaty teorii m. 272–277 ⇒ aksjomatyka

antynomie t. m. 269–277

a. Russella 269–270

a. zbioru uniwersalnego 270

a. zbioru wszystkich liczb kardynalnych 270–271

- a. zbioru wszystkich liczb porządkowych 277
- a. zbioru wszystkich zbiorów 270
- rachunek zbiorów \Leftarrow
- teoria liczb kardynalnych \Leftarrow
- teoria relacji \Leftarrow
- operator**
 - abstrakcji 113, 173–174, 190, 197
 - deskrypcji 113
 - kwantyfikator \Leftarrow
- paradoks 268, 270, 275
 - Banacha-Tarskiego 275
 - Cantora 270
- Pascucci M. 95
- permutacja \Rightarrow funkcja/e
- Piróg-Rzepecka K. 11, 216, 220, 224, 225, 272, 274
- Pogorzelski W.A. 17, 86, 88, 109
- Poincaré H. 103
- prawo/a** \Rightarrow reguły
 - de Morgana 46, 59–62
 - dodawania implikacji stronami 46, 69
 - Dunsa Szkota 46, 61
 - dylematu destrukcyjnego 46–47
 - prostego 46
 - złożonego 47
 - dylematu konstrukcyjnego 67–69
 - prostego 46, 67
 - złożonego 46, 68–69
 - eksportacji i importacji 46
 - ekstensjonalności 71–73
 - alternatywy 72
 - implikacji 72–73
 - koniunkcji 72
 - kwantyfikatorów 129
 - równoważności 71, 73
 - Fregego 82
 - inwersji 143, 149–150, 305
 - kontrapozycji 143, 149–150, 156, 305
 - konwersji 143, 149, 153, 168, 305 łączności alternatywy 46
 - łączności koniunkcji 46
 - mnożenia alternatyw 77
 - mnożenia implikacji stronami 67
 - modus ponendo ponens* 46, 65

- modus ponendo tollens* 46
- modus tollendo ponens* 46
- modus tollendo tollens* 46, 55, 65
- negowania alternatywy (2 p. de Morgana) 46, 59–60
- negowania implikacji 46, 63–64
- negowania koniunkcji (1. p. de Morgana) 46, 61–62
- negowania kwantyfikatora 124–126
 - ogólnego 124
 - szczegółowego 124–125
 - n. ciągu kwantyfikatorów 125–126
- niesprzeczności (sprzeczności) 45, 60–61
- obwersji 143, 149–150, 155–156, 167–169, 305
- odwracania implikacji stronami 47, 70–71
- opuszczania/dodawania dołączania)
 - alternatywy 48
 - koniunkcji 48
 - równoważności 46, 48
- podwójnej negacji (przeczenia) 45, 54
- przechodności
 - identyczności 128
 - implikacji 46
 - równoważności 66–67
- przemienności
 - alternatywy 46
 - koniunkcji 46, 75
- przenoszenia kwantyfikatorów 132–135
 - w alternatywie 132–133
 - w implikacji 133–135
 - w koniunkcji 133
- redukcji do absurdu 46
- rozdzielności
 - alternatywy względem koniunkcji 46
 - koniunkcji względem alternatywy 76–77
- rozkładania/wyciągania kwantyfikatorów 126–131
 - dla alternatywy 130–131
 - dla implikacji 127
 - dla koniunkcji 126–127, 130–131
 - dla równoważności 128
- sylogizmu warunkowego 46, 52
- symetryczności dla identyczności 128
- tożsamości 45
- transpozycji
 - dla implikacji 46, 56
 - dla równoważności 65

- złożonej 46
- wyląconego środka 46, 60
- zastępowania
 - implikacji alternatywą 62
 - implikacji koniunkcją 64–65
 - równoważności koniunkcją implikacji 48, 75
- zwrotności dla identyczności 137
- predykat \Rightarrow rachunek predykatów
- przesłanka (w sylogistyce) mniejsza, średnia, większa \Rightarrow teoria wynikania zdań
 - kategorycznych
- Putnam H. 106

- Quine W. 272

- rachunek**
 - funkcyjny 109
 - predykatów \Leftarrow
 - zbiorów \Rightarrow ogólna teoria mnogości
 - zdań \Rightarrow logika zdań
- rachunek predykatów** (kwantyfikatorów) 11–12, 51, 104, 109–170, 190, 270, 279
 - kwantyfikator 44, 51, 104, 110–119 \Rightarrow reguła/y
 - ilościowy 112
 - ogólny (duży), szczegółowy (mały, egzystencjalny) 112, 114, 120
 - o ograniczonym zakresie 119, 122–123
 - zasieg k. 112, 116
 - predykat (orzecznik) 110–114
 - jednoargumentowy, n -argumentowy 110–111, 113
 - pierwszego rzędu, rzędu n 111, 113, 115
 - rodzaje r. p. 112–113
 - klasyczny 87, 109, 114–142, 279
 - n -argumentowy 112–113
 - pierwszego rzędu, rzędu n , rzędu ω 113–114
 - węższy r. p. (WRP) \Leftarrow
 - zmienna/stała
 - indywidualowa 110–111, 113, 115–116, 122, 136–137
 - predykatowa 110–111, 113
 - wolna/związana 112–113, 115–116, 120, 124, 129, 132, 134, 137
- Ramsey F.P. 271
- reguła/y** \Rightarrow prawo
 - budowania dowodów
 - pierwotne 48–51
 - b. d. założeniowych 49
 - wprost 49–50

- niewprost 49–50
- b. d. zwykłych 50
- wprost 50
- niewprost 51
- wtórne
 - b. d. rozgałęzionych
 - wprost 68
 - niewprost 70
 - dołączania implikacji do dowodu 56–59
 - negowania założeń dodatkowych 59–60
 - pojęcie r. wtórnej 52
- dołączania wierszy do dowodu
 - pierwotne 47–48, 119–122
 - dołączania/opuszczania
 - alternatywy 48, 54
 - koniunkcji 48
 - kwantyfikatorów 119–122
 - równoważności 48
 - odrywania dla implikacji 47–48
- wtórne 52–77, 123–142
 - dodawania implikacji stronami 69
 - dołączania/opuszczania negacji 54
 - dylematu konstrukcyjnego 67–69
 - prostego 67–68
 - złożonego 68–69
 - ekstensjonalności dla kwantyfikatorów 129
 - mnożenia implikacji stronami 67–68
 - negowania alternatywy 59–60
 - n. implikacji 63–64
 - n. koniunkcji 61–62
 - n. kwantyfikatora 124–126
 - ogólnego 124
 - szczegółowego 124–125
 - n. ciągu kwantyfikatorów 125–126
 - odrywania dla równoważności 65
 - odwracania implikacji stronami 70–71
 - podstawiania 74, 119–120
- tollens
 - dla implikacji 55
 - dla równoważności 65
- transpozycji
 - dla implikacji 56
 - dla równoważności 56, 66
- zastępowania 73–77, 83–84, 137–138

- dla identyczności 137–138
- dla równości definicyjnej 83–84
- dla równoważności 73–74, 130
- wnioskowania niezawodna/ nie niezawodna 47, 79, 149–157, 305
- relacja/e**
 - argument r. 199–201, 207–209
 - asymetryczna 207, 216, 220
 - działania na relacjach 201–207
 - suma relacji 201–203
 - dopełnienie r. 201–203
 - iloczyn r. 201–203
 - różnica r. 201–203
 - superpozycja (złożenie, iloczyn względny) r. 203, 205–207, 232, 281
 - dziedzina/przeciwdziedzina r. (d. lewostronna/prawostronna) 200, 208–210
 - identyczności 109, 111, 113–114, 135–142, 200, 204, 237, 280, 304
 - między zakresami zbiorów (zbiorami)
 - r. identyczności (tożsamości) 174, 178, 280, 306
 - r. inkluzji (zawierania się, podporządkowania) 174, 280, 306
 - r. krzyżowania 159, 174, 181, 201, 280, 306
 - r. rozłączności 174, 179, 181, 195, 201, 231, 250, 252, 254, 263, 266, 274, 277, 281, 306
 - odwrotna (konwers r.) 203–205, 207, 213, 281, 301
 - określona i wykonalna w danym zbiorze 209
 - pojęcie r. 199–200
 - pole r. 200, 226
 - porządkująca 220–224
 - częściowo 220–221
 - liniowo 220–221
 - dobrze 223–224
 - przechodnia 207, 217, 220, 227
 - r. między relacjami 200–201
 - homomorfizm 225–226
 - h. struktur relacyjnych 226
 - identyczność r. 201
 - inkluzja 201
 - izomorfizm 207, 225–229
 - i. struktur relacyjnych 226–229
 - rodzina r. 208, 213
 - równoliczności 229–239, 242–243, 246–249, 252, 255–257, 260–268, 271, 281, 314–318
 - klasa abstrakcji r. równoliczności 233–234
 - równościowa (równoważnościowa) 217–218
 - spójna 207, 216, 220

- struktura (system, układ) relacyjna 226–229
- symetryczna 204, 207, 217, 227
- typ systemu relacyjnego 226–227, 232–233
- zwrotna 207, 216, 227
- równoliczność zbiorów \Rightarrow teoria liczb kardynalnych równoważność \Rightarrow klasyczny rachunek zdań
- różnica zbiorów \Rightarrow działania na zbiorach
- Russell B. 110, 269–272, 276, 282

- Schumann A. 84, 173, 283
- Scott P. 106
- Sheffer H. 28
- Skolem T. 272, 275
- Słupecki J. 11, 47, 77, 86, 89, 118, 119, 216, 220, 224, 225, 229, 237, 272, 274, 279
- Smoczyński P.J. 217
- Sobociński B. 89
- Stone M.H. 106
- Strawiński W. 217
- struktura relacyjna (system, układ relacyjny) \Rightarrow relacje
- suma zbiorów \Rightarrow działania na zbiorach
- sylogistyka \Rightarrow teoria wynikania zdań kategorycznych
- sylogizm/y \Rightarrow teoria wynikania zdań kategorycznych
- system/y dedukcyjny/ne** \Rightarrow logika
 - adekwatny 85–86
 - aksjomatyczny 78–79, 81–86, 114, 119, 137, 143, 174, 178, 226, 232–233, 271–272, 275, 277, 279
 - KRZ \Leftarrow
 - logik pośrednich 12–13, 88, 106–107
 - logiki deontycznej 12, 88, 98–103, 143, 280 98
 - l. intuicjonistycznej 104–107
 - l. modalnej 95, 98
 - l. wielowartościowej 94
 - niesprzeczny (w s. syntaktycznym) 85–86
 - pełny 85–86
 - reguły dowodzenia (wyprowadzania, inferencji) \Rightarrow reguła/y
 - pierwotne/wtórne 47–51, 52, 78, 294 \Rightarrow prawo \Rightarrow reguła/y
 - równoważne 86
 - terminy s. d.
 - pierwotne 28, 78–79
 - wtórne 78–79
 - teza s. 43–44, 47, 49–54, 57–58, 61–68, 70–75, 77–86, 93–95, 98, 103, 105–106, 114, 118–121, 123–137, 142, 171, 280
 - WRP \Leftarrow

- założeniowy 47–78, 80, 84, 86, 95, 171
 założeniowe a aksjomatyczne 17, 78, 80, 86, 119, 279
 zupełny 85–86
- system KRZ** \Rightarrow klasyczny rachunek zdań
 aksjomatyczny 78–86 \Rightarrow aksjomaty \Rightarrow aksjomatyka
 Hilberta i Bernaysa 79–83
 Łukasiewicza 83–86
 dysjunkcyjny 84–85
 implikacyjno-negacyjny 83–85
 Nicoda-Łukasiewicza 84–85
 ujęcie metajęzykowe 83–84
 założeniowy 47–78 \Rightarrow reguła/y
 reguły pierwotne 47–51
 tezy i reguły wtórne 52–78
- Świrydowicz K. 88, 99
- Tarski A. 105, 106, 229, 265, 275, 281
- teoria**
 liczb kardynalnych \Leftarrow
 liczb porządkowych 233
 ogólna teoria mnogości \Leftarrow
 relacji \Leftarrow
 typów logicznych 233
 wynikania zdań kategorycznych \Leftarrow
 zbiorów \Rightarrow rachunek zbiorów
- teoria liczb kardynalnych** 220–268
 działania na l. k. 249–261
 iloczyn l. k. 253–255
 potęga l. k. 255–259, 267
 suma l. k. 250–253, 258–259, 267
 l. k. skończone/nieskończone 235–237
 liczba \aleph_0 238–239, 243–244, 252–255, 258–259, 262, 267
 liczba c 238, 243, 259–262, 267
 liczba porządkowa 232–233, 271, 277
 moc zbioru 227, 229, 232–239, 241, 248–254, 261, 266, 268, 270, 281, 315–
 316
 nierówności w zbiorze l. k. 261–267
 pojęcie l. k. 233–235
 równoliczność zbiorów 229–239, 242–243, 246–249, 252, 255–257, 260–
 268, 270, 281, 314–318
 równości w zbiorze l. k. \Rightarrow działania na l. k.
 skala liczb kardynalnych 245–249, 267–268
 teoria relacji 196–229 \Rightarrow relacja/e

teoria wynikania zdań kategorycznych 109, 142–170

interpretacja zdań kategorycznych

w WRP (i. słaba, mocna) 165–170

w rachunku zbiorów 193–195

podstawowe prawa wynikania

p. kwadratu logicznego 145–147

a p. logiki deontycznej i modalnej 147–149

p. inwersji, kontrapozycji, konwersji, obwersji 149–150

sylogistyka 142–170

figury sylogizmów 151–152

sylogizm 150–151

termin mniejszy s. 151

t. rozłożony 153–154

t. średni 151

t. większy 151

sprawdzanie poprawności log. wnioskowań 150–15

metoda Venna (Eulera) 157–164

niezawodne tryby wnioskowania 151–153

warunki (dyrektywy) dla przesłanek i wniosku 151–157

tryby sylogistyczne 153–155

Tkaczyk M. 88, 95

Tuboly A.T. 95

twierdzenie

Banacha 265

(paradoks) Banacha-Tarskiego 275

Cantora-Bernsteina 265–266

(lemat) Kuratowskiego-Zorna 224, 274, 281

zasadnicze t.o izomorfizmie 228–229

(zasada maximum) Zorna 224

Tyburski W. 217

typ struktury relacyjnej \Rightarrow relacje

Umezawa T. 106

Venn J. 144, 157, 162, 164, 167, 168, 170, 180, 193–195, 280

Wajsberg M. 89

wartościowanie \Rightarrow funkcja prawdziwościowa

Weyl H. 103

węzsy rachunek predykatów (WRP) 114–142

formuła WRP 116

interpretacja formuły 117, 126

otwarta 116

zamknięta (zdanie) 116–118

- pravo 117–118
- język/metajęzyk WRP 114–116
 - słownik 114
 - składnia 115–116
- system założeniowy WRP 114, 118–135
 - reguły pierwotne 119–122
 - dołączania/opuszczania kwantyfikatorów 119–122
 - kwantyfikatory o ograniczonym zakresie 122–123
 - tezy i reguły wtórne 123–135 ⇒ prawo/a
 - WRP z identycznością 113, 135–142
- Wiśniewski R. 217
- Woleński J. 20, 83, 84, 88, 89, 92, 93, 95, 99, 103, 106, 107, 268

zbiór/ory

- dystybutywny/kolektywny 172–173, 280
- działania na zbiorach ⇐
- ilorazowy 219–220, 234
- klasa abstrakcji 218–220, 233, 311–312
- krzyżujące się 159, 174, 181, 201, 280, 306
- moc zbioru 227, 229, 232–239, 241, 248–254, 261, 266, 268, 270, 281, 315–316
- obraz (R-obraz)/przeciwobraz z. 187, 202, 210–211, 276, 310
- ograniczony z dołu/z góry 223–224
- podporządkowane (nadrzędne, podrzędne) 174, 280, 306
- podzbiór zbioru uporządkowanego 222–223
- potęgowy 178, 187, 202, 233, 246, 248–249, 253, 260–261, 270–271, 273, 321
- przeliczalny/nieprzeliczalny 18, 238–249, 316–317
- pusty 115, 144–145, 163, 165, 171–177, 194, 219, 223, 232, 236–237, 240–243, 250, 252, 254, 273–274, 277, 280, 306, 321
- rodzina (klasa) zbiorów 172, 178, 189, 197, 209, 224, 232–4, 237, 240, 242, 246–249, 260, 262, 268, 270, 273, 277, 316–317, 321
- rozłączne 174, 179, 181, 195, 201, 231, 250, 252, 254, 263, 266, 274, 277, 281, 306
- równoliczne 229–239, 242–243, 246–249, 252, 255–257, 260–268, 271, 281, 314–318
- skończony/nieskończony 12, 22–24, 84, 106–107, 113, 115, 185, 215–216, 229, 235–248, 252–255, 258–260, 266, 269, 273–275, 281, 311, 315–317, 321
 - w sensie Dedekinda 236–237, 281
- tożsame 174, 280, 306
- uniwersalny (uniwersum) 111, 171–176, 188–189, 192, 232–233, 249, 270–271, 277, 282
- uporządkowany

- ciągły 223, 313 gęsty 223, 313
- częściowo 220–224, 281, 312–313
- dobrze 220–221, 223–224, 281, 313
 - kres dolny/górny z. u. 223, 313
 - element minimalny/maksymalny z. u. 221–222, 312
 - e. pierwszy/ostatni z. u. 221–223, 312
- liniowo 220–223, 281, 312–313
- wszystkich zbiorów 232, 248, 269–270, 277, 280, 282, 318
- wyznaczone przez funkcje zdaniowe 12, 171, 190–193, 197, 202, 276, 281, 308
- zdanie/zdania**
 - deontyczne 98–102, 147–149
 - kategoryczne 12–13, 142–145 \Rightarrow teoria wynikania zdań kategorycznych
 - dopełniające się 146–149
 - ilość/jakość z. k. 144, 146
 - ogólnoprzeczące 143, 146
 - ogólnotwierdzące 143, 146
 - szczegółowotwierdzące 143, 146
 - szczegółowoprzeczące 143, 146
 - podporządkowane 146–149
 - podprzeciwne 146–149
 - przeciwne 146–149
 - sprzeczne 146–149
 - wykluczające się 146–149
 - modalne 93, 147–149
 - de dicto* 94
 - de re* 94
 - o zdarzeniach przyszłych 92
 - niezdeteminowanych 92
 - pewnych 92
 - wykluczonych 92
- Zermelo E. 272, 274
- Ziemiński Z. 146
- Zorn M. 224, 274, 281

Książka ta jest drugą spośród trzech składających się na opracowanie wybranych zagadnień z logiki. Zagadnienia podjęte w rozważaniach są wybrane z logiki formalnej i ogólnej teorii mnogości. Najobszerniej jest omawiany klasyczny rachunek zdań, a zwłaszcza metoda założeniowa; spośród rachunków zdań nieklasycznych zostały wybrane rachunki logiki wielowartościowej, modalnej (rozumianej wąsko), deontycznej oraz logika intuicjonistyczna i tzw. logiki pośrednie.

Również charakterystyka logiki predykatów jest skupiona na rachunkach klasycznych – ponownie z naciskiem na system założeniowy. Teoria wynikania zdań kategorycznych jest najpierw omówiona odrębnie, w sposób przyjęty w sylogistyce, uzupełniony o nowsze metody, po czym teoria ta jest zinterpretowana w rachunku predykatów.

W rozdziale poświęconym teorii mnogości są podjęte zagadnienia zwykle umieszczane w jej części zwanej ogólną: podstawowe pojęcia rachunku zbiorów i relacji, wybrane zagadnienia teorii liczb kardynalnych, zagadnienia związane z antynomiami klasycznej teorii mnogości oraz ze sposobami ich usuwania.

Wyniki prezentowane w niniejszej książce, poświęconej zagadnieniom logiki formalnej i ogólnej teorii mnogości, sformułowane w niej definicje, twierdzenia i dowody są – co nieuniknione – wzorowane na znanych opracowaniach. Nie są jednak ich kompilacją, ponieważ różnią się nie tylko układem definicji i twierdzeń, lecz także ich sformułowaniami zapisanymi w jednolitej notacji (symbolice), komentarzami i przykładami, a często także sposobem uzasadniania twierdzeń (sposobem dowodzenia). Są także w książce merytorycznie nowe propozycje, jak algorytmiczna metoda wyszukiwania zależności definicyjnych między funktorami prawdziwościowymi oraz uproszczone metody sprawdzania poprawności logicznej wnioskowań ze zdaniem kategorycznymi.

ISBN 978-83-7614-613-3



Fundacja
Ignatianum