ADAM JONKISZ

ZAGADNIENIA SYNTAKTYKI I SEMANTYKI SYSTEMÓW DEDUKCYJNYCH

WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIWERSYTETU IGNATIANUM W KRAKOWIE

ZAGADNIENIA SYNTAKTYKI I SEMANTYKI SYSTEMÓW DEDUKCYJNYCH

ADAM JONKISZ

ZAGADNIENIA SYNTAKTYKI I SEMANTYKI SYSTEMÓW DEDUKCYJNYCH

WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIWERSYTETU IGNATIANUM W KRAKOWIE

KRAKÓW 2024

Publikacja sfinansowana z subwencji Ministra Edukacji i Nauki
przeznaczonej na utrzymanie i rozwój potencjału dydaktycznego i badawczego
Uniwersytetu Ignatianum w Krakowie w 2023 roku

Recenzenci
Dr hab. Marek Lechniak, prof. KUL
Prof. dr hab. Jan Woleński

Redakcja
Dariusz Piskulak

Projekt okładki i stron tytułowych
PHOTO DESIGN – Lesław Sławiński

Opracowanie typograficzne i łamanie
Piotr Druciarek

ISBN 978-83-7614-616-4

Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Ignatianum w Krakowie
ul. Kopernika 26 • 31-501 Kraków
tel. 12 39 99 620
wydawnictwo@ignatianum.edu.pl
https://wydawnictwo.ignatianum.edu.pl

Dystrybucja:
Wydawnictwo WAM
Dział Handlowy
tel. 12 62 93 254-255 • faks 12 62 93 496
handel@wydawnictwowam.pl

Księgarnia Wysyłkowa
tel. 12 62 93 260
https://wydawnictwowam.pl

Moim dzieciom
Jakubowi, Justynie, Magdalenie, Karolinie i Zofii

SPIS TREŚCI

Uwagi wstępne 9
Podziękowania 13

Rozdział I: Pojęcia i zagadnienia syntaktyczne 15
1. Formuły rachunków logicznych 15
   1.1 Kategorie syntaktyczne i poprawność składniowa formuł 15
   1.2 Zbiory formuł zamknięte ze względu na określone działania . . 23
   1.3 Postacie normalne 30
   1.4 Dowodzenie twierdzeń o formułach rachunków logicznych . . 33
      1.4.1 Wykorzystanie zasady indukcji 33
      1.4.2 Sprowadzanie do postaci normalnej 38
2. Systemy dedukcyjne – pojęcia i własności syntaktyczne 42
   2.1 Systemy dedukcyjne 43
      2.1.1 Typy systemów dedukcyjnych 43
      2.1.2 Współczesne ujęcie systemów dedukcyjnych 46
   2.2 Pojęcie konsekwencji 48
   2.3 Twierdzenie o dedukcji 57
   2.4 Własności systemów dedukcyjnych 67
      2.4.1 Niesprzeczność 68
      2.4.2 Zupełność 81
      2.4.3 Rozstrzygalność 93
      2.4.4 Niezależność aksjomatów 100

Rozdział II. Pojęcia i zagadnienia semantyczne 105
1. Pojęcia spełniania i prawdy 105
   1.1 Spełnianie 106
   1.2 Pojęcie prawdy 117

2. Systemy dedukcyjne – charakterystyka semantyczna 127
2.1 Prawdziwość twierdzeń i własności zbioru twierdzeń prawdziwych 128
2.2 Pojęcie modelu 141
2.3 Semantyczne rozumienie niesprzeczności 143
2.4 Kategoryczność systemu 145
2.5 Pełność systemu 148
2.6 Pojęcie wynikania 152

Rozdział III: Zagadnienia uzupełniające 163
1. Twierdzenia limitacyjne 163
1.1 Twierdzenia Gödla 164
1.2 Twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności prawdy 167
1.3 Teza i twierdzenie Churcha 169
2. Zestawienie własności wybranych systemów dedukcyjnych 176
3. Pojęcie modelu w rekonstrukcjach teorii empirycznych 178
3.1 Tzw. teoriomnogościowa charakterystyka modelu 178
3.2 Ujęcie teoriomodelowe vs teoriomnogościowe 188

Zakończenie 199

Bibliografia 203

Definicje, twierdzenia, schematy 207

Indeks pojęć i nazwisk 231

UWAGI WSTĘPNE

Książka ta jest ostatnią spośród trzech składających się na opracowanie wybranych zagadnień z logiki[1]. Pośród sformułowanych tu uwag przeważają dotyczące wyłącznie tej książki, choć są także przypomniane zwięźle uwagi aktualne dla całego opracowania[2].

1. Metalogika rozumiana szeroko obejmuje wszelkie rozważania dotyczące logiki. W tak pojmowanej metalogice mieści się np. filozofia logiki – badająca filozoficzne założenia i implikacje logiki – a także historia logiki, często uwzględniana w opracowaniach poświęconych logice[3]. Termin metalogika jest jednak również zawężany tak, że oznacza wyłącznie prowadzone metodami logiki badania jej podstawowych pojęć oraz własności rachunków logicznych (systemów dedukcyjnych). Zagadnienia podjęte w rozważaniach zawartych w niniejszej książce należą niemalże wyłącznie do metalogiki tak rozumianej: są wybrane z ogólnej teorii systemów dedukcyjnych i podzielone w sposób w niej przyjęty, tj. na zagadnienia syntaktyczne i semantyczne. Charakterystyka systemów dedukcyjnych – zarówno syntaktyczna, jak i semantyczna – jest przeprowadzana w metajęzyku w stosunku do języka badanych systemów. W metajęzyku

---

1 Pierwszą częścią jest: A. Jonkisz, *Zagadnienia semiotyki logicznej i ogólnej metodologii nauk*, Kraków 2023; częścią drugą: A. Jonkisz, *Zagadnienia logiki formalnej i ogólnej teorii mnogości*, Kraków 2024.

2 Obszerne uwagi do całego opracowania są w: A. Jonkisz, *Zagadnienia semiotyki logicznej i ogólnej metodologii nauk*, dz. cyt.

3 Filozofię logiki trzeba odróżniać od tzw. logiki filozoficznej, tj. zastosowania logiki do analiz filozoficznych. Na marginesie warto zauważyć, że termin „logika filozoficzna" nie jest trafny, bo chodzi raczej o filozofię korzystającą z metod analizy logicznej, czyli o filozofię logiczną. Por. A.C. Grayling, *Philosophical Logic, the Philosophy of Logic, Philosophy and Logic*, w: tegoż, *An Introduction to Philosophical Logic*, Oxford 1997, s. 1–11.

(metasystemie) są definiowane terminy syntaktyczne i semantyczne odnoszące się do systemów i ich wyrażeń oraz są w nim przeprowadzane rozumowania (dowody) dotyczące ogólnych własności wyrażeń i systemów sformułowanych w języku przedmiotowym. Przy czym wyniki przedstawione w niniejszej książce dotyczą przede wszystkim systemów logiki klasycznej, a zwłaszcza systemów KRZ i WRP omówionych w części drugiej całego opracowania. Zawężenie do systemów dedukcyjnych logiki pierwszego rzędu jest widoczne przede wszystkim w analizach powiązanych definicyjnie i dowodowo; w omówieniach nieformalnych, a często w uwagach historycznych są bowiem uwzględnione inne wyniki, dotyczące nie tylko systemów logiki klasycznej.

1.1 W rozdziale poświęconym pojęciom i zagadnieniom syntaktycznym są najpierw omówione i zilustrowane przykładami sposoby dowodzenia w metajęzyku twierdzeń, w których mowa o formułach rachunków logicznych. Uwzględnione są zarówno rozumowania indukcyjne, jak i dowody, w których korzysta się z pojęcia tzw. normalnej postaci formuły oraz twierdzeń dotyczących postaci normalnych. Podrozdział drugi zawiera syntaktyczną charakterystykę systemów dedukcyjnych: jest w nim wprowadzone pojęcie konsekwencji oraz są zdefiniowane i omówione syntaktyczne własności takich systemów, tj. niesprzeczność, zupełność, rozstrzygalność i niezależność aksjomatów.

1.2 W rozdziale drugim są zdefiniowane kluczowe pojęcia semantyczne, tj. spełniania i prawdy, po czym jest rozwinięta semantyczna charakterystyka systemów dedukcyjnych, w której są podjęte zagadnienia związane z prawdziwością twierdzeń i własnościami systemu twierdzeń prawdziwych, pojęciem modelu, niesprzecznością semantycznie rozumianą i kategorycznością systemu, pojęciem pełności systemu oraz relacją wynikania logicznego (semantycznego).

1.3 Rozważania zawarte w rozdziele ostatnim nie są powiązane definicyjnie i dowodowo z wcześniejszymi wynikami całego opracowania – ani z zawartymi w tej książce, ani z przedstawionymi we wcześniejszych dwóch jego częściach. Najpierw są omówione w sposób nieformalny wybrane twierdzenia metalogiki, które ukazują ograniczenia metod logiki formalnej (tzw. twierdzenia limitacyjne), następnie są zestawione własności syntaktyczne i semantyczne wybranych systemów dedukcyjnych, a w ostatnim podrozdziale jest ukazany sposób definiowania i stosowania pojęcia modelu w rekonstrukcjach teorii empirycznych.

2. W zakresie zagadnień podjętych w niniejszej książce, wybranych z ogólnej teorii systemów dedukcyjnych – tak samo, a nawet można ocenić, że bardziej niż w przypadku kwestii podjętych w dwóch poprzedzających częściach – są aktualne uwagi i zastrzeżenia co do celu całego opracowania i jego wyników. Otóż i w tej książce przeważa styl odpowiedni dla adresata wkraczającego w logikę, tj. sprawozdawczy i objaśniający, a nie właściwy dla analiz kierowanych do specjalistów podejmujących poszczególne zagadnienia, co przejawia się także tym, że niewiele jest odniesień do innych opracowań. Styl sprawozdawczy jest częściowo usprawiedliwiony, w zakresie zagadnień prezentowanych w książce trudno bowiem o jakieś nowe wyniki. Dlatego zawartych w niej innowacji można się doszukiwać niemalże wyłącznie w sposobie prezentacji znanych zagadnień, konstrukcji dowodów znanych twierdzeń, doborze przykładów i komentarzach[4]. Nowe są jedynie drobne uzupełniania wyników zastanych: zagadnienie poprawności składniowej jest omówione szerzej niż zwykle, tj. uzupełnione analizami formuł rachunków logicznych; są podane nieszkicowe i sformułowane oddzielnie dla wyrażeń zdaniowych i dla zdań dowody praw wyciągania (i rozkładania) orzecznika prawdy przed (i na) wyrażenia z funktorami prawdziwościowymi; klasyczne rozumienie aksjomatyzacji i modelu (teoriomodelowe w sensie A. Tarskiego) jest zestawione z ujęciem zw. teoriomnogościowym, wykorzystywanym w rekonstrukcjach teorii empirycznych.

3. W niniejszej książce są zachowane umowy co do skrótów stosowanych w odesłaniach do wyników przedstawionych w innych miejscach całego opracowania: znaki *, ** i *** wskazują na główne jego części, następnie

---

[4] Wybór zagadnień i sposób ich ujęcia jest wzorowany przede wszystkim na: L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, Lublin 1991, a także na: T. Batóg, *Podstawy logiki*, Poznań 2003 i A. Grzegorczyk, *Zarys logiki matematycznej*, Warszawa 1981; G. Hunter, *Metalogika*, tłum. B. Stanosz, Warszawa 1982. Uwagi do prezentowanych wyników są mocno wsparte – zwłaszcza w zakresie zagadnień semantycznych, lecz także faktów historycznych – na monografiach J. Woleńskiego: *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, Warszawa 1985; *Epistemologia*, t. 3: *Prawda i realizm*, Kraków 2003; *Epistemologia. Poznanie – prawda – wiedza – realizm*, Warszawa 2014; *Semantics and Truth*, Cham 2019.

cyfry rzymskie na rozdział danej części, a cyfry arabskie – na podrozdziały i ich części[5].

3.1 Definicje (**D**), twierdzenia (**T**), twierdzenia pomocnicze (**L**) i wnioski (**W**) są numerowane odrębnie w każdym podrozdziale, zwykle kolejnymi liczbami (**D1**, **D2**, **D3**, ...; **T1**, **T2**, ...), są jednak także dodatkowe wskaźniki, np. **D4.a**, **D4.a'**, **D1.1**, **D4.b''**; **T4.1**, **T11.1**, **T12.a**; **L1.4**, **W1'**, **W3.b** – stosowane, gdy oznaczone w ten sposób wyniki są powiązane, jak na przykład definicje tego samego lub zbliżonych pojęć, grupa pokrewnych twierdzeń lub wniosków. Częściej przytaczane (nie tylko w tym opracowaniu) definicje i twierdzenia oraz reguły wnioskowania (dołączania nowych wierszy do dowodu) będą oprócz oznaczeń wskazujących na ich miejsce w rozważaniach oznaczane także skrótami, które łatwiej jest skojarzyć z treścią definicji lub twierdzenia, np. **RO** wskazuje na regułę odrywania, **O**$\bigwedge$ na regułę opuszczania kwantyfikatora dużego, **df**$\subset$ na definicję relacji zawierania się zbiorów.

3.2 Zamieszczane w dowodach lub uwagach odesłania do oznaczanych symbolicznie wyników (definicji, twierdzeń, lematów, wniosków itp.) są zorganizowane następująco:
(i) wyniki, dla których wprowadzono symbol niezależny od ich miejsca w rozważaniach, są oznaczane danym symbolem (np. **df**$\subset$);
(ii) pozostałe wyniki:
– gdy wskazywany wynik został osiągnięty w bieżącym podrozdziale, jest oznaczany tylko swoim symbolem, np. **D3** to trzecia definicja, a **T2.1** to twierdzenie **2.1** aktualnego podrozdziału;
– gdy wynik pochodzi z innego podrozdziału, wtedy jego oznaczenie symboliczne jest poprzedzone skrótem wskazującym odpowiedni fragment opracowania, np. **RI.3: **D1.3** to definicja **1.3** w trzecim podrozdziale rozdziału pierwszego części pierwszej całego opracowania; **RIII.2: **T15** to piętnaste twierdzenie drugiego podrozdziału trzeciego rozdziału części drugiej. ***RI.2: **T14** to czternaste twierdzenie drugiego podrozdziału pierwszego rozdziału niniejszej książki. Takie same skróty wskazujące

[5] Zgodnie z tą umową symbol * wskazuje na pierwszą część, tj.: A. Jonkisz, *Zagadnienia semiotyki logicznej i ogólnej metodologii nauk*, dz. cyt.; znak ** odsyła do części drugiej, tj.: tenże, *Zagadnienia logiki formalnej i ogólnej teorii mnogości*, dz. cyt.; a *** jest używany w odesłaniach do wyników prezentowanych w niniejszej książce.

na miejsce w rozważaniach są również stosowane do wyników nienumerowanych;
(iii) gdy jest to potrzebne, znakiem ■ jest wskazany koniec dowodu.

Podziękowania

Pragnę podziękować wszystkim, którzy pomogli w opracowaniu i opublikowaniu tej książki. Przede wszystkim osobom, które w Uniwersytecie Ignatianum w Krakowie wspierały moje badania nad zagadnieniami logiki – zwłaszcza decyzjami o przyznaniu środków na badania i koszty publikacji; a także pracownikom Wydawnictwa za życzliwą współpracę i skuteczne załatwienie spraw niezbędnych dla ukazania się książki.

Dziękuję także Recenzentom za cenne uwagi. Kierując się nimi, usunąłem błędy, poprawiłem wiele sformułowań, zmieniłem układ rozważań (obecnie są podzielone nie na dwa, lecz na trzy rozdziały) oraz uzupełniłem wcześniejszą wersję książki o nowe wyniki lub zagadnienia (m.in. zagadnienie kategoryczności, zestawienie własności systemów dedukcyjnych oraz nowe twierdzenia, zwłaszcza tzw. limitacyjne Gödla, Tarskiego, Churcha). Dzięki uwagom z recenzji złożyłem do opracowania wydawniczego pracę znacznie lepszą niż przesłana do oceny.

W sposób szczególny dziękuję dr Jolancie Koszteyn, na której sprawną pomoc mogłem niezawodnie liczyć także w pracach nad tą książką, co zaowocowało m.in. usunięciem błędów i luk w opisach bibliograficznych oraz zachowaniem jednego stylu (skróty, przypisy, bibliografia, formatowanie itp.) we wszystkich książkach składających się na całe opracowanie.

ROZDZIAŁ I

POJĘCIA I ZAGADNIENIA SYNTAKTYCZNE

Po analizach, w których metoda sprawdzania poprawności składniowej jest zastosowana do wybranych formuł rachunków logicznych, są w tym rozdziale omówione najpierw podstawowe pojęcia syntaktyki systemów dedukcyjnych oraz oparte na nich metody dowodzenia twierdzeń metalogicznych. Podrozdział drugi jest poświęcony charakterystyce systemów dedukcyjnych – ich typom i własnościom syntaktycznym.

1. Formuły rachunków logicznych

Analizy zawarte w tym podrozdziale nawiązują do zagadnień podjętych zwłaszcza w *RII.4 i *RV.3. Podane tam określenia i rozróżnienia były formułowane tak, by odnosiły się także, a nawet przede wszystkim, do języków służących do porozumiewania się, a analizowane przykłady ich zastosowania zostały zaczerpnięte z języka naturalnego. Obecnie wcześniejsze ustalenia można uzupełnić uwagami dotyczącymi wyrażeń rachunków logicznych oraz określeniami lepiej dostosowanymi do języków formalnych.

1.1 Kategorie syntaktyczne i poprawność składniowa formuł

Warto przypomnieć ustalenia dotyczące terminu „wyrażenie". Otóż termin ten może być rozumiany węziej, tj. jako znak językowy. Tak pojmowane wyrażenie może być badane w każdym z aspektów wyróżnionych w semiotyce, tj. syntaktycznym, semantycznym i pragmatycznym; i tylko w tym znaczeniu wzięte „wyrażenie" jest odpowiednie do badania języków naturalnych, służących do porozumiewania się. Gdy chce się mówić o wyrażeniach ogólnie, uwzględniając języki rachunków logicznych, zakres terminu „wyrażenie" musi być poszerzony tak, by objąć formuły budowane w językach tych rachunków. Jeśli natomiast mowa – jak w tym rozdziale – wyłącznie o syntaktycznej stronie języków rachunków logicznych, można „wyrażenia" rozumieć jako odnoszące się tylko do ciągów symboli (napisów) budowanych w symbolicznych językach tych rachunków, czyli jako odnoszące się do jego formuł niezinterpretowanych.

Ograniczenie analiz wyłącznie do wyrażeń-formuł (napisów, ciągów symboli) języków niezinterpretowanych pozwala zawęzić wcześniej przyjętą definicję należenia wyrażeń do tej samej kategorii syntaktycznej (*RII.4: **D1**), ułatwia stosowanie sprawdzianu poprawności składniowej wyrażeń (*RV.3.2) oraz daje możliwość ogólnego zdefiniowania poprawnie zbudowanego wyrażenia logicznego.

D1 Dowolne formuły f_1 oraz f_2 języka niezinterpretowanego $J = \langle S, G \rangle$ należą do tej samej kategorii składniowej wtedy i tylko, gdy dla dowolnej składniowo poprawnej formuły zdaniowej F tego języka, w której występuje jedna z formuł f_1 oraz f_2, jest tak, że po jej zastąpieniu drugą z tych formuł uzyskana w wyniku formuła F' jest składniowo poprawną formułą zdaniową języka J.

W definicji należenia wyrażeń do tej samej kategorii odpowiedniej dla języków rachunków logicznych, choć mowa w niej o formułach – a nie, jak w ogólnej definicji *RII.4: **D1**, o dowolnych wyrażeniach – to nadal jest zachowana możliwość stosowania tego warunku także do zdań, tj. do formuł zdaniowych bez zmiennych wolnych.

Podstawowe spośród wcześniej omówionych syntaktycznych kategorii wyrażeń – tj. wyrażenia zdaniowe, wyrażenia nazwowe, funktory i operatory – występują w językach rachunków logicznych. W taki sam sposób są w nich również wyróżniane kategorie składniowe funktorów i operatorów oraz są stosowane wskaźniki tych kategorii, trzeba jedynie pamiętać, że gdy w językach rachunków logicznych kwalifikuje się funktor lub operator jako zdaniotwórczy albo nazwotwórczy, wtedy chodzi zwykle o tworzenie form (funkcji, formuł) zdaniowych albo form nazwowych.

Na przykład w tezie KRZ: $\sim(p \wedge \sim p)$ (**RI.3.2: **T13**) symbol „p" jest wyrażeniem zdaniowym, jako że p to zmienna zdaniowa, a zmienne są tej samej kategorii składniowej, co podstawiane za nie stałe; natomiast $\sim$ oraz $\wedge$ są funktorami zdaniotwórczymi – przy czym symbol „$\sim$" jest funktorem jednego argumentu zdaniowego, a znak koniunkcji jest funktorem wiążącym dwa argumenty zdaniowe. Funktory te należą zatem do jednej rodziny funktorów zdaniotwórczych, lecz do odrębnych kategorii, ponieważ, jak wiemy, kategoria funktora jest określona nie tylko przez to, co funktor tworzy (przez kategorię syntaktyczną wyrażenia utworzonego), lecz także – z czego wyrażenie jest tworzone, tj. ile argumentów, jakich (jakiej kategorii składniowej) i w jakiej kolejności funktor wiąże. Zdaniotwórcze jednoargumentowe są także funktory **K**, **M** w formułach rachunku modalnego, użyte np. w prawie: $\mathbf{K}p \veebar \mathbf{M}{\sim}p$ (**RII.2: **T1.c**), a także funktory **N**, **D**, widoczne np. w napisie: $[\mathbf{N}(p \Rightarrow q) \wedge \mathbf{D}p] \Rightarrow \mathbf{D}q$ (**RII.2: **T3.b**). Zdaniotwórcze dwuargumentowe są operatory $\bigvee$ oraz $\bigwedge$ użyte np. w zdaniu: ${\sim}(\bigvee x)\, A(x) \Leftrightarrow (\bigwedge x)\, {\sim}A(x)$, w którym wiążą zmienną x oraz funkcję zdaniową, odpowiednio, $A(x)$ oraz ${\sim}A(x)$. Należy przy tym pamiętać, że po związaniu kwantyfikatorem zmienna x staje się jego wskaźnikiem, za który nie można podstawiać stałych z zakresu zmiennej indywiduowej x, jak jest to możliwe, gdy zmienna ta jest użyta poza zasięgiem tych operatorów. Ograniczenie to dotyczy zmiennych związanych przez dowolny operator i jest ważne, gdy mowa o podstawianiu symboli stałych za zmienne. W formule: $x \in (A \cup B)$ symbol sumy jest funktorem nazwotwórczym dwu argumentów nazwowych, a symbol „$\in$" jest funktorem zdaniotwórczym dwóch argumentów nazwowych, natomiast w formie zdaniowej: $x \in \bigcap A_i$, $i = 1, \ldots, n$ – symbol $\bigcap$ jest operatorem nazwotwórczym wiążącym wskaźnik i oraz n argumentów nazwowych (jak na to wskazuje zakres wskaźnika i), a symbol „$\in$" i w tym napisie jest funktorem zdaniotwórczym dwóch argumentów nazwowych. Warto dla porównania zauważyć, że w napisie: A_i, $i = 1, \ldots, n$, symbol „i" jest już zmienną o zakresie 1, 2, ..., n, napis ten jest funkcją nazwową ciągu zbiorów, a rolę funktora tworzącego tę funkcję pełni sam układ i wielkość symboli użytych w „A_i", tj. umieszczenie zmiennej i w indeksie dolnym zmiennej nazwowej A, za którą można podstawiać nazwy zbiorów. W napisie: $R_{|A}$ rolę funktora nazwotwórczego dwóch argumentów nazwowych pełni umieszczony w indeksie dolnym znak |. Podobnie w złożonym symbolu $\aleph_0^{\aleph_0}$ rolę funktora pełni układ symboli składowych, funktor „ukryty" w tym napisie jest nazwotwórczy dwóch argumentów nazwowych, każdy z jego argumentów to nazwa jednostkowa oznaczająca moc zbioru liczb naturalnych, a złożona, generalna, symboliczna nazwa jednostkowa $\aleph_0^{\aleph_0}$

oznacza ten sam obiekt, co prosta, indywidualna, umowna nazwa jednostkowa $\mathfrak{c}$, użyta np. w równości: $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (**RIV.3: **T33d**). Z kolei każda nazwa uzyskana z podstawienia w funkcji $R_{|A}$ stałych z zakresu zmiennych nazwowych R i A oznacza określoną relację ograniczoną do danego zbioru, a relacje ograniczone do zbiorów, na ogólnym poziomie funkcji zdaniowych, definiuje równość: $R_{|A} = \{x, y: x, y \in A \wedge x\ R\ y\}$ (**RIV.2: **D4.b**), w której znak identyczności to funktor zdaniotwórczy dwóch argumentów nazwowych, a przy tym funkcja nazwowa $\{x, y: x, y \in A \wedge x\ R\ y\}$ jest wynikiem zastosowania operatora abstrakcji {... : ...}, którym zostały związane nazwowe zmienne indywiduowe x i y (są wskaźnikami tego operatora) oraz funkcja $x, y \in A \wedge x\ R\ y$; itp.

Zgodnie z uwagami sformułowanymi w (*RV.3) można budować również wskaźniki kategorii dla funktorów i operatorów logicznych, ustalać strukturę formuł rachunków logicznych (hierarchię ich symboli składowych) oraz sprawdzać ich poprawność składniową. W poniższych przykładach formuły czerpane z rachunków logicznych będą oznaczane symbolem „w” (co odsyła do ogólnie rozumianego terminu „wyrażenie”), napisy ukazujące ich strukturę – znakiem „s”, a ciągi symboli uwzględniające kategorie syntaktyczne składników analizowanego wyrażenia – wskaźnikiem „k”. Na przykład struktura formuły:

(w_1) $\sim(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$ (**RI.3: **T34**),

przedstawiona zgodnie z wcześniejszymi uwagami (*RV2.3), wygląda tak:

(s_1) $\Leftrightarrow \{\sim(\Leftrightarrow (p, q)), \vee [\wedge (p, \sim(q)), \wedge (q, \sim(p))]\}$.

By sprawdzić poprawność składniową formuły (w_1), trzeba ustalić kategorie składniowe symboli w tej formule: $\Leftrightarrow$ to spójnik, czyli funktor zdaniotwórczy dwóch argumentów zdaniowych; ~ to funktor zdaniotwórczy jednego argumentu zdaniowego itd. W analizowanych tu przykładach będzie stosowany przyjęty w *RV.2 sposób zapisu wskaźników kategorii syntaktycznych, tj.: z = wyrażenie zdaniowe, n = wyrażenie nazwowe, / = funktor, a przy tym w „liczniku” (przed kreską) wskaźnika funktora jest symbol kategorii syntaktycznej wyrażenia utworzonego, a w „mianowniku” (po kresce) symbole kolejnych argumentów funktora. Zapisywanie wskaźnika funktorów nie za pomocą kreski ułamkowej, choć mniej przejrzyste, jest typograficznie prostsze, dla uproszczenia napisów będą także stosowane nawiasy – po to, by uniknąć stosowania podwójnych, potrójnych itd. ukośników, wskazujących na miejsce funktora w strukturze wyrażenia (wcześniej był stosowany sposób wyłącznie „ukośnikowy”, bo analizowane wyrażenia były syntaktycznie prostsze). Ponadto będzie pomijana spacja: we wskaźnikach funktorów i operatorów między ich argumentami; między wskaźnikiem funktora/operatora a nawiasem, w którym są oznaczone jego argumenty (czyli – spacja będzie wstawiana tylko między wskaźnikami argumentów funktora).

Wynikiem zastosowania tych umów notacyjnych do (s_1) jest ciąg symboli:

(k_1) $z/z,z\{z/z(z/z,z(z,\ z)),\ z/z,z[z/z,z(z,\ z/z(z)),\ z/z,z(z,\ z/z(z))]\}$.

Redukcja wskaźników kategorii w kolejności wskazanej przez nawiasy, czyli według tego, jak wiążą funktory, daje w wyniku symbol „z", co potwierdza, że (w_1) jest poprawnie zbudowanym wyrażeniem zdaniowym KRZ.

(w_2) $(\bigwedge x)\ [A(x) \Rightarrow p] \Rightarrow ((\bigwedge x)\ A(x) \Rightarrow p)$ (**RIII.2:**T19)**

(s_2) $\Rightarrow \{\bigwedge[x, \Rightarrow (A(x), p)], \Rightarrow [\bigwedge(x, (A(x)), p]\}$.

W przypadku operatorów zmienna związana przez operator (jego wskaźnik) będzie oznaczana symbolem „v", z indeksem dolnym wskazującym na kategorię syntaktyczną zmiennej związanej przez operator, i będzie oddzielana średnikiem od drugiego jego argumentu. Stosując i tę zasadę zapisywania wskaźników kategorii syntaktycznych, trzeba w przypadku (s_2) uwzględnić fakt, że kwantyfikator jest w nim operatorem wiążącym zmienną nazwową.

(k_2) $z/z,z\{z/v_n;z[v_n;\ z/z,z(z/v_n(v_n),\ z)],\ z/z,z[z/v_n;z(v_n;\ z/z,z(z/v_n(v_n),\ z)]\}$.

Symbol zmiennej związanej użyty we wskaźniku dla kwantyfikatora musi być także użyty w innych miejscach występowania zmiennej nazwowej x, bo w przeciwnym razie redukcja wskaźników kategorii syntaktycznych składników formuły prowadzi do błędnych ustaleń. Na przykład poprzednik implikacji (w_2), tj.:

$(\bigwedge x)\ [A(x) \Rightarrow p]$

jest reprezentowany w (k_2) przez napis:

$z/v_n;z[v_n;\ z/z,z(z/v_n(v_n),\ z)]$,

w którym $z/v_n(v_n)$ redukuje się do z, a wobec tego $z/z,z(z/v_n(v_n), z)$ upraszcza się do z, co podstawione w napisie $z/v_n;z[v_n;\ z/z,z(z/v_n(v_n), z)]$ prowadzi do końcowej redukcji tego poprzednika do symbolu z. Ponieważ w analogicznej redukcji do symbolu z upraszcza się również człon (k_2) odpowiadający następnikowi implikacji (w_2), więc końcowe uproszczenie wskaźnika głównej implikacji wyrażenia (w_2), tj. $z/z,z$ z (z, z) daje w wyniku symbol z. Na marginesie warto odnotować, że gdy na oznaczenie zmiennej x wiązanej przez kwantyfikator jest użyty (w każdym miejscu reprezentowania zmiennej x) nie symbol v_n, lecz ogólniejszy symbol n, sprawdzenie poprawności składniowej metodą redukcji wskaźników prowadzi do takiej samej oceny.

(w$_3$) $x \in \bigcap A_i,\ i = 1, \ldots, l \Leftrightarrow (x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_l)$
(**RIV.1: **D7.a2**).

Upraszczając analizę pierwszego członu tej równoważności, a drugi jej człon zapisując bez umów skracających zapisy, można strukturę równoważności (w$_3$) przedstawić formułą:

(s$_3$) $\Leftrightarrow \{\in (x, \bigcap A_i,\ i = 1, \ldots, l\ ), [\wedge(\in(x, A_1), \in(x, A_2) \wedge, \ldots,$
$\wedge(\in(x, A_{l-1}), \in(x, A_l) \ldots)]\}.$

Można jednak przyjąć umowę, że koniunkcja wiążąca więcej niż dwa czynniki jest oznaczana symbolem wskazującym na liczbę argumentów, a zakres *i* jest ograniczony wskaźnikiem liczby argumentów dla $\wedge$. Korzystając z tej umowy, da się strukturę formuły (w$_3$) zapisać prościej:

(s$_3$)’ $\Leftrightarrow [\in(x, \bigcap A_i,\ i = 1, \ldots, l\ ), \wedge_l\ (\in(x, A_i)].$

Drugi argument funktora $\Leftrightarrow$ jest wyrażeniem (funkcją) zdaniowym, jest bowiem koniunkcją formuł zdaniowych o strukturze $\wedge(x, A)$. Jeśli chodzi o pierwszy argument, to napis

$\bigcap A_i,\ i = 1, \ldots, l$

jest nazwą (zbioru), warto jednak dokładniej opisać rolę składniową operatora $\bigcap$. Prościej jest stwierdzić, że napis $\bigcap A_i,\ i = 1, \ldots, l$ jest rozwinięciem symbolu $\bigcap_{i=1}^{l} A_i$ oraz że operator ten tworzy nazwę, wiążąc zmienną nazwową *i* oraz nazwę *A*, czyli należy do kategorii $n/v_n;\ n$. Bez takiego uproszczenia, czyli analizując napis $\bigcap A_i,\ i = 1, \ldots, l$, stwierdzamy, że w formule tej operator $\bigcap$ tworzy nazwę z wyrażenia nazwowego A_i oraz zdania $i = 1, \ldots, l$, czyli jest rodzaju $n/n,\ z$. A przy tym w napisie A_i jest ukryty funktor nazwotwórczy, tworzący nazwę z dwóch nazw (podobnie jak funktor np. w napisie 2^3), a zdanie $i = 1, \ldots, l$ jest koniunkcją $\wedge_l$ zdań o strukturze $=(i, 1), \ldots, =(i, l)$, w których symbol = jest funktorem zdaniotwórczym 2 argumentów nazwowych.

(w$_4$) $A \sim B \wedge C \sim D \Rightarrow (A \times C) \sim (B \times D)$ (**RIV.3: **L3.c**).

Strukturę tej formuły widać w ciągu symboli:

(s$_4$) $\Rightarrow \{[\wedge\ (\sim (A, B), \sim (C, D))], [\sim (\times\ (A, C), \times\ (B, D))]\}.$

Funktory symbolizowane w formule (w$_4$) są spójnikami ($\Rightarrow$, $\wedge$), predykatami ($\sim$) albo funktorami nazwotwórczymi (działanie iloczynu kartezjańskiego), co jest zaznaczone w ciągu wskaźników kategorii składniowych, zachowującym strukturę tej formuły.

(k$_4$) $z/z,z\{[\ z/z,z\ (z/n,n\ (n, n), z/n,n\ (n, n))], [z/n,n\ (n/n,n\ (n, n),$
$n/n,n\ (n, n))]\}.$

Ciąg ten, co łatwo jest sprawdzić, redukuje się do symbolu *z*.

Analizowane przykłady zostały zaczerpnięte z klasycznego rachunku zdań, węższego rachunku predykatów, rachunku zbiorów i teorii liczb kardynalnych. Miały zilustrować, jak sprawdzian poprawności syntaktycznej da się stosować do wyrażeń rachunków logicznych, a szerzej – do formuł logiki i matematyki. W sposób ogólny można charakteryzować także pojęcie wyrażenia rachunku logicznego (ogólniej – wyrażenia systemu logicznego lub matematycznego). Taka ogólna charakterystyka, tj. obejmująca wyrażenia dowolnych rachunków, może jednak dostarczyć jedynie schematu definicyjnego, według którego można definiować pojęcie wyrażenia dla określonego rachunku.

Pojęcie wyrażenia poprawnie zbudowanego było już określane dla KRZ i WRP, określenia te były następnie zakładane w rachunkach nadbudowanych nad tymi rachunkami. W metalogice są jednak niezbędne takie definicje wyrażenia logicznego, które dają podstawę dowodom twierdzeń dotyczących własności wszystkich wyrażeń – rachunku konkretnego albo dowolnego. Chodzi o definicje indukcyjne, wykorzystywane w indukcyjnych dowodach twierdzeń metalogicznych. Pełna definicja indukcyjna zostanie sformułowana tylko dla wyrażeń KRZ, ponieważ definicje dla innych rachunków i ogólna definicja wyrażenia logicznego (poprawnie zbudowanego) są zbudowane analogicznie do definicji dla KRZ.

Indukcyjna definicja wyrażenia KRZ jest uściśleniem określeń już podanych (**RI.1: **D1**). Są w niej zakładane reguły dotyczące słownika KRZ – tj. symbolizowania zmiennych zdaniowych, stałych specyficznych (funktorów KRZ) oraz używania nawiasów jako symboli pomocniczych – a także umowy co do symbolicznego oznaczania wyrażeń KRZ w metajęzyku, tzn. stosowania nazw cudzysłowach jako metajęzykowych nazw jednostkowych wyrażeń KRZ, metajęzykowych zmiennych nazwowych Φ, Ψ, … Φ_1, Φ_2, …, których zakresem są wyrażenia KRZ, oraz quasi-cudzysłowowych nazw ogólnych wyrażeń KRZ, tj. nazw formuł podpadających pod schemat napisu ujętego (znajdującego się pomiędzy) znakami $\ulcorner$ oraz $\urcorner$. W definicji indukcyjnej wykorzystuje się pojęcie rzędu wyrażenia KRZ oraz dobre uporządkowanie wyrażeń ze względu na ich rząd. Rząd konkretnego wyrażenia KRZ jest o 1 wyższy od najwyższego rzędu któregoś spośród argumentów funktora głównego danego wyrażenia. Na przykład wyrażenie „$p \vee \sim p$” jest rzędu trzeciego, bo „$\sim p$” jest formułą rzędu drugiego, a formuła „$p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$” jest czwartego rzędu, bo następnik tej implikacji, tj. wyrażenie „$\sim p \Rightarrow q$” jest rzędu trzeciego.

D2

(i) Φ jest wyrażeniem 1. rzędu KRZ wtedy i tylko, gdy Φ jest zmienną zdaniową;

(ii) Φ jest wyrażeniem k-tego rzędu wtedy i tylko, gdy istnieją takie wyrażenia Φ_1 i Φ_2 rzędów niższych od k, że Φ jest identyczne z: $\ulcorner \sim\Phi_1 \urcorner$ albo z jednym spośród wyrażeń: $\ulcorner \Phi_1 \wedge \Phi_2 \urcorner$, $\ulcorner \Phi_1 \vee \Phi_2 \urcorner$, $\ulcorner \Phi_1 \veebar \Phi_2 \urcorner$, $\ulcorner \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \urcorner$, $\ulcorner \Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2 \urcorner$, $\ulcorner \Phi_1 \Downarrow \Phi_2 \urcorner$, $\ulcorner \Phi_1 / \Phi_2 \urcorner$ itd.;

(iii) Φ jest wyrażeniem KRZ wtedy i tylko, gdy istnieje taka liczba naturalna n, że Φ jest wyrażeniem n-tego rzędu KRZ.

Reguły słownika i indukcyjna definicja wyrażenia KRZ są zakładane w językach rachunków predykatów. W słowniku każdego rachunku predykatów są ponadto właściwe dla tych rachunków symbole kwantyfikatorów – ogólnego, szczegółowego (tu przyjęte symbole to $\bigwedge$ oraz $\bigvee$), a ponadto mogą być symbole kwantyfikatorów tzw. ilościowych (np. $\bigvee_1$, $\bigvee_n$) – symbole nazwowe (zmienne i stałe) i symbole reprezentujące predykaty – określonego rzędu i liczby argumentów, zależnie od danego rachunku. Na przykład w WRP są wyłącznie symbole predykatów 1. rzędu, jedno- i wieloargumentowe. Do słownika mogą być ponadto dołączane inne symbole stałe, np. symbol identyczności (WRP z identycznością), deskrypcji.

Odpowiednio jest także wzbogacony metajęzyk, w którym zawsze są wprowadzone zmienne reprezentujące symbole nazw – np. w metajęzyku WRP symbole zmienne $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ reprezentujące symbole nazw jednostkowych, czyli reprezentujące zmienne indywiduowe języka przedmiotowego – a ponadto zakresy metajęzykowych zmiennych $\Phi, \Psi, \ldots, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ są rozszerzone tak, by można było podstawiać dowolne wyrażenia opisywanego rachunku kwantyfikatorów (dotyczy to także zakresów tych symboli w nazwach quasi-cudzysłowowych).

Analogicznie do indukcyjnej definicji wyrażenia KRZ są zbudowane definicje wyrażeń dla innych rachunków logicznych. Na przykład w definicji indukcyjnej wyrażenia WRP są najpierw określone wyrażenia pierwszego rzędu, do których – oprócz wyrażeń pierwszego rzędu języka KRZ, zakładanego w tym rachunku, czyli pojedynczych zmiennych zdaniowych – należą formuły elementarne (atomiczne), tj. napisy postaci: $P(x_1, \ldots, x_n)$, w których P to zmienna reprezentująca n-argumentowe predykaty 1-rzędu, a $x_1, \ldots, x_n$ to argumenty funktora P, czyli symbole zmiennych indywiduowych. Wyrażenia rzędów wyższych, czyli poprawnie zbudowane wyrażenia złożone, są budowane z poprawnie zbudowanych wyrażeń rzędów niższych w wyniku ich łączenia funktorami KRZ lub wiązania kwantyfikatorami występujących w nich zmiennych. Oto określenie zgodne z powyższym opisem:

D3

(i) Φ jest wyrażeniem 1. rzędu WRP wtedy i tylko, gdy Φ jest zmienną zdaniową lub wyrażeniem postaci $\ulcorner P(x_1, \ldots, x_n)\urcorner$;

(ii) Φ jest wyrażeniem k-tego rzędu wtedy i tylko, gdy istnieją wyrażenia WRP Φ_1 i Φ_2 rzędów niższych od k takie, że Φ jest identyczne z : $\ulcorner{\sim}\Phi_1\urcorner$ albo z jednym spośród wyrażeń: $\ulcorner\Phi_1 \wedge \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1 \vee \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1 \veebar \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1 \Downarrow \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1 / \Phi_2\urcorner$ itd.; albo Φ jest formułą postaci $(\bigwedge \alpha)\ \Phi_1$ lub $(\bigvee \alpha)\ \Phi_1$, w której α występuje w Φ_1 i Φ_2 jako zmienna indywiduowa;

(iii) Φ jest wyrażeniem WRP wtedy i tylko, gdy istnieje taka liczba naturalna n, że Φ jest wyrażeniem n-tego rzędu WRP.

Ogólna uwaga, jedynie wskazująca drogę do schematu ogólnej definicji wyrażenia rachunku logicznego, jest następująca. W warunku wstępnym definicji indukcyjnej zawsze jest określone wyrażenie pierwszego rzędu, tj. wyrażenie elementarne (proste) poprawnie zbudowane z symboli słownika danego rachunku. Następnie, w warunku indukcyjnym, jest określony sposób poprawnego budowania wyrażeń rzędów wyższych z wyrażeń rzędów niższych, a definicja jest podsumowana stwierdzeniem, że formuła należy do wyrażeń danego rachunku, o ile istnieje liczba naturalna oznaczająca rząd wyrażeń, do których należy wyrażenie dane, rozstrzygane na podstawie definicji.

1.2 Zbiory formuł zamknięte ze względu na określone działania

U podstaw definicji wyrażenia poprawnie zbudowanego dowolnego rachunku leży prosta myśl: ogół wyrażeń danego rachunku to zbiór formuł, które uzyskuje się z symboli prostych w wyniku wykonywania na nich określonych operacji. To ogólnikowe twierdzenie można uściślić, korzystając z pojęć i twierdzeń teorii mnogości. Podstawowe dla właściwej jego precyzacji są pojęcia zbioru zamkniętego oraz własności dziedzicznej ze względu na określoną funkcję (w nawiasach skróty definiowanych pojęć).

D4.a Zbiór A jest zamknięty ze względu na n-argumentową funkcję f ($zam(A, f)$) wtedy i tylko, gdy:
$(\bigwedge x_1, x_2, \ldots, x_n \in A)\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$;

D4.b Zbiór A jest zamknięty ze względu na klasę $\boldsymbol{F}$ funkcji ($zam(A, \boldsymbol{F})$) wtedy i tylko, gdy jest zamknięty ze względu na każdą funkcję tej klasy;

D4.c Własność W jest dziedziczna ze względu na n-argumentową funkcję f ($inh(W, f)$) wtedy i tylko, gdy:

$(\bigwedge x_1, x_2, \ldots, x_n)\ [(W(x_1) \wedge W(x_2) \wedge \ldots \wedge W(x_n)) \Rightarrow W(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))]$;

D4.d Własność W jest dziedziczna ze względu na klasę $\boldsymbol{F}$ funkcji ($inh(W, \boldsymbol{F})$) wtedy i tylko, gdy jest dziedziczna ze względu na każdą funkcję tej klasy.

Zgodnie z **D4.a** zbiór jest zamknięty ze względu na funkcję n-argumentową f – rozumianą zgodnie z zapisem $f \in \mathbf{fun_n}$, objaśnionym w **RIV.2: **D10.3** i **D11.2** – gdy dla argumentów należących do danego zbioru wartości tej funkcji również do niego należą. Jak widać, pod określenie to podpadają działania, zwykle rozumiane wprawdzie jako funkcje dwuargumentowe, lecz rozumiane szerzej mogą być jednoargumentowe i więcej niż dwuargumentowe (zob. uwagi do **D10.3** w **RIV.2). Dlatego zgodnie z **D4.a** i **D4.b** można także mówić o zbiorze zamkniętym ze względu na określone działanie lub klasę działań $\boldsymbol{D}$ – będzie przy tym stosowana umowa, że „$zam(A, \boldsymbol{D})$” to skrót twierdzenia: zbiór A jest zamknięty ze względu na klasę działań $\boldsymbol{D}$. Natomiast własność jest dziedziczna ze względu na daną funkcję, jeśli zawsze jest tak, że ilekroć własność ta przysługuje argumentom tej funkcji, to przysługuje też wartości $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tej funkcji dla tych argumentów. Analogicznie jest rozumiane dziedziczenie własności przez każdą funkcję danej klasy, określone w **D4.d** (także związek między **D4.c** i **D4.d** jest analogiczny do relacji między **D4.a** i **D4.b**). Symbole „$inh(W, f)$” oraz „$inh(W, \boldsymbol{F})$” będą stosowane jako skróty twierdzeń, że własność W jest dziedziczona ze względu na, odpowiednio, funkcję f albo klasę $\boldsymbol{F}$ funkcji.

Pojęcia określone w **D4.a-d** są stosowane w wielu dziedzinach, np. do charakterystyki zbiorów liczb (zamkniętych ze względu na określone działania), mogą być także użyte do charakterystyki zbiorów formuł rachunków logicznych. Na przykład zbiór formuł rachunku zdań (nie tylko klasycznego) jest zamknięty ze względu na: działanie (jednoargumentowe) tworzenia negacji, bo negacja dowolnego wyrażenia zdaniowego jest wyrażeniem zdaniowym danego rachunku; także działania (dwuargumentowe) tworzenia koniunkcji, alternatywy itd. nie wyprowadzają poza ten zbiór. Zbiór formuł zdaniowych, a także ich podzbiór, tj. zbiór praw logicznych, jest także zamknięty ze względu na (poprawnie wykonane) działania podstawiania albo zastępowania itp. Można także powiedzieć, że własność polegająca na tym, że formuły zdaniowe są zbudowane ze skończonej liczby symboli, przysługująca niewątpliwie zmiennym zdaniowym, jest dziedziczna ze względu na działania tworzenia negacji, koniunkcji itd., czyli operację wiązania formuł zdaniowych symbolami funktorów; tak samo własność bycia tezą jakiegoś systemu jest dziedziczna ze względu na działania podstawiania i zastępowania, bo jako wynik (wartość funkcji) tych działań (wykonywanych poprawnie) uzyskuje się z tez tezy danego systemu.

Przydatne w charakterystyce formuł rachunków logicznych jest uszczegółowienie pojęcia określonego w **D4.b**. Chodzi o pojęcie najmniejszego zbioru zawierającego dany zbiór A i zamkniętego ze względu na klasę działań $\boldsymbol{D}$ – zbiór taki będzie oznaczany symbolem „$Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$”. Jak wiadomo z rachunku zbiorów, zbiorem takim jest iloczyn klasy zbiorów, którym ta cecha przysługuje, tj. zawierają dany zbiór i są zamknięte ze względu na klasę $\boldsymbol{D}$. Warunek, by każdy i tylko element zbioru $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ był elementem każdego ze zbiorów takiej klasy, jest uchwycony w kolejnej definicji.

D4.e $x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ wtedy i tylko, gdy $(\bigwedge B)\ [(A \subset B \wedge zam(B, \boldsymbol{D})) \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in B]$.

W definicji tej symbol „$zam(B, \boldsymbol{D})$” jest skrótem powiedzenia: zbiór B jest zamknięty ze względu na klasę działań $\boldsymbol{D}$. Ponieważ do zbioru $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ należą te i tylko te przedmioty, które są elementami każdego zbioru zawierającego zbiór A i zamkniętego ze względu na działania klasy $\boldsymbol{D}$, więc $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ jest iloczynem klasy takich zbiorów (por. **RIV.1: **D7.a4**).

Na podstawie **D4.e** można powiedzieć na przykład, że zbiór formuł KRZ to najmniejszy zbiór zawierający zbiór symboli zmiennych zdaniowych i zamknięty ze względu na działania tworzenia negacji, koniunkcji, alternatywy itd. Podobnie można określić zbiór formuł WRP, rozszerzając odpowiednio zbiór symboli podstawowych (o zmienne nazwowe i symbole predykatowe) oraz klasę działań o operacje wiązania którymś z kwantyfikatorów zmiennych występujących w formułach; analogicznie da się też określić zbiory formuł innych rachunków logicznych.

W badaniach metalogicznych, zarówno syntaktycznych, jak i semantycznych, są wykorzystywane twierdzenia dotyczące pojęcia najmniejszego zbioru zawierającego zbiór dany i zamkniętego ze względu na określoną klasę działań oraz pojęcia własności dziedziczonej ze względu na daną funkcję (działanie). Twierdzenia te będą również pomocne w tych analizach.

L1 $A \subset Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$.

D o w ó d:
Z założeń dodatkowych (zd.):
1.1 $x \in A$
oraz
1.1.1 $A \subset B \wedge zam(B, \boldsymbol{D})$,
uzyskuje się najpierw
1.1.2 $x \in B$ {**RIV.1: **T4**: 1.1, 1.1.1},
a następnie, ponieważ założenie 1.1.1 dotyczy dowolnego zbioru B:
1.2 $(\bigwedge B)\ [(A \subset B \wedge zam(B, \boldsymbol{D})) \Rightarrow x \in B]$ {**D⋀**: 1.1.1 ⇒ 1.1.2}
oraz
1.3 $x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ {$\mathbf{RO}_{\Leftrightarrow}$: **D4.e**, 1.2}.
Zatem:
1. $x \in A \Rightarrow x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ {1.1 ⇒ 1.3},
a ponieważ i ta formuła jest uogólnialna, więc
2. $(\bigwedge x)\ [x \in A \Rightarrow x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})]$,
czyli $A \subset Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ {**df⊂**: 2}.

L2 Jeżeli $A \subset B \wedge zam(B, \boldsymbol{D}))$, to $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D}) \subset B$.

D o w ó d:

Ponieważ zbiór $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$, rozumiany zgodnie z **D4.e**, jest iloczynem wszystkich zbiorów zawierających A i zamkniętych ze względu na działania klasy $\boldsymbol{D}$, więc implikacja **L2** jest oczywista. W dowodzie z zapisem symbolicznym można powiedzieć, że z założeń dowodzonej implikacji:
1. $A \subset B$
2. $zam(B, \boldsymbol{D})$
oraz założenia dodatkowego
1.1 $x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ {zd.}

wynika:

1.2 $(\bigwedge B)\ [(A \subset B \wedge zam(B, \boldsymbol{D})) \Rightarrow x \in B$ {**D4.e**, 1.1},

1.3 $x \in B$ {**RO**: 1, 2, 1.2}.

Po generalizacji implikacji 1.1 ⇒ 1.3 można uznać inkluzję: $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D}) \subset B$.

L3 $zam(Z_{\min}(A, \boldsymbol{D}), \boldsymbol{D})$.

D o w ó d:

Gdyby

1. zbiór $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ nie był zamknięty ze względu na działania klasy $\boldsymbol{D}$ {zdn.},

wtedy

2. istniałaby n-argumentowa funkcja (działanie) $f \in \boldsymbol{D}$ taka, że: dla pewnych $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin A$.

Ponieważ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$, więc

3. $(\bigwedge B)\ [(A \subset B \wedge zam(B, \boldsymbol{D})) \Rightarrow x_1, x_2, \ldots, x_n \in B]$ {**D4.e**}.

Jeśli

1.1 $A \subset B \wedge zam(B, \boldsymbol{D})$ {zd.}, to:

1.2 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$ {**RO** 3, 1.1},

1.3 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B$ {**D4.b**: $f \in \boldsymbol{D}$, $zam(B, \boldsymbol{D})$}.

Ponieważ założenie 1.1 dotyczy dowolnego zbioru, więc:

4. $(\bigwedge B)\ [(A \subset B \wedge zam(B, \boldsymbol{D})) \Rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B]$ {**D⋀**: 1.1 ⇒ 1.3},

a zatem

5. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ {$\mathbf{RO}_{\Leftrightarrow}$: **D4.e**, 4};

co jest sprzeczne z 2.

L4 $Z_{\min}(Z_{\min}(A, \boldsymbol{D}), \boldsymbol{D}) \subset Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$.

D o w ó d:

Z założenia dodatkowego 1.1 $x \in Z_{\min}(Z_{\min}(A, \boldsymbol{D}), \boldsymbol{D})$ wynika:

1.2 $(\bigwedge B)\ [(Z_{\min}(A, \boldsymbol{D}) \subset B \wedge zam(B, \boldsymbol{D})) \Rightarrow x \in B]$ {**D4.e**, 1.1},

1.3 $(Z_{\min}(A, \boldsymbol{D}) \subset Z_{\min}(A, \boldsymbol{D}) \wedge zam(Z_{\min}(A, \boldsymbol{D}), \boldsymbol{D})) \Rightarrow x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ {**O⋀**: 1.2}.

Ponieważ pierwszy człon poprzednika tej implikacji jest oczywisty, a drugi można uznać na podstawie **L3**, więc

1.4 $x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$.

Po generalizacji implikacji 1.1 ⇒ 1.4 uzyskuje się inkluzję **L4**.

L5 Jeżeli $A \subset B$, to $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D}) \subset Z_{\min}(B, \boldsymbol{D})$.

D o w ó d:
Z założenia tej implikacji
1. $A \subset B$
oraz założenia dodatkowego
1.1 $x \in \mathrm{Z}_{min}(A, \boldsymbol{D})$
wynika, że:
1.2 $(\bigwedge B)\ [(A \subset B \wedge zam(B, \boldsymbol{D})) \Rightarrow x \in B]$ {**RO**$_{\Leftrightarrow}$: **D4.e**, 1.1}.
By okazać, że $x \in Z_{min}(B, \boldsymbol{D})$, przypuśćmy, o dowolnym zbiorze C, że
1.1.1 $B \subset C$ i $zam(C, \boldsymbol{D})$;
konsekwencje tego przypuszczenia to:
1.1.2 $A \subset C$ {**RIV.1: **T3**: 1, 1.1.1},
1.1.3 $A \subset C$ i $zam(C, \boldsymbol{D})$ {**DK**: 1.1.2, 1.1.1}
oraz
1.1.4 $x \in C$.
Ponieważ 1.2 dotyczy dowolnego zbioru{**RO**: 1.2, 1.1.3}, więc ten fragment dowodu można oddać implikacją
1.3 $(\bigwedge C)\ [(C \subset B \wedge zam(C, \boldsymbol{D})) \Rightarrow x \in C]$ {**D**$\bigwedge$: 1.1.1 $\Rightarrow$ 1.1.4},
która – zgodnie z **D4.e** – daje podstawę do uznania
1.4 $x \in Z_{min}(B, \boldsymbol{D})$.
Jako że przedmiot x, o którym mowa w założeniu 1.1, także jest dowolny, więc można uznać generalizację
2. $(\bigwedge x)\ [x \in \mathrm{Z}_{min}(A, \boldsymbol{D}) \Rightarrow x \in Z_{min}(B, \boldsymbol{D})]$,
czyli ostatecznie inkluzję: $Z_{min}(A, \boldsymbol{D}) \subset Z_{min}(B, \boldsymbol{D})$. ■

Zbiór $\mathrm{Z}_{min}(A, \boldsymbol{D})$, tj. najmniejszy zbiór zawierający dany zbiór A i zamknięty ze względu na określoną klasę działań $\boldsymbol{D}$ (**D4.e**), jest zatem: nadzbiorem zbioru A (**L1**), podzbiorem każdego spośród nadzbiorów zbioru A (**L2**) oraz jest zamknięty ze względu na działania klasy $\boldsymbol{D}$ (**L3**). Z kolei minimalny zbiór zawierający w sobie zbiór $\mathrm{Z}_{min}(A, \boldsymbol{D})$ i zamknięty ze względu na tę samą klasę działań jest podzbiorem zbioru $\mathrm{Z}_{min}(A, \boldsymbol{D})$ (**L4**), natomiast jeśli dwa minimalne zbiory są zamknięte ze względu na tę samą klasę działań, lecz zbiory, które mają zawierać, wiąże relacja inkluzji, to tak samo zwrócona inkluzja łączy dane zbiory minimalne (**L5**) – to ostatnie twierdzenie wskazuje na monotoniczność (jest twierdzeniem o monotoniczności) działań klasy $\boldsymbol{D}$.

Kolejne twierdzenia dotyczą pojęcia dziedziczenia własności ze względu na daną funkcję lub klasę funkcji.

L6.a $inh(W, f)$ wtedy i tylko, gdy $zam(\{x\colon W(x)\}, f)$.

D o w ó d:

$\boxed{\rightarrow}$

Z założenia implikacji prostej

1. $(\bigwedge x_1, x_2, \ldots, x_n)\ [W(x_1) \wedge W(x_2) \wedge \ldots \wedge W(x_n)) \Rightarrow W(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$

oraz założenia dodatkowego

  1.1 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{x\colon W(x)\}$

wynika:

  1.2 $W(x_1) \wedge W(x_2) \wedge \ldots \wedge W(x_n)$ {**RIV.1: **D10**: 1.1},

  1.3 $W(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ {**RO**: 1, 1.2},

  1.4 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{x\colon W(x)\}$ {**RIV.1: **D10**: 1.3}.

Zatem:

2. $(\bigwedge x_1, x_2, \ldots, x_n)\ [x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{x\colon W(x)\} \Rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{x\colon W(x)\}]$

{**D**$\bigwedge$: 1.1 $\Rightarrow$ 1.4},

co – zgodnie z **D4.a** – jest równoważne z twierdzeniem: $zam(\{x\colon W(x)\}, f)$.

$\boxed{\leftarrow}$

Z założenia implikacji odwrotnej, tj.

1. $(\bigwedge x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{x\colon W(x)\})\ [f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{x\colon W(x)\}]$,

w sposób analogiczny da się wyprowadzić

2. $(\bigwedge x_1, x_2, \ldots, x_n)\ [(W(x_1) \wedge W(x_2) \wedge \ldots \wedge W(x_n)) \Rightarrow W(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))]$,

co równoważne z: $inh(W, f)$. ■

Korzystając z **D4.d** oraz **L6.a**, łatwo jest udowodnić twierdzenie dla funkcji klasy $\boldsymbol{F}$.

L6.b $inh(W, \boldsymbol{F})$ wtedy i tylko, gdy $(\bigwedge f \in \boldsymbol{F})\ zam(\{x\colon W(x)\}, f)$.

Pojęcia zbioru minimalnego $Z_{\min}(A, \boldsymbol{F})$, zakładane w nim pojęcie zbioru zamkniętego ze względu na funkcje określonej klasy, a także prawidłowość ujawniona w **L6** są podstawowe w uzasadnieniu następującego twierdzenia.

T1 Jeżeli $(\bigwedge x \in A)\ W(x)$ oraz $inh(W, \boldsymbol{F})$, to $(\bigwedge x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{F}))\ W(x)$.

D o w ó d:

Założenia twierdzenia to:

1. $(\bigwedge x \in A)\ W(x)$;
2. $inh(W, \boldsymbol{F})$.

Zastosowanie **D4.e** do założenia dodatkowego

  1.1 $x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{F})$

skutkuje uznaniem generalizacji

1.2 $(\bigwedge B)\ [(A \subset B \wedge zam(B, \boldsymbol{D})) \Rightarrow x \in B]$,
która dotyczy również zbioru $\{x\colon W(x)\}$:

1.3 $(A \subset \{x\colon W(x)\} \wedge zam(\{x\colon W(x)\}, \boldsymbol{F})) \Rightarrow x \in \{x\colon W(x)\}$ {**O**$\bigwedge$: 1.2}.
Ponieważ inkluzja $A \subset \{x\colon W(x)\}$ jest oczywista wobec założenia 1., a twierdzenie, że $zam(\{x\colon W(x)\}, \boldsymbol{F}))$ jest wynikiem zastosowania **L6** i **D4.b** do założenia 2., więc można, stosując **RO**, uznać, że

1.4 $x \in \{x\colon W(x)\}$, czyli

1.5 $W(x)$ {**RIV.1: **D10**: 1.4}.

Zatem: $(\bigwedge x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{F}))\ W(x)$ {**D**$\bigwedge$: 1.1 $\Rightarrow$ 1.5}. ■

Twierdzenie **T1** głosi, że jeśli jakaś cecha przysługuje każdemu elementowi danego zbioru i jest dziedziczona (niezmiennicza) ze względu na każdą funkcję (działanie) klasy $\boldsymbol{F}$, to przysługuje także każdemu elementowi zbioru $Z_{\min}(A, \boldsymbol{F})$, tj. minimalnego zbioru zawierającego zbiór dany i zamkniętego ze względu na działania klasy $\boldsymbol{F}$. Twierdzenie to – wykorzystywane w dowodach twierdzeń metalogicznych – daje podstawę dla odmiany zasady indukcji zwanej zasadą indukcji dla najmniejszych zbiorów zawierających jakiś (określony) zbiór i zamkniętych ze względu na działania określonej klasy.

1.3 Postacie normalne

Pojęcie postaci normalnej było już zakładane, gdy były omawiane algorytmiczne sposoby wyszukiwania równoważności ukazujących związki definicyjne między funktorami KRZ (**RI.1.1.3). Wyrażeniom można nadać postać normalną koniunkcyjną albo alternatywną. Przy tym oba te pojęcia oraz ich uszczegółowienia, na przykład tzw. kanoniczna postać normalna – koniunkcyjna albo alternatywna, są podobnie wprowadzane.

D5.a Alternatywa elementarna to n-członowa ($n \geq 1$) alternatywa zmiennych lub ich negacji.

D5.b Koniunkcyjna postać normalna to n-członowa ($n \geq 1$) koniunkcja alternatyw elementarnych.

D5.c Koniunkcyjna postać normalna jakiegoś wyrażenia jest kanoniczna (wyróżniona) wtedy i tylko, gdy występują w niej wyłącznie zmienne danego wyrażenia, a przy tym każda zmienna danego wyrażenia występuje (w postaci zanegowanej lub niezanegowanej) w każdej alternatywie będącej członem tej koniunkcyjnej postaci normalnej.

W alternatywach elementarnych mogą więc być użyte tylko symbole alternatywy i negacji, przy czym argumentem negacji mogą być wyłącznie pojedyncze zmienne. Alternatywą elementarną jest np. zasada wyłączonego środka $p \vee {\sim}p$, tak samo jak formuły ${\sim}p \vee q$; $p \vee {\sim}q \vee r$; ${\sim}r \vee q$; $p \vee {\sim}q \vee r \vee {\sim}r \vee q$ itp. Podane określenia obejmują również przypadki skrajne, tj. alternatyw i koniunkcji jednoczłonowych ($n = 1$), przy czym jednoczłonowa alternatywa elementarna to pojedyncza zmienna lub jej pojedyncza negacja, a jednoczłonowa koniunkcyjna postać normalna to pojedyncza alternatywa elementarna, która może być także pojedynczą zmienną. Czyli pojedyncze zmienne są najprostszymi alternatywami elementarnymi i najprostszymi napisami o koniunkcyjnej postaci normalnej. Natomiast nie spełniają definicji **D5.a** formuły, w których jest użyty symbol jakiegokolwiek innego spójnika, lecz także takie napisy, w których są wprawdzie użyte wyłącznie symbole alternatywy i negacji, lecz negacja nie dotyczy pojedynczych zmiennych, jak np. w napisach $p \vee {\sim}(q \vee r)$, ${\sim}(p \vee {\sim}p)$, ${\sim}({\sim}p)$ – w pierwszym drugi człon jest negacją alternatywy, druga formuła to negacja alternatywy, a nie alternatywa, zaś trzeci napis to negacja negacji, a więc także nie pojedynczej zmiennej.

W kontekście prawa łączności dla alternatywy jest oczywiste, że alternatywne połączenie dwóch lub większej liczby alternatyw elementarnych jest alternatywą elementarną.

L7.a Alternatywa alternatyw elementarnych jest alternatywą elementarną.

Pojęcie alternatywy elementarnej jest podstawowe przy rozstrzyganiu o formułach, czy mają kształt koniunkcyjnej postaci normalnej. Jest bowiem oczywiste, że jeśli człon koniunkcji nie jest alternatywą elementarną, to koniunkcja nie ma postaci normalnej, a jeśli koniunkcja jest jednoczłonowa, to ma postać normalną tylko wtedy, gdy jej człon jest alternatywą elementarną. Na pewno więc postać taką mają jednoczłonowe alternatywy elementarne, np. p, ${\sim}r$, s_1 oraz pojedyncze alternatywy elementarne wieloczłonowe, na przykład każda z zapisanych wyżej: $p \vee {\sim}p$; ${\sim}p \vee q$; $p \vee {\sim}q \vee r$; ${\sim}r \vee q$. Natomiast w przypadku koniunkcji o większej liczbie członów ($n \geq 2$) alternatywą elementarną musi być każdy spośród członów, jak jest np. w napisie $({\sim}p \vee q) \wedge (p \vee {\sim}q \vee r) \wedge ({\sim}r \vee q)$, a nie jest w formule $\sim(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim r \vee q)$, której pierwszy człon nie jest alternatywą elementarną. Prawo łączności dla koniunkcji daje podstawę dla twierdzenia, że koniunkcyjne połączenie koniunkcyjnych postaci normalnych jest koniunkcyjną postacią normalną.

L7.b Koniunkcja koniunkcyjnych postaci normalnych jest koniunkcyjną postacią normalną.

Niektóre spośród koniunkcyjnych postaci normalnych są wyróżnione (tzw. kanoniczne). Mianowicie wyróżnioną postacią normalną danego wyrażenia jest formuła (o postaci normalnej), w której są wyłącznie zmienne występujące w tym wyrażeniu oraz każda spośród tych zmiennych występuje w każdej alternatywie składowej tej formuły. Na przykład jeśli w formule Φ występują wyłącznie zmienne zdaniowe p oraz q, to wyrażenie: $(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$ może być wyróżnioną koniunkcyjną postacią normalną wyrażenia Φ, a na pewno nie są kanoniczne np. postacie normalne $(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q \vee r)$ oraz $(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \wedge p$ – w pierwszej formule bowiem występuje niewystępująca w Φ zmienna r, a w drugiej zmienna q nie występuje w ostatnim członie.

Analogiczne są definicje dla alternatywnej postaci normalnej.

D6.a Koniunkcja elementarna to n-członowa ($n \geq 1$) koniunkcja zmiennych lub ich negacji.

D6.b Alternatywna postać normalna to n-członowa ($n \geq 1$) alternatywa koniunkcji elementarnych.

D6.c Alternatywna postać normalna jakiegoś wyrażenia jest kanoniczna (wyróżniona) wtedy i tylko, gdy występują w niej wyłącznie zmienne danego wyrażenia, a przy tym każda zmienna danego wyrażenia występuje (w postaci zanegowanej lub niezanegowanej) w każdym członie tej alternatywnej postaci normalnej.

Oba pojęcia – tj. koniunkcyjnej i alternatywnej postaci normalnej – są wykorzystywane w badaniach metalogicznych, także w dowodach twierdzeń dotyczących systemów dedukcyjnych i ich wyrażeń.

1.4 Dowodzenie twierdzeń o formułach rachunków logicznych

Indukcyjne definicje wyrażeń rachunków logicznych są wykorzystywane w dowodach twierdzeń dotyczących własności formuł tych rachunków. W tym paragrafie dla ilustracji wystarczą proste przykłady dowodów metalogicznych, z których pierwsze dwa egzemplifikują zastosowanie w takich dowodach definicji **D2** (były już wykorzystane w kontekście indukcyjnej definicji wyrażenia KRZ w **RI.1), a w kolejnych są wykorzystane definicje postaci normalnych.

1.4.1 Wykorzystanie zasady indukcji

Zostaną podane przykłady dowodów twierdzeń mówiących o formułach rachunków logicznych, w których korzysta się z indukcyjnej definicji wyrażenia KRZ oraz z zasady indukcji dla zamkniętych zbiorów formuł. Mimo że przykłady są ograniczone niemalże wyłącznie do KRZ, to analogiczne dowody są stosowane także dla twierdzeń mówiących o formułach innych rachunków logicznych.

a. Korzystanie z indukcyjnej definicji formuły KRZ

Przykład 1.

W komentarzu do reguł słownika KRZ jest uwaga, że zasób ten powinien pozwolić na budowanie dowolnie długich formuł tego rachunku. Da się jednak łatwo okazać, że

(*) każda formuła KRZ jest złożona ze skończonej liczby symboli.

D o w ó d:

Twierdzenie (*) jest na pewno spełnione dla formuł 1. rzędu, tj. dla symboli zmiennych zdaniowych, które są formułami jednoelementowymi (liczba symboli = 1). Z definicji indukcyjnej **D2** wiadomo, że dla dowolnego wyrażenia Φ tego rachunku istnieje liczba naturalna n oznaczająca rząd danego wyrażenia, a dla wyrażenia dowolnego rzędu istnieją wyrażenia Φ_1 i Φ_2 rzędów niższych od n, z których wyrażenie Φ jest zbudowane w sposób opisany w **D2**. Jeśli – to jest założenie indukcyjne – wyrażenia Φ_1 i Φ_2 spełniają twierdzenie (*), to są zbudowane ze skończonej liczby symboli: Φ_1 z s_1, a Φ_2 z s_2 symboli. Liczba s symboli w formule Φ jest zatem równa:

$s_1 + 1$, jeśli $\Phi = \sim\Phi_1$ albo $s_1 + s_2 + 1$, jeśli $\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$ lub $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$ lub ... . Zatem liczba symboli w dowolnej formule KRZ jest skończona.

Przykład 2.

(**) W każdej formule KRZ niezawierającej symbolu negacji symboli zmiennych zdaniowych jest o jeden więcej niż symboli funktorów.

Dowód:

Twierdzenie jest spełnione dla formuł 1. rzędu, w których liczba symboli funktorów jest równa 0, a liczba zmiennych równa się 1. Dla dowolnego wyrażenia Φ istnieją, zgodnie z **D2**, wyrażenia Φ_1 i Φ_2 rzędów niższych od rzędu wyrażenia Φ. Ponieważ, zgodnie z warunkiem twierdzenia (**), w formule Φ nie ma symbolu negacji, więc $\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$ lub $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$ lub ... . Z założenia indukcyjnego, że twierdzenie (**) jest dla Φ_1 i Φ_2 spełnione, tj. że w Φ_1 jest f_1 symboli funktorów i $f_1 + 1$ symboli zmiennych zdaniowych (czyli liczba dowolnych symboli $s_1 = 2f_1 + 1$), a w Φ_2 jest f_2 symboli funktorów i $f_2 + 1$ symboli zmiennych zdaniowych (czyli $s_2 = 2f_2 + 1$) wynika, że w Φ jest $f_1 + f_2 + 1$ symboli funktorów oraz $f_1 + f_2 + 1 + 1$ symboli zmiennych zdaniowych, czyli symboli zmiennych jest o jeden więcej niż symboli funktorów.

Opisując ogólnie dowody twierdzeń opartych na indukcyjnej definicji wyrażenia KRZ, można powiedzieć, że w dowodach takich trzeba okazać najpierw, że twierdzenie jest spełnione dla wyrażeń KRZ 1. rzędu, tj. dla zmiennych zdaniowych. Krok indukcyjny polega na okazaniu, że jeśli jest ono spełnione dla wyrażeń, z których jest zbudowane dowolne wyrażenie Φ, a więc wyrażeń rzędów niższych od rzędu wyrażenia Φ, to jest także spełnione dla formuły Φ.

Analogiczne są uwagi dotyczące dowodów opartych na indukcyjnej definicji wyrażenia dowolnego rachunku logicznego. Trzeba okazać, że twierdzenie jest spełnione dla wyrażeń prostych danego rachunku, tj. wyrażeń 1. rzędu, a następnie – że jeśli jest spełnione dla wyrażeń jakiegoś (dowolnego) rzędu, to jest spełnione dla wyrażeń rzędu następnego. Ponieważ w indukcyjnej definicji wyrażenia rachunku logicznego jest postawiony warunek, że dla wyrażenia dowolnego rzędu istnieją wyrażenia rzędów niższych, z których dane wyrażenie jest poprawnie zbudowane, więc okazanie, że „jeśli dla jakiegoś, to dla następnego”, połączone z twierdzeniem, że jest spełnione dla wyrażeń rzędu pierwszego, pozwala ogłosić, że jest spełnione dla wyrażeń dowolnego rzędu.

b. Stosowanie zasady indukcji dla zamkniętych zbiorów formuł

Twierdzenie **T1** jest stosowane w dowodach indukcyjnych twierdzeń mówiących o własnościach najmniejszych zbiorów zawierających dany zbiór A i zamkniętych ze względu na funkcje (działania) określonej klasy $\boldsymbol{F}$. Celem takich dowodów jest okazanie, że jakaś własność W przysługuje wszystkim elementom zbioru $Z_{\min}(A, \boldsymbol{F})$. Rozumowania takie mają budowę zgodną ze strukturą **T1**. Dowodzi się najpierw, że
(*) jeśli $x \in A$, to $W(x)$
(odpowiednik założenia wstępnego w matematycznych dowodach indukcyjnych). Następnie (**) z założenia, że dowolna $f \in \boldsymbol{F}$ jest n-argumentową funkcją oraz własność W przysługuje każdemu z jej argumentów, tj. $W(x_1) \wedge \ldots \wedge W(x_n)$ (założenie indukcyjne) wyprowadza się wniosek, że przysługuje również wartości tej funkcji dla tych argumentów, tj. że $W(f(x_1, \ldots, x_n))$, co znaczy, że własność W jest dziedziczona ze względu na klasę $\boldsymbol{F}$ (w znaczeniu zgodnym z **D4.c** i **D4.d**). Na podstawie implikacji (*) oraz twierdzenia o dziedziczeniu własności W uzyskanego w (**) można uznać, że $(\bigwedge x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{F}))\ W(x)$.

Schemat takiego rozumowania indukcyjnego zostanie wykorzystany w dowodzie kolejnego twierdzenia.

T2 $x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ wtedy i tylko, gdy $(\bigvee C)\ C_{A,\boldsymbol{D}}(x)$, tj. gdy istnieje skończony ciąg, którego ostatnim wyrazem jest x oraz którego każdy wyraz albo należy do A, albo jest uzyskany z wcześniejszych wyrazów tego ciągu jako wynik zastosowania do nich któregoś z działań klasy $\boldsymbol{D}$.

Napis „$(\bigvee C)\ C_{A,\boldsymbol{D}}(x)$” jest skrótem twierdzenia „istnieje skończony ciąg, którego ...”, sformułowanego po prawej stronie równoważności **T2** i będzie stosowany także w zapisie wierszy dowodu, a przy tym napis „$C_{A,\boldsymbol{D}}$” będzie upraszczany do „C”, o ile będzie oczywiste, które wskaźniki pominięto.

D o w ó d:

$\boxed{\rightarrow}$

W dowodzie implikacji prostej, wychodząc z założenia:

1. $x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$,

trzeba najpierw okazać, że:

(*) $(\bigwedge x \in A)\ (\bigvee C)\ C_{A,\boldsymbol{D}}(x)$.

Otóż w przypadku dowolnego

1.1 $x \in A$

poszukiwanym ciągiem jest

1.2 $C_x = \{a_1 = x\}$ {df.},

tj. ciąg, którego jedynym wyrazem jest przedmiot x. Ciąg taki spełnia oczywiście warunki, o których mowa w **T2**, czyli:

1.3 $(\bigvee C)\ C(x)$ {**D**$\bigvee$: 1.2},

a wobec tego (*) {**D**$\bigwedge$: 1.1 $\Rightarrow$ 1.3}.

Kolejnym krokiem jest udowodnienie, że

(**) własność, o której mowa w T2, tj. że dla danego x istnieje ciąg $C_{A,\boldsymbol{D}}(x)$, jest dziedziczona ze względu na klasę działań (funkcji) $\boldsymbol{D}$.

W tym celu załóżmy – wzorując się na **D4.d** i **D4.c** – że:

1.1 $f \in \boldsymbol{D}$ jest n-argumentową funkcją

oraz

1.2 $(\bigvee C)\ C_{A,\boldsymbol{D}}(x_1) \wedge \ldots \wedge (\bigvee C)\ C_{A,\boldsymbol{D}}(x_n)$, to $(\bigvee C)\ C_{A,\boldsymbol{D}}(f(x_1, \ldots, x_n))$.

Otóż na podstawie założenia 1.2 można uznać

1.3 $C^1(x_1) \wedge \ldots \wedge C^n(x_n)$ {**O**$\bigvee$: 1.2}.

Niech:

1.4 C_x jest sumą ciągów $C^1, C^2, \ldots, C^n$ taką, że jest w niej zachowana kolejność wyrazów ciągów składowych, a wyrazem ostatnim jest wartość $f(x_1, \ldots, x_n)$ {def.}.

Ponieważ ciąg C_x jako suma skończonej liczby skończonych ciągów $C^1, C^2, \ldots, C^n$ jest ciągiem skończonym oraz spełnia pozostałe warunki sformułowane w **T2** {1.3, 1.4}, więc

1.5 $(\bigvee C)\ C_{A,\boldsymbol{D}}(f(x_1, \ldots, x_n))$ {**D**$\bigvee$: 1.4}.

Jako że wnioskowanie 1.1 $\Rightarrow$ 1.5 dotyczy dowolnej funkcji (działania) *z* $\boldsymbol{D}$, więc można uznać, że własność, o ktorej mowa w T2 jest dziedziczona – w znaczeniu zgodnym z **D4.c** i **D4.d** – ze względu na $\boldsymbol{D}$.

Wobec (*) i (**) można stwierdzić, że własność ta przysługuje dowolnemu elementowi z minimalnego zbioru zawierającego A i zamkniętego ze względu na klasę działań $\boldsymbol{D}$: $(\bigwedge x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D}))\ (\bigvee C)\ C_{A,\boldsymbol{D}}(x))$,

tj. uznać implikację prostą twierdzenia T2.

$\boxed{\leftarrow}$

W dowodzie implikacji odwrotnej $(\bigvee C)\ C_{A,\boldsymbol{D}}(x) \Rightarrow x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ przyjmijmy, że ciągiem, którego istnienie jest zagwarantowane przez założenie

1. $(\bigvee C)\ C_{A,\boldsymbol{D}}(x)$

jest ciąg

2. $C^1(x)$ {**O**$\bigvee$: 1}.

Ponieważ wskaźniki wyrazów skończonych ciągów są podzbiorami dobrze uporządkowanego zbioru $\boldsymbol{\mathcal{N}}$, a więc także tworzą zbiór dobrze uporządkowany {**RIV.2: **W2.b**}, można przeprowadzić indukcyjny dowód, że własność bycia elementem zbioru $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ jest przenoszona (dziedziczona) z wyrazów ciągu C^1 wcześniejszych na późniejsze. W tym celu z założenia indukcyjnego:

3. wszystkie wyrazy ciągu C^1 wcześniejsze od dowolnego wyrazu x_k tego ciągu są elementami zbioru $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$

trzeba wyprowadzić wniosek, że także $x_k \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$.

Ponieważ x_k jest wyrazem ciągu C^1 spełniającego warunki sformułowane w założeniu 1., więc jest tak, że:

4. $x_k \in A$ lub wyraz x_k jest uzyskany z wcześniejszych wyrazów ciągu C^1 w wyniku zastosowania do nich działania z klasy $\boldsymbol{D}$.

Z założenia, że

1.1 $x_k \in A$ {zd.}

wynika

1.2 $x_k \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ {**RIV.1: **T4**: **L1**: 1.1}.

Jeśli natomiast:

2.1 x_k jest wynikiem zastosowania jakiegoś n-argumentowego działania z klasy $\boldsymbol{D}$ do wcześniejszych n wyrazów ciągu C^1 {zd.},

co znaczy, że:

2.2 $x_1, \ldots, x_n$ są wyrazami ciągu C^1 wcześniejszymi od x_k oraz $f \in \boldsymbol{F}$ jest n-argumentową funkcją taką, że $f(x_1, \ldots, x_n) = x_k$,

to, zgodnie z założeniem indukcyjnym

2.3 $x_1, \ldots, x_n \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$.

Ponieważ – w myśl **L3** – $zam(Z_{\min}(A, \boldsymbol{D}), \boldsymbol{D})$, tj. zbiór $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ jest zamknięty ze względu na działania klasy $\boldsymbol{D}$ {**D4.b**, **D4.a**}, więc również

2.4 $f(x_1, \ldots, x_n) \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$,

czyli

2.5 $x_k \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$.

Jako że wnioskowania 1.1 $\Rightarrow$ 1.2 i 2.1 $\Rightarrow$ 2.5 dotyczą dowolnego elementu ciągu C^1, a x jest – zgodnie z założeniem 2. – wyrazem tego ciągu, więc $x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$. ■

Z twierdzenia **T2** korzysta się w dowodach wielu twierdzeń dotyczących własności systemów dedukcyjnych. Tutaj natomiast warto sformułować twierdzenie, które jest bezpośrednim wnioskiem z **T2**. Jeśli bowiem każdy element x zbioru $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ jest ostatnim wyrazem skończonego ciągu, którego każdy wyraz albo należy do A, albo jest uzyskany w wyniku zastosowania któregoś z działań klasy $\boldsymbol{D}$ – to jest oczywiste, że x jest uzyskany ze skończonego podzbioru zbioru A za pomocą skończonego podzbioru działań z $\boldsymbol{D}$ (choć nie muszą to być podzbiory właściwe).

T3 Jeżeli $x \in Z_{min}(A, \boldsymbol{D})$, to istnieją: skończony podzbiór B zbioru A i skończony podzbiór $\boldsymbol{D}'$ klasy $\boldsymbol{D}$, takie że $x \in Z_{min}(B, \boldsymbol{D}')$.

Twierdzenie **T3** mówi o (jest twierdzeniem o) finitystyczności działań klasy $\boldsymbol{D}$.

1.4.2 Sprowadzanie do postaci normalnej

Dowodzenie indukcyjne, czyli odwołujące się do dobrego uporządkowania wyrażeń, jest stosowane także dla okazania, że wyrażenia rachunku zdań są sprowadzalne do postaci normalnej. Ta własność wyrażeń KRZ jest z kolei wykorzystywana w dowodach ważnych twierdzeń dotyczących własności wyrażeń i systemów KRZ – własności nie tylko syntaktycznych.

Da się okazać, że dowolne wyrażenie KRZ jest sprowadzalne do postaci normalnej – koniunkcyjnej albo alternatywnej. Mówiąc inaczej – że dla dowolnego wyrażenia KRZ istnieje równoważne z nim wyrażenie o koniunkcyjnej postaci normalnej, a także równoważna alternatywna postać normalna.

T4.1 Dowolna formuła Φ klasycznego rachunku zdań jest sprowadzalna do koniunkcyjnej postaci normalnej, sprowadzalna, tzn. że istnieje taka koniunkcyjna postać normalna K, że równoważność $\ulcorner \Phi \Leftrightarrow K \urcorner$ jest tezą KRZ.

Dowód tego twierdzenia zostanie przeprowadzony na gruncie systemu założeniowego KRZ (**RI.3) – uwaga ta jest niezbędna, bo pojęcia takie, jak sprowadzalność, wyprowadzalność, dowód, teza itd. są zrelatywizowane do określonego systemu (o czym będzie szerzej mowa w kolejnym podrozdziale).

W dowodzie **T4.1** zostanie wykorzystanych kilka pomocniczych prawidłowości, sformułowanych w **L8–L11**.

L8 Negacja alternatywy elementarnej jest sprowadzalna do koniunkcyjnej postaci normalnej.

D o w ó d:

Ponieważ sprowadzalność jest rozumiana jak w **T4.1**, więc wystarczy okazać, że dla negacji alternatywy elementarnej A_e dowolnej postaci istnieje równoważna z nią koniunkcyjna postać normalna. Otóż jeżeli alternatywa elementarna A_e jest pojedynczą zmienną, to poszukiwana koniunkcyjna postać normalna K jest tożsama z negacją zmiennej {**D5.b**}, a więc na pewno $\ulcorner\sim A_e \Leftrightarrow K = \sim A_e\urcorner$ $\{p \Leftrightarrow p\}$. Jeśli A_e jest negacją pojedynczej zmiennej, to formuła $\sim A_e$ nie ma wprawdzie koniunkcyjnej postaci normalnej, lecz szukaną formułą K równoważną z $\sim A_e$ jest symbol zmiennej uzyskany po opuszczeniu podwójnego znaku negacji {**ON**}. Natomiast jeśli A_e jest alternatywą elementarną innego kształtu (tj. nie pojedynczą zmienną ani negacją pojedynczej zmiennej), to $\sim A_e$ jest równoważna koniunkcji K uzyskanej z $\sim A_e$ zgodnie z regułami **NA** i **ON**, a ponieważ A_e jest alternatywą elementarną, więc formuła K jest koniunkcją alternatyw elementarnych, czyli ma koniunkcyjną postać normalną {**D5.b**}. Zatem negacja dowolnej alternatywy elementarnej A_e jest sprowadzalna do koniunkcyjnej postaci normalnej, tj. istnieje taka koniunkcja K o postaci normalnej, że $\ulcorner\sim A_e \Leftrightarrow K\urcorner$ jest tezą KRZ. ■

L9 Alternatywa n-członowa ($n \geq 1$) koniunkcyjnych postaci normalnych jest sprowadzalna do koniunkcyjnej postaci normalnej.

Dowód:
Niech $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_n$ będzie alternatywą A koniunkcyjnych postaci normalnych, o której mowa w tym twierdzeniu, tj. $A = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_n$.

Dla $n = 1$, tj. dla alternatywy jednoczłonowej, twierdzenie to jest oczywiste, jako że $\ulcorner A = K_1 \Leftrightarrow K_1\urcorner$, a przy tym K_1 jest, zgodnie z założeniem twierdzenia, koniunkcyjną postacią normalną.

Dla $n = 2$, tj. alternatywy dwuczłonowej, $A = \ulcorner K_1 \vee K_2\urcorner$ i niech $K_1 = \ulcorner \Phi_1 \wedge \wedge \ldots \wedge \Phi_{n1}\urcorner$, $K_2 = \ulcorner \Psi_1 \wedge \ldots \wedge \Psi_{n2}\urcorner$, gdzie $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n1}$ oraz $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n2}$ to – zgodnie z założeniem twierdzenia i **D5.b** – alternatywy elementarne. Dowód L9 dla sytuacji $n = 2$ jest indukcyjny według liczby $n_1 + n_2$, tj. sumy alternatyw elementarnych w koniunkcjach K_1 i K_2.

(i) jeśli $n_1 + n_2 = 2$, to $K_1 = \Phi_1$ i $K_2 = \Psi_1$, a ponieważ Φ_1 i Ψ_1 są alternatywami elementarnymi, więc również $A = \ulcorner \Phi_1 \vee \Psi_1\urcorner$ jest alternatywą elementarną {**L7.a**}, czyli jest koniunkcyjną postacią normalną {**D5.b**} równoważną z A.

(ii) $n_1 + n_2 = k > 2$. Zgodnie z założeniem indukcyjnym twierdzenie L9 jest spełnione dla każdej alternatywy $A = \ulcorner K_1 \vee K_2\urcorner$ takiej, że suma alternatyw elementarnych jej składników K_1 i K_2 jest mniejsza od k. Jako że $k > 2$, więc $n_1 > 1 \vee n_2 > 1$. Załóżmy, że 1.1 $n_1 > 1$. Alternatywa A, o której mowa w L9, ma wtedy kształt: $\ulcorner(\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_{n1}) \vee K_2\urcorner$. Formuła o tym kształcie jest równoważna – zgodnie z prawem rozdzielności alternatywy względem koniunkcji – z formułą postaci $(\Phi_1 \vee K_2) \wedge [(\Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_{n1}) \vee K_2]$. Ponieważ zarówno $(\Phi_1 \vee K_2)$, jak i $[(\Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_{n1}) \vee K_2]$ spełniają warunek założenia indukcyjnego, więc formuły te są sprowadzalne do koniunkcyjnej postaci normalnej, powiedzmy, że pierwsza z tych formuł do K', druga do K''. Koniunkcja K formuł K' i K'' też jest koniunkcyjną postacią normalną {**L7.b**}, a przy tym $A \Leftrightarrow K$. Ponieważ rozumowanie dla 2.1 $n_2 > 1$ przebiega tak samo, więc jeśli $n_1 + n_2 > 2$, to L9 również jest spełnione – co kończy dowód dla $n = 2$.

Dla $n > 2$. Z założenia indukcyjnego, że L9 jest spełnione dla $n - 1$, wynika, że dla alternatywy $A' = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_{n-1}$ istnieje koniunkcyjna postać normalna K' taka, że $A' \Leftrightarrow K'$. Wtedy istnieje również koniunkcyjna postać normalna K równoważna z $A = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_n$, tj. równoważna z $K' \vee K_n$, co można okazać w sposób analogiczny do dowodu dla $n = 2$, (ii). ■

L10 Negacja koniunkcyjnej postaci normalnej jest sprowadzalna do koniunkcyjnej postaci normalnej.

Dowód:

Jeśli $\Phi = \ulcorner \Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_n \urcorner$ jest n-członową koniunkcyjną postacią normalną, to $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ są alternatywami elementarnymi {**D5.b**}. Negacja: $\sim\Phi$ jest równoważna formule: $\ulcorner \sim\Phi_1 \vee \sim\Phi_2 \vee \ldots \vee \sim\Phi_n \urcorner$ {**NK**}, której każdy składnik jest negacją alternatywy elementarnej, czyli jest sprowadzalny do koniunkcyjnej postaci normalnej {**L8**}, odpowiednio do $K_1, K_2, \ldots, K_n$ {**O∨**}. Ponieważ $\sim\Phi_1 \Leftrightarrow K_1, \sim\Phi_2 \Leftrightarrow K_2, \ldots, \sim\Phi_n \Leftrightarrow K_n$, więc: $(\sim\Phi_1 \vee \sim\Phi_2 \vee \ldots \vee \sim\Phi_n) \Leftrightarrow (K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_n)$ {$\mathbf{RZ}_{\Leftrightarrow}$}, a jako że alternatywa $(K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_n)$ koniunkcyjnych postaci normalnych jest sprowadzalna do koniunkcyjnej postaci normalnej {**L9**}, powiedzmy do K {**O∨**}, zatem $\sim\Phi \Leftrightarrow K$. ■

L11 Każde wyrażenie KRZ, w którym oprócz symboli zmiennych są użyte wyłącznie symbole negacji, koniunkcji i alternatywy (nie ma symboli innych spójników) jest sprowadzalne do koniunkcyjnej postaci normalnej.

Dowód:

Twierdzenie to jest niewątpliwie spełnione dla wyrażeń KRZ pierwszego rzędu, tj. dla pojedynczych zmiennych, które są najprostszymi koniunkcyjnymi postaciami normalnymi. W indukcyjnym dowodzie ze względu na rząd wyrażenia można wykorzystać fakt, że wyrażenie Φ rzędu wyższego niż pierwszy, spełniające warunek postawiony w tym twierdzeniu, może być albo

(i) negacją: $\Phi = \ulcorner{\sim}\Phi_1\urcorner$, albo

(ii) koniunkcją: $\Phi = \ulcorner\Phi_1 \wedge \Phi_2\urcorner$, albo

(iii) alternatywą: $\Phi = \ulcorner\Phi_1 \vee \Phi_2\urcorner$.

Z założenia indukcyjnego, że twierdzenie L11 jest spełnione dla wyrażeń rzędów niższych niż rząd formuły Φ, wynika, że istnieją koniunkcyjne postaci normalne równoważne z Φ_1 i Φ_2. Jeśli K_1 i K_2 oznaczają koniunkcyjne postacie normalne równoważne z Φ_1 i Φ_2, to w sytuacji (i) Φ jako negacja koniunkcyjnej postaci normalnej jest sprowadzalna do formuły takiej postaci {**L10**}; w przypadku (ii), tj. gdy $\Phi \Leftrightarrow K_1 \wedge K_2$ można uznać, że L11 jest spełnione, na podstawie **L7.b**; a w sytuacji (iii) tj. gdy $\Phi \Leftrightarrow K_1 \vee K_2$ – można uznać L11 za spełnione na podstawie **L9**. ■

D o w ó d T4.1:

By udowodnić twierdzenie **T4.1**, wystarczy okazać, że również pozostałe formuły, niespełniające warunku strukturalnego postawionego w **L11**, są sprowadzalne – w sensie określonym – do koniunkcyjnej postaci normalnej. W tym celu wystarczy wskazać reguły (prawa KRZ) pozwalające przekształcić formuły ze znakami innych funktorów na równoważne formuły zawierające wyłącznie symbole negacji, koniunkcji i alternatywy. Ponieważ formuły zapisane co najwyżej za pomocą tych trzech symboli są sprowadzalne do koniunkcyjnej postaci normalnej {**L11**}, więc sprowadzalność do koniunkcyjnej postaci normalnej przechodzi na równoważne z nimi formuły zawierające inne funktory. W tym dowodzie przypomnę stosowane w trakcie takiego sprowadzania definicje równoważnościowe dla tych tylko funktorów, które były stosowane (oprócz $\sim$, $\wedge$ oraz $\vee$) w prezentacji KRZ – chodzi o symbole implikacji, dysjunkcji, równoważności i alternatywy rozłącznej (algorytmiczna, ogólna metoda budowania takich równoważnych formuł zawierających wyłącznie znaki negacji, koniunkcji i alternatywy jest opisana i zastosowana w **RI.1.1.3).

$(\Phi \Rightarrow \Psi) \Leftrightarrow ({\sim}\Phi \vee \Psi)$;

$(\Phi / \Psi) \Leftrightarrow {\sim}(\Phi \wedge \Psi) \Leftrightarrow ({\sim}\Phi \vee {\sim}\Psi)$;

$(\Phi \Leftrightarrow \Psi) \Leftrightarrow [(\Phi \Rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \Rightarrow \Phi)] \Leftrightarrow [({\sim}\Phi \vee \Psi) \wedge ({\sim}\Psi \vee \Phi)]$;

$(\Phi \veebar \Psi) \Leftrightarrow {\sim}(\Phi \Leftrightarrow \Psi) \Leftrightarrow {\sim}[({\sim}\Phi \vee \Psi) \wedge ({\sim}\Psi \vee \Phi)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [{\sim}({\sim}\Phi \vee \Psi) \vee {\sim}({\sim}\Psi \vee \Phi)] \Leftrightarrow [(\Phi \wedge {\sim}\Psi) \vee (\Psi \wedge {\sim}\Phi)]$.

Stosując $\mathbf{RZ}_{\Leftrightarrow}$ do takich definicji i sprowadzanego wyrażenia Φ, a także inne reguły (prawa KRZ) potrzebne do równoważnościowego przekształcania, uzyskuje się równoważne z Φ formuły, a ostatecznie – równoważną z Φ koniunkcyjną postać normalną K, mając przy tym gwarancję, że wyrażenie ⌜$\Phi \Leftrightarrow K$⌝ jest tezą KRZ.■

Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla alternatywnej postaci normalnej.

T4.2 Dowolne wyrażenie Φ klasycznego rachunku zdań jest sprowadzalne do alternatywnej postaci normalnej A, sprowadzalne, tzn. że równoważność ⌜$\Phi \Leftrightarrow A$⌝ jest tezą KRZ.

Dowód:

Da się okazać {**NK**, **NA**, **ON**}, że negacja dowolnej koniunkcyjnej postaci normalnej K jest równoważna pewnej alternatywnej postaci normalnej A, tj.:

1. $(\wedge K)\ (\vee A)\ {\sim}K \Leftrightarrow A$.

Skoro, jak wiadomo z **T4.1** – do koniunkcyjnej postaci normalnej jest sprowadzalne dowolne wyrażenie Φ KRZ, to również negacja tego wyrażenia (jako wyrażenie KRZ) jest do takiej postaci sprowadzalna, co znaczy, że:

2. tezą KRZ jest formuła postaci ⌜${\sim}\Phi \Leftrightarrow K$⌝, w której K jest koniunkcyjną postacią normalną.

Tezami KRZ są więc także równoważność postaci:

3. ⌜$\Phi \Leftrightarrow {\sim}K$⌝ {**TR**: 2}

oraz formuła

⌜$\Phi \Leftrightarrow A$⌝,

w której A jest alternatywną postacią normalną równoważną z ${\sim}K$

{3, 1}.

2. Systemy dedukcyjne – pojęcia i własności syntaktyczne

Po ogólnej charakterystyce systemów dedukcyjnych i ich typów są omawiane podstawowe wyniki teorii konsekwencji (m.in. twierdzenie o dedukcji), a następnie wybrane syntaktyczne własności systemów dedukcyjnych, tj. niesprzeczność, zupełność, rozstrzygalność i niezależność aksjomatów.

2.1 Systemy dedukcyjne

Systemów dedukcyjnych dotyczą niektóre uwagi sformułowane względem systemów aksjomatycznych KRZ (**RI.4). Pojęcie systemu dedukcyjnego (teorii dedukcyjnej) jest jednak, na pewno w tych analizach, ogólniejsze od pojęcia systemu aksjomatycznego – i to nawet jeśli „system aksjomatyczny" rozumie się szeroko, uwzględniając różne jego odmiany znane z dziejów logiki i matematyki oraz rozwijane współcześnie.

2.1.1 Typy systemów dedukcyjnych

Zgodnie z przyjętym tu rozumieniem, dedukcyjny jest każdy system budowany metodą dedukcyjną, tj. metodą uzasadniania i uznawania wyrażeń zdaniowych wyprowadzonych logicznie z wyrażeń uznanych wcześniej (założeń). To ogólne określenie obejmuje zarówno teorie rozwijane metodą tzw. dedukcji naturalnej, zwane założeniowymi, jak i systemy konstruowane metodą aksjomatyczną. Warto powtórzyć (**RI.3 i 4), że w punkcie wyjścia systemów dedukcji naturalnej są przyjmowane wyłącznie reguły dowodzenia, natomiast w systemach aksjomatycznych są ponadto przyjęte bez dowodu wyrażenia zdaniowe (aksjomaty)[1]. Do systemu dedukcyjnego są włączane, tj. uznawane za jego tezy, wyrażenia udowodnione – w systemach dedukcji naturalnej wyłącznie wyrażenia udowodnione, a w aksjomatycznych ponadto za tezy systemu uznaje się aksjomaty. W obu tych odmianach metody dedukcyjnej można w dowodach korzystać z ogółu dostępnych środków, tj. ogółu uznanych wcześniej wyrażeń i przyjętych reguł dowodzenia. Ponadto różnica między systemami dedukcji naturalnej a systemami aksjomatycznymi zaciera się, gdy uwzględni się fakt, że niezawodne reguły dowodzenia, przyjęte w punkcie początkowym budowania każdego systemu dedukcji naturalnej – zarówno reguły dołączania nowych wierszy do dowodu, jak i reguły budowania dowodów – są wsparte na prawach logiki, które w systemie

[1] Takie rozumienie systemu dedukcyjnego jest w niniejszych analizach przyjęte jako najogólniejsze, m.in. dlatego, że nie jest zależne od wyników teorii konsekwencji, omówionych w paragrafie 2.2 i zastosowanych w **D5.a** do definicji systemu dedukcyjnego; zgodny z tym ogólnym rozumieniem jest również wprowadzony w 2.2 napis $<A, \boldsymbol{D}>$, uszczegółowiany dla systemów dedukcji naturalnej do schmatu $<\varnothing, \boldsymbol{D}>$, w którym zbiór aksjomatów systemu jest pusty.

aksjomatycznym mogą być sformułowane wprost i przyjęte jako aksjomaty. Różnica w stosowaniu tych odmian metody dedukcyjnej jest więc głównie metodologiczna, a także praktyczna: dowodzenie w systemach założeniowych jest prostsze, bardziej intuicyjne – dlatego u podstaw omówionych w tym opracowaniu rachunków logicznych został przyjęty system KRZ dedukcji naturalnej (**RI.3).

W obu tych kategoriach, tj. systemów dedukcji naturalnej oraz aksjomatycznych, można oceniać i różnicować teorie ze względu na stopnie ich opracowania (zaawansowania), opisane w metodologii systemów dedukcyjnych i zwykle ilustrowane przykładami systemów znanych z dziejów logiki i matematyki. Śledząc rozwój takich systemów, wyróżnia się zwykle ich wersje przedaksjomatyczne, a pośród aksjomatycznych – niesformalizowane i sformalizowane[2]. Na podział ten można nałożyć opozycję *implicite–explicite*, co dotyczy zwłaszcza systemów opracowanych dawniej, a współcześnie rekonstruowanych czy interpretowanych (w sensie syntaktycznym). Na przykład o sylogistyce Arystotelesa można powiedzieć, że *implicite* była systemem dedukcyjnym aksjomatycznym – o ile przyjmie się jej interpretację zaproponowaną przez J. Łukasiewicza, co wymaga uznania sylogizmów za tezy, a nie za reguły wnioskowania, oraz wyróżnienia pośród nich aksjomatów, tj. tez przyjętych bez dowodu (tzw. sylogizmy doskonałe, tj. tryby figury pierwszej)[3].

Budowane w sposób metodyczny systemy aksjomatyczne zwykle były opracowywane po przedaksjomatycznym okresie, nieraz długim, rozwoju nauk dedukcyjnych. Można tu – korzystając z ustaleń historyków matematyki i logiki – podać jako przykład pełne zaksjomatyzowanie geometrii Euklidesa (D. Hilbert w 1899 r.) oraz aksjomatyzację arytmetyki liczb naturalnych (G. Peano w 1889 r.). W systemach przedaksjomatycznych twierdzenia przyjęte bez dowodu, a stosowane w dowodach tez systemu, nie są wyliczone. Mówiąc ściślej – nie wszystkie są wyliczone lub w inny sposób określone. Uściślenie „nie wszystkie" jest potrzebne, bo odróżnić od zaksjomatyzowanych takie systemy dedukcyjne, w których wprawdzie niektóre twierdzenia przyjęte bez dowodu są wymienione (np. pewniki w geometrii Euklidesa), lecz oprócz nich są w dowodach

---

2 Zob. np. K. Ajdukiewicz, *Logika pragmatyczna*, Warszawa 1975, s. 181–204.

3 J. Łukasiewicz, *Sylogistyka Arystotelesa z punktu widzenia współczesnej logiki formalnej*, Warszawa 1988. Zob. J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 177–178.

przyjmowane inne twierdzenia nieudowodnione, uznane za oczywiste; natomiast „w inny sposób określone" jest dodane z myślą o takich np. teoriach aksjomatycznych, w których aksjomaty nie są wyliczone, a nawet nie mogą być wyliczone, bo ich zbiór jest nieskończony, lecz są inaczej określone, np. przez schematy aksjomatów sformułowane w metajęzyku, schematy określające kształt aksjomatów (np. metajęzykowe ujęcie Łukasiewicza systemu implikacyjno-negacyjnego – **RI.4). W przedaksjomatycznych systemach dedukcyjnych nie są także wyraźnie sformułowane reguły wyprowadzania i uznawania twierdzeń, wnioskowania (dowody) uzasadniające twierdzenia są intuicyjne, tj. oparte na oczywistości co do związków wynikania.

Wspólne dla teorii aksjomatycznych jest zatem wydzielenie aksjomatów, a dokładniej mówiąc, takie określenie aksjomatów – ich pełne wyliczenie, podanie ich schematów lub reguł budowania – by o każdym jego twierdzeniu dało się rozstrzygnąć, czy należy do zbioru aksjomatów danej teorii. W aksjomatach występują terminy pierwotne danego systemu, tj. takie, które nie są w nim wprost zdefiniowane. Jeśli dany system aksjomatyczny jest oparty na wcześniejszym, to pośród terminów niezdefiniowanych są także zapożyczone z systemu zakładanego, które zachowują znaczenie w nim określone; a znaczenie terminów pierwotnych swoistych (specyficznych) dla danego systemu jest określone przez układ aksjomatów właściwych dla tego systemu.

Natomiast różnica między postacią systemu aksjomatycznego niesformalizowaną a sformalizowaną dotyczy przede wszystkim charakterystyki języka budowanego systemu dedukcyjnego. W systemach sformalizowanych jest dokładnie opisana struktura wyrażeń. W tym celu są podane reguły słownika oraz reguły składni obowiązujące w języku systemu. Reguły słownika dla języka symbolicznego określają zasób jego symboli prostych, z których mogą być budowane formuły danego systemu. Pośród symboli słownika są podstawowe i pomocnicze (np. nawiasy), wśród podstawowych są zmienne oraz stałe, dzielone na stałe logiczne niespecyficzne i stałe specyficzne (swoiste, właściwe) dla danego systemu. Warto podkreślić, że podział ten jest zrelatywizowany do danego systemu sformułowanego w określonym języku, bo np. symbole spójników prawdziwościowych są stałymi logicznymi specyficznymi w klasycznych rachunkach zdań, a niespecyficznymi w rachunkach predykatów (swoiste dla tego rachunku są symbole kwantyfikatorów); symbole funktorów i kwantyfikatorów są stałymi logicznymi zapożyczonymi (niespecyficznymi) w rachunku zbiorów, a stałą logiczną specyficzną dla tego rachunku jest symbol „$\in$" itd. W systemach sformalizowanych są również określone wyraźnie reguły składni, tj. poprawnego budowania formuł złożonych z symboli prostych. Daje to podstawę do rozstrzygania o dowolnym ciągu symboli, czy jest poprawnie zbudowanym (tzw. sensownym) wyrażeniem danego systemu, a zwłaszcza – czy jest poprawnie zbudowanym wyrażeniem zdaniowym. Strukturalne są również pierwotne reguły dowodzenia, co znaczy, że pozwalają ocenić poprawność wnioskowań wyłącznie na podstawie kształtu (formy, budowy, struktury) założeń i wniosku. Ponadto jeśli są w systemie wprowadzane jakieś terminy zdefiniowane (wtórne), to są również przyjęte reguły wprowadzania takich terminów (definicji) do systemu, np. definicjami sformułowanymi w języku systemu lub regułami zastępowania sformułowanymi w metajęzyku.

W metalogicznych (metamatematycznych) klasyfikacjach systemy aksjomatyczne są również dzielone na tzw. asertoryczne i hipotetyczne, rozróżnienie to można zresztą rozciągnąć na wszelkie systemy dedukcyjne. Otóż asertoryczne są teorie dedukcyjne, których aksjomaty (ogólniej – twierdzenia przyjmowane bez dowodu) są uznawane, są stwierdzane, jak np. założenia naczelne geometrii Euklidesa, na co wskazuje sama ich nazwa – „pewniki"; tak samo są traktowane przyjmowane w charakterze aksjomatów prawa rachunków logicznych. Natomiast w systemie hipotetyczno-dedukcyjnym aksjomaty są jedynie postulowane – jak np. jest traktowany aksjomat wyboru w teorii mnogości.

2.1.2 Współczesne ujęcie systemów dedukcyjnych

Tytuł tego paragrafu jest celowo dwuznaczny. Gdy bowiem mowa o „ujęciu", chodzi i o to, jak w logice współczesnej są budowane systemy dedukcyjne, jak również i o ich współczesne badania w metalogice. Współczesnym logicznym systemom dedukcyjnym nadaje się najczęściej postać sformalizowaną i takie systemy są wzorcowym przedmiotem badań metalogicznych; a ponieważ za metodologicznie najbardziej dojrzałe formy systemów dedukcyjnych są uznawane teorie aksjomatyczne, więc na sformalizowanych systemach aksjomatycznych zostanie skupiona ogólna charakterystyka teorii dedukcyjnych. Jest to uzasadnione tym bardziej, że metoda dedukcyjna była ilustrowana (w części drugiej) przede wszystkim systemami założeniowymi.

Ogólnie można powiedzieć, że system aksjomatyczny jest identyfikowany przez zbiór swoich aksjomatów sformułowanych w określonym języku *J* oraz stosowanych w danym systemie działań (operacji) wnioskowania, które są – jak była o tym mowa – szczególnego rodzaju funkcjami.

D1 System aksjomatyczny to uporządkowana para <*A*, ***D***>, w której *A* to zbiór aksjomatów, a ***D*** to zbiór działań wnioskowania.

Rozumiany ogólnie zbiór aksjomatów systemu obejmuje podzbiory: aksjomatów logicznych, aksjomatów pozalogicznych (specyficznych dla danego systemu) oraz zbiór definicji (aksjomatów definicyjnych), a przy tym może być pusty podzbiór aksjomatów pozalogicznych (w aksjomatycznych systemach logicznych, np. systemach KRZ), pusty może być także podzbiór definicji. Najczęściej zbiory aksjomatów i działań wnioskowania są skończone, a w określeniu dokładniejszym od **D1** jest postawiony warunek, by zarówno zbiór *A* (także jego składowe), jak i zbiór działań ***D*** były obliczalne, tj. by o dowolnej formule *a* i o dowolnej funkcji *f* dało się rozstrzygnąć, czy $a \in A$ i $f \in \boldsymbol{D}$, oraz by istniała efektywna metoda ustalania wartości dowolnej funkcji ze zbioru ***D*** dla każdego ciągu jej argumentów[4]. Warto także zauważyć, że nieaksjomatyczne systemy dedukcyjne, tj. systemy założeniowe, także da się reprezentować schematem <*A*, ***D***>, choć w przypadku takich systemów schemat ten przyjmuje skrajną postać <∅, ***D***>, tj. systemu dedukcyjnego bez aksjomatów, budowanego wyłącznie na podstawie reguł dowodzenia.

W definicji systemu aksjomatycznego, która bardziej niż **D1** zbliża się do intuicyjnego rozumieniu dowolnego systemu, jest mowa o zbiorze tez. Zbiór tez systemu można określić, wykorzystując pojęcie najmniejszego zbioru zawierającego dany zbiór i zamkniętego ze względu na daną klasę działań (definicje ***RI.1: **D4.a**, **D4.b**, **D4.e**). W komentarzu do tego pojęcia były wskazywane możliwości jego zastosowania do definiowania ogółu wyrażeń poszczególnych rachunków logicznych. Analogicznie jest ono użyte w definicji zbioru tez systemu aksjomatycznego.

D2 Zbiór tez systemu aksjomatycznego <*A*, ***D***> jest to najmniejszy zbiór zawierający zbiór *A* i zamknięty ze względu na klasę ***D*** działań wnioskowania.

---

[4] Ścisłe określenie pojęcia obliczalności można znaleźć np. w: L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 313–322.

Do intuicyjnego rozumienia systemu zbliża się jeszcze bardziej definicja tezy (ogółu tez) systemu odsyłająca do pojęcia dowodu.

D3.1 Ciąg wyrażeń C jest dowodem wyrażenia Φ w systemie $<A, \boldsymbol{D}>$ (tj.: $dow_{A,\, \boldsymbol{D}}(C, \Phi)$) wtedy i tylko, gdy C jest skończonym ciągiem wyrażeń, którego wyrazem ostatnim jest Φ, a każdy wyraz należy do A lub jest uzyskany w wyniku zastosowania któregoś z działań klasy $\boldsymbol{D}$ do wcześniejszych wyrazów tego ciągu.

D3.2 Formuła Φ jest tezą systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$ wtedy i tylko, gdy istnieje dowód formuły Φ w systemie $<A, \boldsymbol{D}>$, tj. gdy $(\bigvee C)\ dow_{A,\, \boldsymbol{D}}(C, \Phi)$.

Ponieważ definicja **D3.2** jest wsparta na pojęciu ciągu wyrażeń uzyskiwanych ze zbioru A w wyniku stosowania działań wnioskowania klasy $\boldsymbol{D}$, a kończącego się wyrażeniem kwalifikowanym jako teza, więc na podstawie twierdzenia ***RI.1: **T2** oczywisty jest następujący wniosek:

W1 Formuła $\Phi \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ – tj. najmniejszego zbioru zawierającego zbiór A i zamkniętego ze względu na zbiór $\boldsymbol{D}$ działań wnioskowania – wtedy i tylko, gdy $(\bigvee C)\ dow_{A,\, \boldsymbol{D}}(C, \Phi)$.

Zgodnie z **W1** definicje zbioru tez systemu aksjomatycznego **D2** i **D3.2** są równoważne. Łącząc tę uwagę z pojęciem obliczalności – wyżej określonym jedynie w sposób uproszczony – można powiedzieć, że w przypadku dowolnej tezy systemu da się efektywnie stwierdzić, że jest ostatnim wyrazem takiego ciągu, którego każdy wyraz albo należy do A, albo jest wynikiem zastosowania do wyrazów wywodzących się z A którejś z operacji wnioskowania klasy $\boldsymbol{D}$.

2.2 Pojęcie konsekwencji

Użyte w ostatniej uwadze pojęcie „wywodzenia się z A" jest uściślone przez pojęcie konsekwencji (wyprowadzalności). Stosowanie pojęcia konsekwencji i prawidłowości (twierdzeń) dotyczących wyprowadzalności jest zrelatywizowane do określonego systemu dedukcyjnego. Analogicznie do rozumianego ogólnie systemu dedukcyjnego, a następnie jego uszczegółowień (typów systemów aksjomatycznych lub założeniowych) i konkretyzacji (tj. określone układy aksjomatów i/albo reguł) trzeba mówić o relacjach konsekwencji (wyprowadzalności, dowodliwości) odpowiadających systemom dedukcyjnym: rozumianym ogólnie, rodzajom systemów lub konkretnym systemom. W tych analizach ogólne pojęcie konsekwencji zostanie określone dla dowolnego systemu aksjomatycznego, w którym są wyprowadzane konsekwencje z danego zbioru wyrażeń.

Niech S będzie zbiorem poprawnie zbudowanych wyrażeń zdaniowych określonego języka J; zakresem zmiennych Φ, Ψ, Φ_1, Φ_2, ... jest zbiór S, a symbole X, Y, Z, X_1, X_2, ... oznaczają podzbiory zbioru S. Zbiór konsekwencji wyrażeń X w systemie aksjomatycznym $<A, \boldsymbol{D}>$ będzie oznaczany przez $Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(X)$. Jak pojęcie tezy systemu, tak i pojęcie konsekwencji można określić na dwa sposoby: korzystając z pojęcia najmniejszego zbioru zawierającego zbiór dany i zamkniętego ze względu na określoną klasę działań albo z pojęcia ciągu budowanego w wyniku stosowania działań z $\boldsymbol{D}$ do elementów zbioru A, tj. określić w sposób odwołujący się do twierdzenia ***RI.1: **T2**.

D4.a Zbiór konsekwencji zbioru wyrażeń X w systemie aksjomatycznym $<A, \boldsymbol{D}>$ jest to najmniejszy zbiór zawierający zbiór $(A \cup X)$ i zamknięty ze względu na klasę działań wnioskowania $\boldsymbol{D}$, tj.: $Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(X) = Z_{\min}((A \cup X), \boldsymbol{D})$.

D4.b Formuła Φ jest konsekwencją (jest wyprowadzalna z) wyrażeń zbioru X na gruncie systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$ wtedy i tylko, gdy istnieje skończony ciąg C wyrażeń, którego wyrazem ostatnim jest Φ, a każdy wyraz albo należy do zbioru $(A \cup X)$, albo jest uzyskany w wyniku zastosowania któregoś z działań klasy $\boldsymbol{D}$ do wcześniejszych wyrazów tego ciągu – tj.: $\Phi \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(X) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\bigvee C)\ C_{(A \cup X),\, \boldsymbol{D}}(\Phi)$.

Ciąg wyrażeń, o którym mowa w **D4.b**, jest nazywany wyprowadzeniem lub dedukcją wyrażenia Φ z wyrażeń zbioru X na gruncie systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$, choć jest w kontekście **D4** i **W1** oczywisty następujący wniosek.

W2 Formuła $\Phi \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(X)$ wtedy i tylko, gdy $(\bigvee C)\ dow_{A \cup X,\, \boldsymbol{D}}(C, \Phi)$.

Fakt, że $\Phi \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(X)$ będzie także wyrażany z użyciem symbolu $\vdash_{<A,\, \boldsymbol{D}>}$, upraszczanym do $\vdash_{A,\, \boldsymbol{D}}$ lub $\vdash_T$, a nawet do $\vdash$, gdy wiadomo, że chodzi o wyprowadzenie na gruncie teorii $T = <A, \boldsymbol{D}>$. Symbol $\vdash$ był już stosowany: w ogólnych uwagach co do własności systemów aksjomatycznych KRZ napis „$\vdash \Phi$" był odczytywany jako „wyrażenie Φ jest tezą systemu" (**RI.4.3). Otóż jeśli $T = <A, \boldsymbol{D}>$, to napis „$\vdash_T \Phi$" znaczy, że Φ jest tezą systemu T, choć w kontekście obecnych ustaleń można powiedzieć dokładniej, że wyrażenie Φ jest wyprowadzalne z aksjomatów A zgodnie z regułamu $\boldsymbol{D}$ danego systemu. W pewnych fragmentach rozważań – zwłaszcza gdy zamiast o zbiorze konsekwencji będzie mowa o relacji wyprowadzalności (jak np. w paragrafie 2.3) – będą zamiast napisów z symbolem Cn stosowane napisy z symbolem $\vdash$, jako że $\Phi \in Cn_T(X) \Leftrightarrow\ \vdash_T \Phi$.

Definicje **D4.a** i **D4.b** da się łatwo zastosować do systemów opartych na logice, tj. na takich systemach, w których są tylko aksjomaty logiczne ($A_{\log}$), a w $\boldsymbol{D}$ są tylko pierwotne logiczne operacje wnioskowania ($\boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}$). Przyjmując skrótowe oznaczenia tych założeń, można powiedzieć, że:

D4.a' $Cn_{A_{\log}, \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}}(X) = Z_{\min}((A_{\log} \cup X), \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}})$.

D4.b' $\Phi \in Cn_{A_{\log}, \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}}(X) \Leftrightarrow (\bigvee C)\ C_{(A_{\log} \cup X), \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}}(\Phi)$.

Zbiór $Cn_{A_{\log}, \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}}(X)$ jest więc najmniejszym zbiorem zawierającym sumę aksjomatów logicznych i zbioru wyrażeń X oraz zamkniętym ze względu na każde spośród pierwotnych logicznych działań wnioskowania; a formuła Φ jest konsekwencją zbioru wyrażeń X wtedy i tylko, gdy istnieje jej dedukcja (wyprowadzenie) z X na gruncie systemu logicznego $<A_{\log}, \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}>$. Zbiór $Cn_{A_{\log}, \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}}(X)$ będzie oznaczany symbolem „$Cn_L(X)$", relacja konsekwencji logicznej, tj. dedukcji (wyprowadzenia) na gruncie systemu $<A_{\log}, \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}>$, a ogólniej – wyprowadzenia w systemach dedukcyjnych logiki klasycznej – będzie oznaczana symbolem „Cn_L" – z wyjątkiem sytuacji, w których takie skrócenie utrudniłoby uchwycenie znaczenia zapisanych symbolicznie twierdzeń (jak np. w sformułowanym niżej **T4'**).

Pojęcia zbioru konsekwencji i bycia konsekwencją uszczegóławiają się jeszcze bardziej, gdy zbiór wyrażeń X jest pusty:

D4.a" $Cn_L(\varnothing) = Z_{\min}(A_{\log}, \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}})$.

D4.b" $\Phi \in Cn_L(\varnothing) \Leftrightarrow (\bigvee C)\ C_{A\log, \boldsymbol{D}\mathbf{log}}(\Phi)$.

Zbiór $Cn_L(\varnothing)$ jest najmniejszym zbiorem zawierającym aksjomaty logiczne i zamkniętym ze względu na klasę pierwotnych logicznych działań wnioskowania, co znaczy, że jest zbiorem tez logicznych, a napis „$\Phi \in Cn_L(\varnothing)$" to skrót powiedzenia, że Φ jest tezą logiczną, czyli jest wyprowadzalna z logicznych aksjomatów za pomocą pierwotnych logicznych działań (reguł) wnioskowania. Przyjmując umowę, że zbiór $Cn_L(\varnothing)$ tez klasycznego rachunku logicznego będzie oznaczany przez L, można twierdzenie, że Φ jest tezą logiczną, zapisać krócej: $\Phi \in L$.

Pojęć określonych w **D4.a**, **D4.a'** i **D4.a"** dotyczą twierdzenia udowodnione dla ogólnego pojęcia zbioru minimalnego zawierającego dany zbiór oraz zamkniętego ze względu na określoną klasę działań (funkcji) – tj. twierdzenia ***RI.1: **L1–L5** , **T2–T3**, odnoszące się do pojęcia zdefiniowanego w ***RI.1: **D4.e**. Do ich odpowiedników (uszczegółowień) właściwych dla pojęcia zbioru konsekwencji określonego zbioru wyrażeń na gruncie danego systemu aksjomatycznego (pojęcie zdefiniowane w **D4.a**) należą między innymi:

T1 $X \subset Cn_{A,\boldsymbol{D}}(X)$.

D o w ó d:
Twierdzenie to jest uszczegółowieniem ***RI.1: **L1**.

T2 Jeżeli $X \subset Y$, to $Cn_{A,\boldsymbol{D}}(X) \subset Cn_{A,\boldsymbol{D}}(Y)$.

D o w ó d:
Twierdzenie jest szczególnym przypadkiem ***RI.1: **L5** (twierdzenia o monotoniczności działań klasy $\boldsymbol{D}$).

T3 $Cn_{A,\boldsymbol{D}}(Cn_{A,\boldsymbol{D}}(X)) \subset Cn_{A,\boldsymbol{D}}(X)$.

D o w ó d:
{***RI.1: **L4**}.

T4 Jeżeli $\Phi \in Cn_{A,\boldsymbol{D}}(X)$, to istnieje skończony podzbiór B zbioru A taki, że $\Phi \in Cn_{B,\boldsymbol{D}}(X)$.

D o w ó d:
{***RI.1: **T3**}.

Twierdzenia analogiczne do **T1–T4** są spełnione dla pojęć określonych w **D4.a'** i **D4.a"**. Oto twierdzenia dla systemów opartych na aksjomatach i regułach logiki (**D4.a'** i **D4.b'**):

T1' $X \subset Cn_L(X)$.

T2' Jeżeli $X \subset Y$, to $Cn_L(X) \subset Cn_L(Y)$.

T3' $Cn_L(\mathrm{Cn}_L(X)) \subset Cn_L(X)$.

T4' Jeżeli $\Phi \in Cn_{A_{\log},\, \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}}(X)$, to istnieje skończony podzbiór B zbioru A taki, że $\Phi \in Cn_{B_{\log},\, \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}}(X)$.

Dla systemów takich jest również spełniony odpowiednik wniosku **W2**:

W2' Formuła $\Phi \in Cn_L(X)$ wtedy i tylko, gdy $(\bigvee C)\ dow_{A_{\log} \cup X,\, \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}}(C, \Phi)$.

Dowolna formuła jest więc wyprowadzalna ze zbioru wyrażeń X na gruncie systemu opartego na aksjomatach i regułach logicznych wtedy i tylko, gdy istnieje jej dowód w systemie $<A_{\log} \cup X, \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}>$.

Dla teorii opartych na logice klasycznej są ponadto prawdziwe następujące twierdzenia (będą oznaczane **T5'**, **T6'** itd.). Warto przypomnieć, że zbiorem uniwersalnym w analizach pojęcia konsekwencji jest zbiór S – tj. poprawnie zbudowanych wyrażeń zdaniowych (określonego języka J) – będący zakresem zmiennych Φ, Ψ, ..., którego podzbiorami są zbiory wyrażeń X, Y badanych systemów dedukcyjnych, a zbiór tez logicznych, $Cn_L(\varnothing)$, o którym mowa w **D4.a''**, jest oznaczany przez L.

T5' $\ulcorner \Phi \Rightarrow \Psi \urcorner \in Cn_L(X)$ wtedy i tylko, gdy $\Psi \in Cn_L(X \cup \{\Phi\})$.

Twierdzenie to głosi, że dowolna implikacja jest wyprowadzalna ze zbioru formuł X wtedy i tylko, gdy jej następnik jest wyprowadzalny ze zbioru X wzbogaconego o poprzednik tej implikacji.

T6' $S \subset Cn_L\{\Phi, \sim\Phi\}$.

W myśl tego twierdzenia każde wyrażenie zdaniowe poprawnie zbudowane jest wyprowadzalne z pary wyrażeń sprzecznych – co zgodne z tautologią KRZ: $(\mathrm{p} \wedge \sim p) \Rightarrow q$, tj. prawem Dunsa Szkota.

T7' $(Cn_L\{\Phi\} \cap Cn_L\{\sim\Phi\}) \subset L$.

Zgodnie z tym twierdzeniem wyrażenia wyprowadzalne z każdej spośród formuł sprzecznych są tezami logicznymi.

T8' $Cn_L\{\Phi, \Psi\} = Cn_L\{\Phi \wedge \Psi\}$.

Ogół konsekwencji zbioru$\{\Phi, \Psi\}$, wyprowadzonych na gruncie danego systemu $<A_{\log}, \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}>$ jest identyczny z ogółem wyrażeń wyprowadzalnych na gruncie tego samego systemu z koniunkcji $\Phi \wedge \Psi$.

T9' $(Cn_L\{\Phi\} \cap Cn_L\{\Psi\}) = Cn_L\{\Phi \vee \Psi\}$.

Iloczyn zbioru wyrażeń wyprowadzalnych z Φ i zbioru wyrażeń wyprowadzalnych z Ψ jest identyczny z ogółem konsekwencji alternatywy $\ulcorner\Phi \vee \Psi\urcorner$[5].

W dowodach tych twierdzeń będą przywoływane reguły (dołączania wierszy i dowodzenia) znane z założeniowego systemu KRZ.

D o w ó d T5':

Jeśli dowolna implikacja $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner$ jest wyprowadzalna ze zbioru formuł X (na gruncie systemu $<A_{\mathrm{log}}$ i $\boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}>$ {zał.}, to jest ona również wyprowadzalna ze zbioru ($X \cup \Phi$): jako że $X \subset (X \cup \Phi)$ {**RIV.1: **T11**}, więc jest wobec **T2'** oczywiste, że $Cn_L(X) \subset Cn_L(X \cup \{\Phi\})$. Ponieważ w zbiorze $(X \cup \{\Phi\})$ jest poprzednik danej implikacji, więc pośród konsekwencji zbioru $(X \cup \{\Phi\})$ jest również formuła Ψ { wynik zastosowanie działania wnioskowania zgodnego z regułą **RO** do $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner$ i Φ}. Z kolei założenie implikacji odwrotnej, tj. że formuła Ψ jest wyprowadzalna ze zbioru $(X \cup \{\Phi\})$, jest równoważne twierdzeniu, że istnieje na gruncie systemu $<(A_{\mathrm{log}} \cup X \cup \{\Phi\}), \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}>$ dowód tej formuły {**W2'**}. Wobec tego istnieje także na gruncie systemu $<(A_{\mathrm{log}} \cup X), \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}>$ dowód implikacji $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner$, mianowicie dowód, w którym formuła Φ jest przyjęta w charakterze założenia dodatkowego, a następnie, jako ostatni wiersz dowodu, jest uznana (zgodnie z regułą dołączania do dowodu implikacji) formuła $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner$.

D o w ó d T6':

Założenie, że wyrażenie poprawnie zbudowane Ψ ($\Psi \in S$) nie jest wyprowadzalne ze zbioru $\{\Phi, \sim\Phi\}$ na gruncie systemu $<A_{\mathrm{log}}$ i $\boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}>$ {zdn.} prowadzi do sprzeczności, w wyniku zastosowania podstawowych działań wnioskowania do tego zbioru: z Φ jest wyprowadzalne (i) $\Phi \vee \Psi$ {**DA**}, a ponieważ $\sim\Phi \in \{\Phi, \sim\Phi\}$, więc jest wyprowadzalne także Ψ {**OA**: (i), $\sim\Phi$}, co sprzeczne z zdn.

D o w ó d T7':

Twierdzenie

1.1 $\Psi \in (Cn_L\{\Phi\} \cap Cn_L\{\sim\Phi\})$ {zd.}

jest równoważne koniunkcji

1.2 $\Psi \in (Cn_L\{\Phi\} \wedge Cn_L\{\sim\Phi\})$ {**df**$\cap$: 1.1}.

[5] A. Tarski zbudował aksjomatyczną teorię konsekwencji dla systemów opartych na implikacyjno-negacyjnym rachunku zdań, której terminami pierwotnymi są S oraz Cn, a pośród aksjomatów początkowe są równoważne koniunkcji twierdzeń **T1'–T8'**, a ponadto jest aksjomat: $0 < \|S\| \leq \aleph_0$, tj. postulat, że uniwersum formuł poprawnie zbudowanych jest zbiorem niepustym i przeliczalnym.

Jeśli Ψ jest wyprowadzalne z Φ oraz z ⌜$\sim\Phi$⌝, a tezą logiczną jest $\Phi \vee \sim\Phi$ {**RI.3: **T12**}, to tezą logiczną jest również Ψ, tj.

1.3 $\Psi \in L$ {**DKP**},

co kończy dowód inkluzji **T7’** {**df**$\subset$: **D**$\wedge$: 1.1 $\Rightarrow$ 1.3}.

D o w ó d T8’:

Jeśli

1.1 $\Omega \in Cn_L\{\Phi, \Psi\}$ {zd.},

to wyrażenie Ω jest również wyprowadzalne z koniunkcji ⌜$\Phi \wedge \Psi$⌝, z dowolnej koniunkcji jest bowiem wyprowadzalny każdy z jej czynników, w wyniku zastosowania do niej działania wnioskowania zgodnego z regułą **OK.**, tj.:

1.2 $\Omega \in Cn_L\{\Phi \wedge \Psi\}$.

Tak więc

1. $Cn_L\{\Phi, \Psi\} \subset Cn_L\{\Phi \wedge \Psi\}$ {**df**$\subset$: **D**$\wedge$: 1.1 $\Rightarrow$ 1.2}.

Z kolei jeśli

2.1 $\Omega \in Cn_L\{\Phi \wedge \Psi\}$ {zd.},

czyli wyrażenie Ω jest wyprowadzalne z koniunkcji ⌜$\Phi \wedge \Psi$⌝, to jest też wyprowadzalne ze zbioru $\{\Phi, \Psi\}$, z którego, w wyniku zastosowania **DK** do elementów tego zbioru, jest wyprowadzalna koniunkcja ⌜$\Phi \wedge \Psi$⌝, czyli:

2.2 $\Omega \in Cn_L\{\Phi, \Psi\}$.

Zatem

2. $Cn_L\{\Phi \wedge \Psi\} \subset Cn_L\{\Phi, \Psi\}$ {**df**$\subset$: **D**$\wedge$: 2.1 $\Rightarrow$ 2.2},

co kończy dowód {**RI.4: **T6**: 1, 2}.

D o w ó d T9’:

Założenie dodatkowe

1.1 $\Omega \in (Cn_L\{\Phi\} \cap Cn_L\{\Psi\})$

jest równoważne z

1.2 $\Omega \in Cn_L\{\Phi\} \wedge \Omega \in Cn_L\{\Psi\}$,

co znaczy, że wyrażenie Ω jest też wyprowadzalne – zgodnie z regułą budowania dowodów rozgałęzionych wprost – z alternatywy ⌜$\Phi \vee \Psi$⌝, czyli:

1.3 $\Omega \in Cn_L\{\Phi \vee \Psi\}$,

a więc

1. $(Cn_L\{\Phi\} \cap Cn_L\{\Psi\}) \subset Cn_L\{\Phi \vee \Psi\}$ {**df**$\subset$: **D**$\wedge$: 1.1 $\Rightarrow$ 1.3}.

Z drugiej strony, jeśli

2.1 $\Omega \in Cn_L\{\Phi \vee \Psi\}$ {zd.},

czyli wyrażenie Ω jest wyprowadzalne z alternatywy ⌜$\Phi \vee \Psi$⌝, to jest też wyprowadzalne z każdego z jej członów, bo z każdego z nich jest wyprowadzalna – jako wynik zastosowania do nich działania zgodnego z **DA** – alternatywa ⌜$\Phi \vee \Psi$⌝, czyli

2.2 $\Omega \in Cn_L\{\Phi\} \wedge \Omega \in Cn\{\Psi\}$,

co równoważne z

2.3 $\Omega \in (Cn_L\{\Phi\} \cap Cn_L\{\Psi\})$ {**df**$\cap$: 2.2},

a zatem

2. $Cn_L\{\Phi \vee \Psi\} \subset (Cn_L\{\Phi\} \cap Cn_L\{\Psi\})$ {**df**$\subset$: **D**$\wedge$: 2.1 $\Rightarrow$ 2.3},

co kończy dowód {**RI.4: **T6**: 1, 2}.■

Wracając do ogólnego pojęcia systemu aksjomatycznego <A, $\boldsymbol{D}$>, można, stosując ogólne pojęcie konsekwencji, powiedzieć, że

D4.c Zbiór tez systemu aksjomatycznego <A, $\boldsymbol{D}$> to zbiór $Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A)$,

tj. zbiór konsekwencji zbioru aksjomatów A wyprowadzalnych w wyniku stosowania działań wnioskowania klasy $\boldsymbol{D}$, czyli – formułując to ogólniej – ogół konsekwencji zbioru wyrażeń ($A \cup \varnothing$) na gruncie systemu <A, $\boldsymbol{D}$>. Definicja zbioru tez systemu aksjomatycznego oparta na pojęciu konsekwencji uzupełnia definicje odwołujące się do pojęcia najmniejszego zbioru zawierającego zbiór dany i zamkniętego ze względu na daną klasę funkcji (działań wnioskowania – **D2**) oraz do pojęcia dowodu tezy w systemie aksjomatycznym (**D3.2**). Można powiedzieć, że każda z tych równoważnych definicji (**W1**, **W2**) ukazuje inną, wyróżniającą cechę zbioru tez systemu.

Pojęcie konsekwencji jest również przydatne w uściśleniu pojęcia systemu (teorii). Korzystając z faktu, że operacja konsekwencji jest funkcją, a dokładniej mówiąc – jest działaniem określonym w klasie zbiorów wyrażeń o wartościach będących zbiorami wyrażeń, można tak oto określić pojęcia systemu i rozszerzenia systemu.

D5.a $X \in \boldsymbol{Sys}$ wtedy i tylko, gdy $Cn(X) \subset X$.

D5.b X, $Y \in \boldsymbol{Sys}$ oraz $X \subset Y$ i $X \neq Y$, to system Y jest rozszerzeniem systemu X.

Odczytując zapis symboliczny w **D5.a**, można rzec, że do rodziny $\boldsymbol{Sys}$ należą tylko takie zbiory wyrażeń, które są zamknięte ze względu na działanie konsekwencji, a mówiąc prościej, systemy (teorie) to takie zbiory wyrażeń, których każda konsekwencja jest ich elementem. Rozszerzenie danego systemu, o którym mowa w **D5.b**, nazywa się także jego nadsystemem.

Systemem w sensie zgodnym z **D5.a** jest na przykład zbiór tez każdego systemu aksjomatycznego <A, $\boldsymbol{D}$>, jako że – zgodnie z **T3**: $Cn_{A,\,\boldsymbol{D}}(Cn_{A,\,\boldsymbol{D}}(X)) \subset Cn_{A,\,\boldsymbol{D}}(X)$. Z kolei prawidłowość **T1** ($X \subset Cn_{A,\,\boldsymbol{D}}(X)$) potwierdza, że dowolny system to zbiór identyczny ze zbiorem swoich konsekwencji, a więc także, że systemem jest ogół konsekwencji dowolnego zbioru X wyrażeń zdaniowych poprawnie zbudowanych ($X \subset S$):

W3.a $X \in \boldsymbol{Sys}$ wtedy i tylko, gdy $Cn(X) = X$;

W3.b $Cn(X) \in \boldsymbol{Sys}$.

Da się również okazać, że jest systemem iloczyn dwóch systemów:

T10 Jeśli X, $Y \in \boldsymbol{Sys}$, to $(X \cap Y) \in \boldsymbol{Sys}$.

Dowód:
Z założenia
1. X, $Y \in \boldsymbol{Sys}$ {zał.}
wynikają równości:
2. $Cn(X) = X$ i $Cn(Y) = Y$
oraz
3. $(X \cap Y) = (Cn(X) \cap Cn(Y))$ {**W3.a**, 1}.
Ponieważ
4. $(X \cap Y) \subset X$ i $(X \cap Y) \subset Y$ {**RIV.1: **T13**},
więc
5. $Cn(X \cap Y) \subset Cn(X)$ i $Cn(X \cap Y) \subset Cn(Y)$ {**T2**, 4},
czyli:
6. $Cn(X \cap Y) \subset (Cn(X) \cap Cn(Y))$ {**df**$\cap$, 5},
7. $Cn(X \cap Y) \subset (X \cap Y)$ {6, 2}
i ostatecznie
$(X \cap Y) \in \boldsymbol{Sys}$ {**D5**, 7}.■

Warto w komentarzu do **T10** zauważyć, że nie jest prawdziwe analogiczne twierdzenie dla sumy systemów, wyjąwszy sytuację, gdy jeden z nich jest podzbiorem drugiego.

Pojęcie konsekwencji daje także możliwość uogólnienia pojęcia równoważności na zbiory wyrażeń. Powiedzenie, że zbiory wyrażeń X oraz Y są równoważne, będzie skracane symbolem „$\Leftrightarrow(X, Y)$" (w innych pracach jest także używany zapis $X \approx Y$). Ponieważ we wszystkich ustaleniach dotyczących pojęcia konsekwencji jest przyjmowane założenie, że X i Y są zbiorami wyrażeń zbudowanych poprawnie, tj. X, $Y \subset S$, więc i w ogólnym określeniu równoważności można pominąć ten warunek.

D6 Zbiory wyrażeń X oraz Y są równoważne, tj. $\Leftrightarrow(X, Y)$ wtedy i tylko, gdy $Cn(X) = Cn(Y)$.

Uogólnione pojęcie równoważności może być użyte do uściślenia pojęć aksjomatyki (układu aksjomatów) i aksjomatyzowalności systemów dedukcyjnych, a także równoważności aksjomatów i systemów.

D7 Zbiór wyrażeń A jest aksjomatyką zbioru wyrażeń X wtedy i tylko, gdy $A \subset X$ oraz $\Leftrightarrow(A, X)$.

Od zbioru będącego aksjomatyką wymaga się, by był obliczalny – w sensie wyżej przybliżonym – a gdy jest zbiorem skończonym, wtedy mowa o aksjomatyce skończonej. Zgodnie z **D6** można równoważnie stwierdzić, że:

W4 A jest aksjomatyką zbioru X wtedy i tylko, gdy $A \subset X$ oraz $Cn(A) = Cn(X)$.

O zbiorze, dla którego istnieje aksjomatyka, mówimy, że jest aksjomatyzowalny:

D8 Zbiór wyrażeń X jest aksjomatyzowalny wtedy i tylko, gdy istnieje jego aksjomatyka.

Podobnie jak o aksjomatyce i aksjomatyce skończonej można mówić o ogólnie rozumianej aksjomatyzowalności (z warunkiem obliczalności) oraz o skończonej aksjomatyzowalności. Warto jednak zauważyć, że skrajnego rodzaju aksjomatyką zbioru wyrażeń X jest – zgodnie z **D7** i **D6** – sam zbiór X. Aksjomatyzowalny jest więc dowolny zbiór wyrażeń (o ile jest obliczalny). Fakt ten potwierdza metodologiczną ocenę, że aksjomatyzacja jest sposobem porządkowania wyrażeń systemu dedukcyjnego, jest metodologicznie zalecaną formą jego prezentacji, przy czym dla danego zbioru wyrażeń X poszukuje się nie tylko takiej aksjomatyki A, która jest podzbiorem właściwym zbioru X, lecz podzbiorem możliwie mało licznym.

2.3 Twierdzenie o dedukcji

W sformułowaniach tzw. twierdzenia o dedukcji są stosowane nie tylko różne skróty symboliczne (notacja), lecz także różne pojęcia (wyprowadzalności, dowodu, dedukcji, konsekwencji, wynikania itd.), a nawet jeśli przyjmuje się określony zestaw pojęć i symboli, to znane są różne postacie tego twierdzenia. Ponadto odróżniać trzeba twierdzenie o dedukcji dla rachunków logicznych oraz dla systemów dedukcyjnych (aksjomatycznych) opartych na logice, tj. zawierających ponadto aksjomaty pozalogiczne, a w dowodach tego twierdzenia trzeba wskazać konkretny system aksjomatyczny $<A, \boldsymbol{D}>$ lub założeniowy $<\varnothing, \boldsymbol{D}>$, dla którego twierdzenie jest dowodzone[6].

Warto teraz wprowadzić ogólniejsze znaczenie symbolu „$\vdash$", które w szczególnej sytuacji sprowadza się stosowanego już jego odczytania. Pamiętając o przyjętych w tym paragrafie umowach – tj. że S jest zbiorem wyrażeń zdaniowych poprawnie zbudowanych określonego języka J; że $\Phi, \Psi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ to formuły z tego zbioru; $X, Y, Z, X_1, X_2, \ldots$ to podzbiory zbioru S; a $<A, \boldsymbol{D}>$ to system aksjomatyczny o aksjomatach A ($A \subset S$) i działaniach wnioskowania $\boldsymbol{D}$ – przyjmijmy, że napis „$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1} \vdash_{<A, \boldsymbol{D}>} \Phi_n$, $1 \leq n$" jest skrótem powiedzenia, że wyrażenie Φ_n jest wyprowadzalne na gruncie systemu $<A, \boldsymbol{D}>$ z wyrażeń $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$ – o ile $1 < n$, natomiast gdy $n = 1$, wtedy symbol ten upraszcza się do $\vdash_{<A, \boldsymbol{D}>} \Phi_1$ i znaczy: Φ_1 jest tezą systemu $<A, \boldsymbol{D}>$. Warto przy tym zauważyć, że za pomocą pojęcia konsekwencji fakty te można wyrazić napisami:
$\Phi \in Cn_{<A, \boldsymbol{D}>} \{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}\}$ oraz $\Phi \in Cn_{<A, \boldsymbol{D}>} \{\varnothing\}$, tj. $\Phi \in Cn <A, \boldsymbol{D}>$.

W zapisie, a następnie w dowodzie twierdzenia o dedukcji dla klasycznych rachunków logicznych – tj. obejmujących klasyczny rachunek zdań i klasyczny rachunek predykatów z identycznością – warto skorzystać z umów upraszczających napisy. Systemy takie były reprezentowane układem $<A_{\log}, \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}>$, w którym $A_{\log}$ oraz $\boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}$ oznaczają zbiór logicznych aksjomatów oraz pierwotnych działań (reguł) wnioskowania. W poniższych zapisach do klasycznych systemów (rachunków) logicznych będzie relatywizował wprowadzony już wskaźnik L, dlatego zamiast ogólniejszego symbolu wyprowadzalności $\vdash_{<A, \boldsymbol{D}>}$ będzie tu stosowane jego uszczegółowienie $\vdash_L$, w którym L jest postawione zamiast pełniejszego symbolu

---

[6] Twierdzenie o dedukcji: dla klasycznych rachunków zdań jest w: W.A. Pogorzelski, *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii*, Warszawa 1975, s. 98–104 (dowód oraz przykłady i uwagi co do zasięgu tego twierdzenia w obrębie innych rachunków zdań); dla klasycznego rachunku logicznego i systemów opartych na logice klasycznej w: A. Grzegorczyk, *Zarys logiki matematycznej*, dz. cyt., s. 166–171 i T. Batóg, *Podstawy logiki*, dz. cyt., s. 148–154. Zawarta w niniejszym opracowaniu prezentacja twierdzenia o dedukcji jest wzorowana na L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 330–337.

<A_{log}, $\boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}$>, przy czym w zapisach symbolicznych pojawią się teraz symbole A_L i $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{L}}$. Zgodne z tymi umowami zapisy twierdzenia o dedukcji dla klasycznego systemu logicznego wyglądają zatem tak:

T11.1 Jeżeli $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n\text{-}1} \vdash_L \Phi_n$, to $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n\text{-}2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Phi_n\urcorner$;

T11.2 Jeżeli $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n\text{-}1} \vdash_L \Phi_n$,
to $\vdash_L \ulcorner\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow (\ldots \Rightarrow (\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Phi_n)\ldots)\urcorner$.

Analiza struktury napisów w **T11.1** oraz **T11.2** prowadzi do wniosku, że dysponując twierdzeniem **T11.1** można je *n*-krotnie zastosować w dowodzie **T11.2**, a z **T11.2** da się uzyskać **T11.1** na podstawie reguły odrywania. Ponadto jest widoczne, że w systemie założeniowym KRZ i WRP (przedstawionym w **RI.3 i **RIII.2) odpowiednikiem **T11.1** jest reguła dołączania implikacji do dowodu (wtórna reguła budowania dowodów), natomiast postaci **T11.2** odpowiada reguła budowania założeniowych dowodów wprost (reguła pierwotna).

Dowód twierdzenia o dedukcji dla klasycznych systemów logicznych warto poprzedzić pomocniczymi definicjami i twierdzeniami. Jak wiemy (**RI.4), w ujęciu metalogicznym (pozwalającym pominąć wyraźne sformułowanie reguły podstawiania) w systemie logiki klasycznej można przyjąć tylko dwie reguły pierwotne, tj. **RO** i **D⋀**. Dlatego i w definicjach pojęć stosowanych w dowodzie, i w samym dowodzie zostaną uwzględnione tylko sytuacje stosowania tych dwóch reguł.

Oto definicje pojęć upraszczających sformułowanie dowodu.

D9.a Ciąg wyrażeń $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k$ jest wyprowadzeniem w systemie L wyrażenia Ψ z wyrażeń $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ wtedy i tylko, gdy: ostatnim wyrazem ciągu jest wyrażenie wyprowadzane ($\Psi_k = \Psi$), a każdy wyraz należy do $(A_L \cup \{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\})$ lub jest uzyskany w wyniku zastosowania do wcześniejszych wyrazów tego ciągu reguły odrywania lub reguły dołączania kwantyfikatora ogólnego zastosowanej do zmiennych, które nie są wolne w wyrażeniach $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k$.

D9.b $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \vdash_L \Psi$ wtedy i tylko, gdy istnieje w systemie L wyprowadzenie wyrażenia Ψ z wyrażeń $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$.

Sformułowany w **D9.a** warunek dotyczący uogólniania formuł jest zgodny z ograniczeniami co do stosowania reguły **D⋀** (**RIII.2.1). Łatwo jest dostrzec, że zdefiniowane w **D9.a** pojęcie wyprowadzenia jest uszczegółowieniem pojęcia dowodu ($dow_{A,\, \boldsymbol{D}}(C, \Phi)$, ***RI.2: **D3.1**) odpowiednim dla systemu <{($A_L \cup \{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n\}$), {**RO**, **D∧**}>. Zamiast mówić o wyprowadzeniu i wyprowadzalności (istnieniu wyprowadzenia) danej formuły z danego zbioru wyrażeń na gruncie określonego systemu, można mówić o dowodzie i dowodliwości (istnieniu dowodu) w odpowiednio wzbogaconym systemie – w tym kontekście w systemie <{($A_L \cup \{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n\}$, {**RO**, **D∧**}>.

Da się okazać, że spełnione są następujące implikacje (będą użyte jako twierdzenia pomocnicze w dowodzie **T11.1**):

L1.1 Jeśli $\vdash_L \Psi$, to $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \Psi$.

Dowód:

W kontekście **D9** jest oczywiste, że jeśli Ψ jest tezą klasycznego rachunku logicznego, tzn. jest wyprowadzalne z aksjomatów A_L systemu $<A_{\log}, \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}> = L$, to jest też wyprowadzalne ze zbioru ($A_L \cup \{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n\}$), za pomocą tych samych działań (reguł) wyprowadzania z $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{L}}$, tj. **RO** i **D∧**.

L1.2 Jeśli $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Psi \Rightarrow \Omega\urcorner, \Psi$, to $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \Omega$.

Twierdzenie to jest intuicyjnie oczywiste: jeśli z jakiegoś zbioru wyrażeń jest wyprowadzalna określona implikacja i jest wyprowadzalny jej poprzednik, to jest też wyprowadzalny jej następnik.

Dowód:

Jeśli

1. $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Psi \Rightarrow \Omega\urcorner$ oraz $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \Psi$ {zał.},

to – w myśl **D9** – istnieją ciągi wyrażeń dające podstawę do twierdzeń ogłoszonych w założeniu, tj. {**O∨**}:

2. ciąg $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n, \Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_n, \ulcorner\Psi \Rightarrow \Omega\urcorner$ jest wyprowadzeniem wyrażenia $\ulcorner\Psi \Rightarrow \Omega\urcorner$, a ciąg $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n, \Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_n, \Psi$ jest wyprowadzeniem wyrażenia Ψ z wyrażeń $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$ w systemie L.

Wtedy

3. ciąg $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n, \Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_n, \ulcorner\Psi \Rightarrow \Omega\urcorner, \Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_n, \Psi, \Omega$ jest wyprowadzeniem wyrażenia Ω z wyrażeń $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$ w systemie L {**D9.a**, 2},

czyli: $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \Omega$ {**D9.b**, 3}.

L1.3 Jeśli $\Psi \in \{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n\}$, to $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Omega \Rightarrow \Psi\urcorner$.

Zgodnie z tym twierdzeniem: jeśli dane wyrażenie jest pośród wyrażeń $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$ tworzących podstawę dla wyprowadzania, to z wyrażeń tych jest wyprowadzalna każda implikacja, której następnikiem jest to wyrażenie.

D o w ó d:

Jeśli

1. $\Psi \in \{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n\}$ {zał.},

to jest wobec **D9** oczywiste, że

2. $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \Psi$.

Na podstawie prawa KRZ: $q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (**RI.2: **T18**), zapisanego w metajęzyku i z użyciem symboli widocznych w dowodzie, można uznać

3. $\vdash_L \ulcorner\Psi \Rightarrow (\Omega \Rightarrow \Psi)\urcorner$.

Wobec tego:

4. $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Psi \Rightarrow (\Omega \Rightarrow \Psi)\urcorner$ {**L1.1**, 3}

oraz

$\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Omega \Rightarrow \Psi\urcorner$ {**L1.2**, 2, 4}.

L1.4 Jeśli $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Psi_1 \Rightarrow (\Psi_2 \Rightarrow \Psi_3)\urcorner, \ulcorner\Psi_1 \Rightarrow \Psi_2\urcorner$, to $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Psi_1 \Rightarrow \Psi_3\urcorner$.

D o w ó d:

1.$\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Psi_1 \Rightarrow (\Psi_2 \Rightarrow \Psi_3)\urcorner$ oraz $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Psi_1 \Rightarrow \Psi_2\urcorner$ {zał.}.

Prawo KRZ (zw. prawem Fregego): $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ – zapisane w metajęzyku i w symbolice stosownej do formuł dowodu – daje podstawę do uznania, że:

2. $\vdash_L \ulcorner[\Psi_1 \Rightarrow (\Psi_2 \Rightarrow \Psi_3)] \Rightarrow [(\Psi_1 \Rightarrow \Psi_2) \Rightarrow (\Psi_1 \Rightarrow \Psi_3)]\urcorner$,

czyli – na podstawie **L1.1**:

3. $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \ulcorner[\Psi_1 \Rightarrow (\Psi_2 \Rightarrow \Psi_3)] \Rightarrow [(\Psi_1 \Rightarrow \Psi_2) \Rightarrow (\Psi_1 \Rightarrow \Psi_3)]\urcorner$.

Ponieważ poprzednik tej implikacji, tj. $\ulcorner[\Psi_1 \Rightarrow (\Psi_2 \Rightarrow \Psi_3)]\urcorner$ jest wyprowadzalny z $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$ {1}, więc – w myśl **L1.2** – z wyrażeń tych jest również wyprowadzalny jej następnik:

4. $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \ulcorner(\Psi_1 \Rightarrow \Psi_2) \Rightarrow (\Psi_1 \Rightarrow \Psi_3)\urcorner$,

a jako że tak samo jest w przypadku implikacji widocznej w 4. {1},

więc ostatecznie: $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Psi_1 \Rightarrow \Psi_3\urcorner$.

L1.5 Jeśli $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Psi \Rightarrow \Omega\urcorner$ i zmienna α nie jest wolna w żadnym z wyrażeń $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$, to $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Psi \Rightarrow (\bigwedge \alpha)\ \Omega\urcorner$.

D o w ó d:

Z założenia tej implikacji i **D9** wynika, że

1.$\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n \vdash_L \ulcorner(\bigwedge \alpha)\ [\Psi \Rightarrow \Omega]\urcorner$.

Ponieważ zmienna α nie jest wolna w wyrażeniach $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, więc stosując prawo rachunku predykatów: $(\bigwedge x)\ [p \Rightarrow A(x)] \Leftrightarrow (p \Rightarrow (\bigwedge x)\ A(x))$, obowiązujące o ile w poprzedniku nie występuje zmienna wiązana kwantyfikatorem ogólnym (**RII.2: **T15**), można – zapisując jego implikację prostą metajęzykowo i w sposób odpowiedni do symboli widocznych w dowodzie – uznać że:

2. $\vdash_L \ulcorner(\bigwedge \alpha)\ [\Psi \Rightarrow \Omega] \Rightarrow [\Psi \Rightarrow (\bigwedge \alpha)\ \Omega]\urcorner$,

a korzystając z **L1.1**:

3. $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \vdash_L \ulcorner(\bigwedge \alpha)\ [\Psi \Rightarrow \Omega] \Rightarrow [\Psi \Rightarrow (\bigwedge \alpha)\ \Omega]\urcorner$.

Ponieważ poprzednik implikacji zapisanej w 3. jest wyprowadzalny z wyrażeń $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, więc – na podstawie **L1.2** – z wyrażeń tych jest również wyprowadzalny jej następnik: $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \vdash_L [\Psi \Rightarrow (\bigwedge \alpha)\ \Omega]\urcorner$. ■

Lematy **L1.1–L1.5** zostaną wykorzystane w dowodzie twierdzenia T11.1, tj. implikacji:

jeżeli $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1} \vdash_L \Phi_n$, to $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n-1} \Rightarrow \Phi_n\urcorner$.

D o w ó d T11.1:

Z założenia dowodzonego twierdzenia

1. $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1} \vdash_L \Phi_n$

oraz **D9.b** wynika, że w systemie L istnieje wyprowadzenie wyrażenia Φ_n z wyrażeń $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$, tj. {**O**V}:

2. ciąg $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k$ jest w systemie L wyprowadzeniem wyrażenia Φ_n z wyrażeń $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$,

co – zgodnie z **D9.a** – znaczy, że:

3. $\Psi_k = \Phi_n$

oraz

4. każdy wyraz tego ciągu:

(*) należy do $(A_L \cup \{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}\})$

lub

(**) jest uzyskany w wyniku zastosowania do wcześniejszych wyrazów tego ciągu reguły odrywania lub reguły dołączania kwantyfikatora ogólnego zastosowanej do zmiennych, które nie są wolne w wyrażeniach $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$.

Da się indukcyjnie okazać, że prawdziwe jest następujące twierdzenie.

[**ind**] dla dowolnego wskaźnika i wyrazów ciągu $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k$, tj. dla $1 \leq i \leq k$: $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n-1} \Rightarrow \Psi_i\urcorner$.

► Jeżeli $i = 1$, to możliwości wskazane w 4. wierszu dowodu są ograniczone jedynie do zawartych w członie (*), tj.:

(i) $\Psi_1 \in (A_L \cup \{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2}\})$,
co znaczy, że
(ii) $\Psi_1 \in A_L$ lub $\Psi_1 \in \{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2}\}$).
Ponieważ oba założenia dodatkowe:

(ii.1.1) $\Psi_1 \in A_L$

oraz

(ii.2.1) $\Psi_1 \in \{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2}\}$

prowadzą do uznania, że
(iii) $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Psi_1\urcorner$ {**L1.3**, (ii)},
więc twierdzenie [**ind**] jest spełnione dla $i = 1$.
►► Dla $i > 1$ zakładamy, że $1 < i \leq k$ oraz że [**ind**] jest spełnione dla wszystkich wskaźników mniejszych od i, tj.:
o ile $h < i$, to $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Psi_h\urcorner$ {zał. ind.}.

Z przyjętych założeń wynika – zgodnie z alternatywą w definiensie określenia **D9.a**, zapisaną w wierszu 4. dla ciągu $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_k$, o którym mowa w wierszu 2 – że również w przypadku wyrazów ciągu pozwalającego mówić o wyprowadzalności na gruncie systemu L wyrażenia $\ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Phi_n\urcorner$ z wyrażeń $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2}$ jest spełniony warunek (*) lub (**).
Jeśli

(*.1) $\Psi_i \in (A_L \cup \{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2}\})$ {zd.},

to wniosek $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Phi_i\urcorner$ jest do uzyskania tak samo, jak w przypadku $i = 1$.
Natomiast w sytuacji, gdy

(**.1) Ψ_i jest uzyskany z poprzedzających go wyrazów ciągu w wyniku zastosowania do nich **RO** lub reguły **D∧** (zastosowania poprawnego, opisanego w 4) {zd.},

wtedy trzeba sprawdzić obie te możliwości.
Jeśli

(**.1.1) Ψ_i jest wynikiem działania odrywania {zd.},

to

(**.1.2) istnieją wcześniejsze od Ψ_i wyrazy ciągu $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_k$, powiedzmy {**O∨**}, wyrazy $\Psi_{i'}$ oraz $\Psi_{i''}$ takie, że $\Psi_{i'} = \ulcorner\Psi_{i''} \Rightarrow \Psi_i\urcorner$ {4, **RO**}.

Z definicji **D9.a**, (**.1.2), faktu, że i', $i'' < i$ oraz założenia indukcyjnego wynika, że:

(**.1.3) $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow (\Psi_{i''} \Rightarrow \Psi_i)\urcorner$

oraz

(**.1.4) $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Psi_{i''}\urcorner$

czyli

(**.1.5) $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow (\Psi_{i''} \Rightarrow \Psi_i)\urcorner, \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Psi_{i''}\urcorner$

{(**.1.3), **.1.4)},

co – na podstawie **L1.4** – prowadzi do twierdzenia, że:

(**1.6) $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Psi_i\urcorner$.

Jeśli

(**.2.1) Ψ_i jest wynikiem zastosowania reguły dołączania kwantyfikatora ogólnego {zd.},

to:

(**.2.2) istnieje wcześniejszy od Ψ_i wyraz ciągu $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_k$, powiedzmy {**O**⋁},$\Psi_{i'}$ taki, że $\Psi_i = \ulcorner(\bigwedge \alpha)\ \Psi_{i'}\urcorner$, a przy tym zmienna α nie jest wolna w żadnym z wyrażeń $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}1}$ {4, **D**⋀}.

Z definicji **D9.a**, (**.2.2), faktu, że $i' < i$ oraz założenia indukcyjnego wynika, że:

(**.2.3) $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Psi_{i'})\urcorner$,

co – na podstawie **L1.5** zastosowanego do (**2.2) – daje podstawę do uznaniu, że:

(**.2.4) $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow (\bigwedge \alpha)\ \Psi_{i'}\urcorner$,

czyli – wobec $\Psi_i = \ulcorner(\bigwedge \alpha)\ \Psi_{i'}\urcorner$ {(**.2.2}

(**.2.5) $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Psi_i\urcorner$.

Ponieważ (*.1) lub (**.1) oraz:

(*.1) $\Rightarrow \Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Psi_i\urcorner$

(**.1) $\Rightarrow \Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Psi_i\urcorner$

{(**.1.1) ⇒ (**.1.); (**.2.1) (**.2.5)}, więc można uznać, że również dla $i > 1$ twierdzenie $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Psi_i\urcorner$ jest prawdziwe.

Wobec ► oraz ►► można uznać dowód twierdzenia [**ind**] za zakończony, co znaczy, że:

5. $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Psi_k\urcorner$ {[**ind**]},

a ponieważ $\Psi_k = \Phi_n$ {3}, więc ostatecznie

$\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_{n\text{-}2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Phi_n\urcorner$.

D o w ó d T11.2:

Z wyżej udowodnionego twierdzenia o dedukcji dla klasycznych systemów logicznych, zapisanego w postaci **T11.1**, wynika twierdzenie o dedukcji zapisane w postaci **T11.2** (w dowodzie **T11.2** trzeba zastosować wielokrotnie **T11.1**).■

Stosując **T11.2**, można okazać, że systemy założeniowy i aksjomatyczny rachunku klasycznego są równoważne: w systemie aksjomatycznym (wzbogaconym w metasystemie o **D9a** i **D9.b**) można uzyskać reguły pierwotne systemu założeniowego, a w systemie założeniowym aksjomaty i reguły pierwotne systemu aksjomatycznego[7].

Warto zauważyć, że: odpowiednikiem twierdzenia o dedukcji w postaci **T11.1** jest w teorii konsekwencji implikacja:
jeżeli $\Psi \in Cn_L(X \cup \{\Phi\})$, to $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in Cn_L(X)$,
tj. implikacja odwrotna równoważności **T5'**, udowodnionej dla systemów logicznych; a odpowiednikiem **T11.2** jest implikacja o następniku $\ulcorner\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow (\ldots \Rightarrow (\Phi_n \Rightarrow \Psi)\ldots)\urcorner \in Cn_L(X)$. Ponieważ w kolejnym rozdziale wygodniej będzie odwoływać się do twierdzenia o dedukcji zapisanego przy użyciu symbolu „Cn_L”, warto wyraźniej niż w tej uwadze zanotować wzmiankowane odpowiedniki.

T11.1' Jeżeli $\Psi \in Cn_L(X \cup \{\Phi\})$, to $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in Cn_L(X)$.

T11.2' Jeżeli $\Psi \in Cn_L(X \cup \{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\})$,
to $\ulcorner\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow (\ldots \Rightarrow (\Phi_n \Rightarrow \Psi)\ldots)\urcorner \in Cn_L(X)$.

Twierdzenie o dedukcji dla klasycznych rachunków logicznych daje podstawę do udowodnienia tego twierdzenia dla systemów opartych na rachunku klasycznym. W zapisie tego twierdzenia symbol „$(\bigwedge \ldots)\ \Phi$” oznacza wyrażenie otrzymane w wyniku związania kwantyfikatorem ogólnym wszystkich zmiennych wolnych wyrażenia Φ, czyli oznacza zdanie (formułę zamkniętą) uzyskane w wyniku pełnej generalizacji formuły Φ, pełnej, tj. obejmującej wszystkie jej zmienne wolne. Jeśli zmiennych wolnych nie ma, a więc gdy Φ jest zdaniem, wtedy $(\bigwedge \ldots)\ \Phi = \Phi$. Symbol „$(\bigwedge \ldots)\ \Phi$” uwyraźnia fakt, że twierdzenia systemów, nawet gdy są zapisywane w postaci funkcji zdaniowych, to są rozumiane jako zdania, np. napisy: $x = x$, $x + 1 > x$, $x = y \Rightarrow y = x$ itp. są rozumiane jako spełnione dla dowolnych obiektów z zakresu zmiennych użytych w tych twierdzeniach, tj. są rozumiane jako: $(\bigwedge x)\ x = x$, $(\bigwedge x)\ x + 1 > x$, $(\bigwedge x, y)\ x = y \Rightarrow y = x$ itp. Natomiast $L^+ = \langle(A_l \cup A_s), \boldsymbol{D}\rangle$ to oparty na klasycznym rachunku logicznym system dedukcyjny, w którym A_l to zbiór aksjomatów logicznych, a A_s to zbiór aksjomatów specyficznych dla tego systemu, w których występują właściwe dla niego stałe pozalogiczne.

[7] Szkic dowodu równoważności tych systemów jest w: L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 334–336, a dowód twierdzenia o równoważności systemów KRZ założeniowych i aksjomatycznych jest w: W.A. Pogorzelski, *Klasyczny rachunek zdań...*, dz. cyt., s. 187–193.

T12.a Jeżeli $\vdash_{L+} \Phi$, tj. Φ jest tezą systemu opartego na klasycznym rachunku logicznym o aksjomatach pozalogicznych A_s, to istnieją takie aksjomaty $A_1, A_2, \ldots A_n \in A_s$, że implikacja
$\ulcorner(\bigwedge \ldots) [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi\urcorner$ jest tezą logiczną,
tj. $\vdash_L \ulcorner(\bigwedge \ldots) [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi\urcorner$.

D o w ó d:
Z założenia tego twierdzenia
1. $\vdash_{L+} \Phi$
oraz **D9.b** wynika, że
2. w systemie L^+ istnieje wyprowadzenie, czyli dowód wyrażenia Φ, tj. skończony ciąg wyrażeń {**W2**, **D3.1**}, który jest oparty na zbiorach: $L_1, L_2, \ldots, L_k \in A_{l.}$ aksjomatów logicznych oraz $A_1, A_2, \ldots, A_k \in A_s$ aksjomatów specyficznych systemu L^+ {**OV**}.
Wobec tego
3. istnieje także dowód wyrażenia Φ oparty na założeniach:
$(\bigwedge \ldots) [L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n]$ oraz $(\bigwedge \ldots) [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n]$ –
do których nie stosuje się reguły podstawiania (bo nie ma w nich zmiennych wolnych) – w którym korzysta się wyłącznie z reguł systemu założeniowego klasycznego rachunku;
czyli
4. $(\bigwedge \ldots) [L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n], (\bigwedge \ldots) [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n] \vdash_L \Phi$ {**D9**}.
Korzystając z twierdzenia o dedukcji dla klasycznych systemów logicznych **T11.2a**, można zatem uznać, że tezą rachunku klasycznego jest implikacja $\{(\bigwedge \ldots) [L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n] \Rightarrow ((\bigwedge \ldots) [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi\}$,
a więc, że:
5. $\vdash_L \{(\bigwedge \ldots) [L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n] \Rightarrow ((\bigwedge \ldots) [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi\}$.
Ponieważ poprzednik $(\bigwedge \ldots) [L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n]$ tej implikacji jest tezą logiczną, więc także jej następnik $\ulcorner(\bigwedge \ldots) [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi\urcorner$ jest tezą logiczną. Jako że w aksjomatach $A_1, A_2, \ldots A_n \in A_s$ występują pozalogiczne stałe właściwe dla danego systemu opartego na logice klasycznej, więc ściślej można powiedzieć, że implikacja $\ulcorner(\bigwedge \ldots) [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi\urcorner$ jest tezą w sensie szerszym, tj. podstawieniem jakiejś tezy rachunku klasycznego. W **T12.a** mowa o tezie, bo – jak wiadomo – w wyniku prawidłowego podstawienia uzyskuje się z tezy tezę. ■

Prawdziwa jest również implikacja odwrotna do **T12.a**, tj.:

T12.b Jeżeli $\vdash_L$ ⌜$(\bigwedge \ldots)\ [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi$⌝, tj. istnieją aksjomaty $A_1, A_2, \ldots A_n \in A_s$, takie że implikacja ⌜$(\bigwedge \ldots)\ [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi$⌝ jest tezą logiczną, to Φ jest tezą systemu opartego na klasycznym rachunku logicznym o aksjomatach pozalogicznych, tj. $\vdash_{L+} \Phi$.

Dowód:
Jeśli
1. $\vdash_L$ ⌜$(\bigwedge \ldots)\ [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi$⌝ {zał.},
to – zgodnie z **L1.1**:
2. $\vdash_{L+}$ ⌜$(\bigwedge \ldots)\ [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi$⌝.
Ponieważ zdanie ⌜$(\bigwedge \ldots)\ [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n]$ jest tezą systemu L^+, więc również wyrażenie Φ jest jego tezą: $\vdash_{L+} \Phi$. ■

Prawidłowości **T12.a** i **T12.b** dają podstawę dla uznania następującej równoważności:

T12 Φ jest tezą systemu L^+ opartego na klasycznym rachunku logicznym o aksjomatach pozalogicznych A_s, tj. $\vdash_{L+} \Phi$, wtedy i tylko, gdy istnieją takie aksjomaty specyficzne $A_1, A_2, \ldots A_n \in A_s$ tego systemu, że implikacja ⌜$(\bigwedge \ldots)\ [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi$⌝ jest tezą logiczną, tj. $\vdash_L$ ⌜$(\bigwedge \ldots)\ [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi$⌝.

Zgodnie z **T12** tezami dowolnego systemu dedukcyjnego opartego na logice klasycznej są formuły wyprowadzalne z aksjomatów logicznych, w których można podstawiać formuły danego systemu. Inaczej mówiąc, tezami takiego systemu są konsekwencje logiczne jego aksjomatów. Znaczy to, że dowodzenie twierdzeń w systemach dedukcyjnych jest nie tylko oparte na prawach logiki, lecz właściwie jest dowodzeniem podstawień praw logiki.

2.4 Własności systemów dedukcyjnych

O ogólnych własnościach systemów dedukcyjnych była już wzmianka w uwagach o własnościach systemów aksjomatycznych KRZ (**RI.4). Spośród warunków wcześniej wyliczonych i ogólnikowo określonych zostaną teraz dokładniej omówione pojęcia niesprzeczności, zupełności i rozstrzygalności systemu dedukcyjnego (wspomniany wcześniej warunek pełności, jako własność systemu semantyczna, zostanie określony w ***RII.2) oraz pojęcie niezależności aksjomatów systemu. To ostatnie pojęcie wskazuje na systemy aksjomatyczne, jednakże pojęcia niesprzeczności, zupełności i rozstrzygalności dotyczą dowolnych systemów dedukcyjnych.

2.4.1 Niesprzeczność

Niesprzeczność jest koniecznym warunkiem stawianym każdemu zbiorowi zdań, w tym zbiorowi tez systemu. Najczęściej warunek ten jest formułowany, zgodnie z treścią nazwy „niesprzeczność", jako wymóg, by pośród zdań danego zbioru, a więc także pośród tez systemu nie było wyrażeń sprzecznych. W poniższym zapisie tak rozumianej niesprzeczności systemów – zwanej niesprzecznością zwykłą lub negacyjną[8] – symbol „S", stosowany już na oznaczenie określonego ogółu wyrażeń zdaniowych poprawnie zbudowanych, jest uszczegółowiony do symbolu „$S_{<A,\, \boldsymbol{D}>}$", oznaczającego zbiór poprawnie zbudowanych wyrażeń zdaniowych systemu $<A, \boldsymbol{D}>$.

D10.a1 Zbiór wyrażeń zdaniowych X jest niesprzeczny wtedy i tylko, gdy nie istnieje Φ takie, że $\Phi \in Cn(X) \wedge \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn(X)$;

D10.a2 System $<A, \boldsymbol{D}>$ jest niesprzeczny wtedy i tylko, gdy $\sim(\bigvee \Phi \in S_{<A,\, \boldsymbol{D}>})\ [\Phi \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A) \wedge \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A)]$.

Swobodniej można więc powiedzieć, że z niesprzecznego zbioru nie da się wyprowadzić pary zdań sprzecznych, co w przypadku systemu znaczy, że pary takiej nie da się wyprowadzić z aksjomatów systemu, stosując reguły wyprowadzania (**D4.c**), tj. że nie ma w systemie pary tez wzajemnie sprzecznych.

Określenie pojęcia sprzecznego zbioru zdań i sprzecznego systemu uzyskuje się przez zaprzeczenia określenia **D10.a**:

D10.a1' Zbiór wyrażeń zdaniowych X jest sprzeczny wtedy i tylko, gdy istnieje Φ takie, że $\Phi \in Cn(X) \wedge \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn(X)$;

D10.a2' System $<A, \boldsymbol{D}>$ jest sprzeczny wtedy i tylko, gdy $(\bigvee \Phi \in S_{<A,\, \boldsymbol{D}>})\ [\Phi \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A) \wedge \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A)]$.

---

[8] Zob.: G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt., s. 67; J. Woleński, *Semantics and Truth*, dz. cyt., s. 135, **Df15(e)**.

Sprzeczność dyskwalifikuje system i oparte na nim interpretacje, ponieważ w systemie takim – zgodnie z prawem $(p \wedge {\sim}p) \Rightarrow q$ (Dunsa Szkota) – można uznać (udowodnić) dowolne jego wyrażenie zdaniowe, co znaczy, że wszystkie wyrażenia zdaniowe systemu, niezależnie od ich wartości logicznej, są jego tezami.

Korzystając z pojęć zdefiniowanych w **D10.a** oraz prawidłowości dotyczących relacji konsekwencji Cn_L, można uzasadnić prawidłowości sformułowane w kolejnych twierdzeniach i wnioskach.

T13 Zbiór wyrażeń zdaniowych X jest niesprzeczny wtedy i tylko, gdy niesprzeczny jest zbiór $Cn_L(X)$.

Na podstawie tego wniosku można powiedzieć m.in., że system dedukcyjny jest niesprzeczny wtedy i tylko, gdy niesprzeczny jest zbiór A jego aksjomatów.

D o w ó d:

$\boxed{\rightarrow}$

1. Zbiór wyrażeń zdaniowych X jest niesprzeczny {zał.}
2. Nie istnieje formuła Φ taka, że Φ, $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_L(X)$ {1, **D10.a1**}
3. Nie istnieje formuła Φ taka, że Φ, $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_L(Cn_L(X))$ {2, **T3'**}.

Zatem: Zbiór $Cn_L(X)$ jest niesprzeczny {3, **D10.a1**}.

$\boxed{\leftarrow}$

1. Zbiór $Cn_L(X)$ jest niesprzeczny {zał.}

Gdyby było tak, że

2. Zbiór X jest sprzeczny {zdn.},

wtedy istniałaby formuła Φ taka, że

3. Φ, $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_L(X)$. {1, **D10.a1**}

Jako że $Cn_L(X) \subset Cn_L(Cn_L(X))$ {**T1'**}, więc

4. Φ, $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_L(Cn_L(X))$,

a to znaczy, że zbiór $Cn_L(X)$ jest – wbrew założeniu – sprzeczny.

{4, **D10.a1**}.■

T14 Jeśli zdanie $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \notin Cn_L(X)$, to zbiór $(X \cup \{\Phi\})$ jest niesprzeczny w sensie określonym w **D10.a1**.

Zgodnie z tym twierdzeniem dowolny niesprzeczny zbiór X można niesprzecznie rozszerzyć o każde takie zdanie, którego negacja nie jest wyprowadzalna ze zbioru X (nie jest jego konsekwencją logiczną).

Dowód:
Jeśli
1. $\ulcorner\sim\Phi\urcorner \notin Cn_L(X)$,
a jednocześnie
2. zbiór $(X \cup \{\Phi\})$ jest sprzeczny {zdn.},
to – zgodnie z **D10.a1'** – istnieje takie wyrażenie zdaniowe Ψ, że:
3. $\Psi \in Cn_L(X \cup \{\Phi\}) \wedge \ulcorner\sim\Psi\urcorner \in Cn_L(X \cup \{\Phi\})$, tj.
4. $\ulcorner\Psi \wedge \sim\Psi\urcorner \in Cn_L(X \cup \{\Phi\})$.
Korzystając z twierdzenia o dedukcji {***RI.2: **T11.1**}, które warto tu sformułować w postaci:
5. jeżeli $\ulcorner\Psi \wedge \sim\Psi\urcorner \in Cn_L(X \cup \{\Phi\})$, to $\ulcorner\Phi \Rightarrow (\Psi \wedge \sim\Psi)\urcorner \in Cn_L(X)$,
można uznać:
6. $\ulcorner\Phi \Rightarrow (\Psi \wedge \sim\Psi)\urcorner \in Cn_L(X)$ {**RO**: 5, 4; można wykorzystać także ***RI.2: **T5'**}.
Na podstawie prawa $[p \Rightarrow (q \wedge \sim q)] \Rightarrow \sim p$ (a prawa klasycznego rachunku logicznego wyznaczają relację konsekwencji Cn_L):
7. $\ulcorner\Phi \Rightarrow (\Psi \wedge \sim\Psi)] \Rightarrow \sim\Phi\urcorner \in Cn_L(X)$,
co – zgodnie z implikacją ***RI.2: **L1.2**, zastosowaną do 6 – daje podstawę do uznania, że także:
8. $\ulcorner\sim\Phi\urcorner \in Cn_L(X)$,
co jednak jest sprzeczne z założeniem 1.■

T15.1 Zbiór wyrażeń zdaniowych X jest niesprzeczny w znaczeniu określonym w **D10.a1** wtedy i tylko, gdy niesprzeczny w tym samym sensie jest każdy jego skończony podzbiór;

T15.2 System $<A, \boldsymbol{D}>$ jest niesprzeczny w znaczeniu określonym w **D10.a2** wtedy i tylko, gdy niesprzeczny w tym samym sensie jest każdy system $<A', \boldsymbol{D}>$ taki, że A' jest skończonym podzbiorem A.

Wedle tego twierdzenia – zwanego twierdzeniem o zwartości (dla niesprzeczności) – niesprzeczność danego (nad-)zbioru/systemu daje podstawę do wnioskowania o niesprzeczności jego podzbiorów/podsystemów; a wobec tego sprzeczność jakiegokolwiek podzbioru/podsystemu przenosi się na sprzeczność całego zbioru/systemu, w którym sprzeczny jest zawarty.

D o w ó d T15.1:

$\boxed{\rightarrow}$

Dołączenie do założeń:

1. X jest niesprzeczny w znaczeniu określonym w **D10.a1**,
2. $X' \subset X$

przypuszczenia, że

3. Zbiór formuł zdaniowych X' jest sprzeczny, {zdn.},

prowadzi do sprzeczności. Z 3. wynika bowiem, że:

4. $(\vee\, \Phi \in S_X)\ [\Phi, \ulcorner\sim\Phi\urcorner \in Cn_L(X')]$ {**D10.a1'**}.

Jako że $X' \subset X$ {2}, więc $Cn_L(X') \subset Cn_L(X)$ {**T2**}, co znaczy, że:

5. $(\vee\, \Phi \in S_X)\ [\Phi, \ulcorner\sim\Phi\urcorner \in Cn_L(X)]$,

czyli że zbiór X jest sprzeczny w sensie zgodnym z **D10.a1**, co jednak jest sprzeczne z założeniem 1.

$\boxed{\leftarrow}$

Skoro, zgodnie z założeniem implikacji odwrotnej

1. każdy skończony podzbiór zbioru X jest niesprzeczny,

to jest wykluczone, by:

2. X był zbiorem formuł zdaniowych sprzecznym {zdn.}.

Gdyby bowiem tak było, wtedy – zgodnie z **D10.a1'** – istniałoby Φ takie, że

3. $\Phi \in Cn_L(X) \wedge \ulcorner\sim\Phi\urcorner \in Cn_L(X)$.

Wtedy jednak – w myśl **T4'** – istnieją takie skończone podzbiory Y_1 i Y_2 zbioru X, że

4. $\Phi \in Cn_L(Y_1) \wedge \ulcorner\sim\Phi\urcorner \in Cn_L(Y_2)$.

Jako że: $Y_1, Y_2 \subset (Y_1 \cup Y_2)$ {**RIV.1:**T11**},

więc także

5. $Cn_L(Y_1), Cn_L(Y_2) \subset Cn_L(Y_1 \cup Y_2)$ {**T2'**},

oraz

6. $\Phi, \ulcorner\sim\Phi\urcorner \in Cn_L(Y_1 \cup Y_2)$ {4, 5},

co znaczy, że suma $(Y_1 \cup Y_2)$ jest zbiorem sprzecznym {**D10.a1'**},

a ponieważ: $(Y_1 \cup Y_2) \subset X$, więc istnieje skończony podzbiór zbioru X sprzeczny, co jest niezgodne z założeniem 1.

D o w ó d T15.2:

Uzasadnienie tego twierdzenia jest analogiczne do dowodu T15.1.

$\boxed{\rightarrow}$

1. System <A, $\boldsymbol{D}$> jest niesprzeczny w sensie **D10.a2**;
2. $A' \subset A$ {zał.}
3. System <A', $\boldsymbol{D}$> jest sprzeczny {zdn.}

4. $(\bigvee \Phi \in S_{<A,\, \boldsymbol{D}>})\ [\Phi, \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_{A',\, \boldsymbol{D}}(A')]$ {3, **D10.a2'**}
5. $Cn_{A',\, \boldsymbol{D}}(A') \subset Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A)$ {2, **T2**}
6. $(\bigvee \Phi \in S_{<A,\, \boldsymbol{D}>})\ [\Phi, \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A)]$ {4, 5, **RIV.1: **T4**},
7. System $<A, \boldsymbol{D}>$ jest sprzeczny {6, **D10.a2**.}

Sprz. 1, 7.

$\boxed{\leftarrow}$

1. Niesprzeczny jest każdy system $<A', \boldsymbol{D}>$ taki, że A' jest skończonym podzbiorem A {zał.}
2. System $<A, \boldsymbol{D}>$ jest sprzeczny w znaczeniu określonym w **D10.a2'** {zdn.}
3. $(\bigvee \Phi \in S_{<A,\, \boldsymbol{D}>})\ [\Phi \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A) \wedge \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A)]$ {2, **D10.a2'**}

Istnieją takie podzbiory Y_1 i Y_2 zbioru A, że

4. $\Phi \in Cn_L(Y_1) \wedge \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_L(Y_2)$ {**T4**}

Jako że: $Y_1, Y_2 \subset (Y_1 \cup Y_2) \subset A$ {**RIV.1: **T11**}, więc

5. $\Phi, \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in (Y_1 \cup Y_2)$ {4}
6. System $<(Y_1 \cup Y_2), \boldsymbol{D}>$ jest sprzeczny w znaczeniu określonym w **D10.a2'**

Ponieważ $(Y_1 \cup Y_2) \subset A$, więc na podstawie 6. można uznać, że

7. Nie każdy system $<A', \boldsymbol{D}>$ taki, że $A' \subset A$ jest niesprzeczny.

Sprz. 1, 7.■

W5.1 Jeżeli zbiór formuł Y jest niesprzeczny oraz $X \subset Y$, to X jest niesprzeczny.

Zgodnie z tym wnioskiem własność niesprzeczności dowolnego zbioru formuł można przenieść na zawarte w nim podzbiory. Wniosek ten wynika bezpośrednio z **T15.1**

W5.2 Jeżeli $X_1, X_2, X_3, \ldots$ jest nieskończonym ciągiem zbiorów formuł zdaniowych niesprzecznych w znaczeniu określonym w **D10.a1** oraz ciąg ten jest wstępujący, tzn. $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots$, to suma X wyrazów tego ciągu jest zbiorem niesprzecznym w tym samym sensie.

W myśl tej implikacji suma wyrazów rosnącego ciągu zbiorów niesprzecznych jest niesprzeczna.

D o w ó d:

Zgodnie z założeniami tej implikacji:

1. $X_1, X_2, X_3, \ldots$ jest ciągiem zbiorów niesprzecznych w sensie **D10.a1**
2. $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots$

Przypuśćmy ponadto, że
3. Zbiór $X = \bigcup X_i$, $i = 1, ..., \infty$ jest sprzeczny {zdn.}
4. Istnieje skończony i sprzeczny podzbiór $Y \subset X$ {3, **T15.1**}.
Jako że $X = \bigcup X_i$, $i = 1, ..., \infty$, więc każda z formuł zbioru $Y = \{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n\}$ należy do któregoś zbioru w ciągu $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset ...$. Niech X_k jest ostatnim takim zbiorem w tym ciągu, do którego należy którąś z formuł zbioru Y. Ponieważ wszystkie poprzedzające X_k zbiory w tym ciągu zą zawarte w X_k, więc wszystkie formuły zbioru Y są również elementami zbioru X_k:
5. $Y \subset X_k$.
Jako że Y jest zbiorem formuł sprzecznym {4}, więc
6. X_k jest zbiorem sprzecznym {**T15.1**},
co przeczy założeniu 1, że każdy wyraz ciągu $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset ...$ jest zbiorem niesprzecznym.■

Określenie **D10.a**, dobrze oddające intuicje wiązane z niesprzecznością, nie może jednak być stosowane do systemów, w których słowniku nie występuje symbol negacji. Określenie ogólniejsze, stosowalne również do systemów bez znaku negacji, jest następujące.

D10.b1 Zbiór wyrażeń zdaniowych X jest niesprzeczny wtedy i tylko, gdy $\sim(\bigwedge \Phi \in S)\ \Phi \in Cn(X)$;

D10.b2 System $<A, \boldsymbol{D}>$ jest niesprzeczny wtedy i tylko, gdy $\sim(\bigwedge \Phi \in S_{<A, \boldsymbol{D}>})\ \Phi \in Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A)$.

W kontekście tak rozumianej niesprzeczności – zwanej absolutną[9] – jest oczywiste, że jeśli zbiór zdań X lub system $<A, \boldsymbol{D}>$ jest niesprzeczny w sensie określonym w **D10.b2**, to istnieje wyrażenie Φ niewyprowadzalne z danego zbioru zdań czy w danym systemie, co znaczy, że ogół wyrażeń zdaniowych nie jest zawarty w zbiorze konsekwencji zbioru X czy w $Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A)$, a więc że zbiór tych konsekwencji jest podzbiorem właściwym ogółu zdań S języka systemu $<A, \boldsymbol{D}>$. Oto ten wniosek, sformułowany dla niesprzecznego systemu:

W6 System $<A, \boldsymbol{D}>$ jest niesprzeczny wtedy i tylko, gdy $Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A) \subset S_{<A, \boldsymbol{D}>} \neq Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A)$.

[9] Zob. G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt., s. 67; J. Woleński, *Semantics and Truth*, dz. cyt., s. 135, **Df15(d)**.

Nawiązując do ostatniej równoważności, można powiedzieć, że

D10.b2’ System $<A, \boldsymbol{D}>$ jest sprzeczny wtedy i tylko, gdy $(\bigwedge \Phi \in S_{<A, \boldsymbol{D}>})\ \Phi \in Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A)$, tj. gdy $S_{<A, \boldsymbol{D}>} = Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A)$.

W systemie sprzecznym w sensie **D10.b2’** da się więc wyprowadzić każde wyrażenie zdaniowe poprawnie zbudowane. W zakresie systemów ze znakiem negacji definicje **D10.a** i **D10.b** (także **D10.a’** i **D10.b’**) są równoważne, czyli zbiór wyrażeń/system jest niesprzeczny negacyjnie (w sensie klasycznym) wtedy i tylko, gdy jest niesprzeczny absolutnie.

Niesprzeczności systemów dedukcyjnych dowodzi się dwiema metodami syntaktycznymi: metodą cechy dziedzicznej oraz metodą interpretacji (metody semantyczne są omówione w ***RII).

Pierwsza z tych metod jest oparta na pojęciach zdefiniowanych ***RI.1: **D4.c** i **D4.d**, tj. na pojęciu własności dziedzicznej ze względu na funkcję oraz ze względu na klasę funkcji. Warto przypomnieć, że fakt dziedziczenia własności W ze względu na funkcję f jest zapisywany jako $inh(W, f)$, a na dziedziczenie tej własności przez klasę $\boldsymbol{F}$ funkcji wskazuje napis $inh(W, \boldsymbol{F})$.

Dowody niesprzeczności systemów rozumianej zgodnie z **D10.a2** są oparte na następującym twierdzeniu.

T16.a Jeśli istnieje własność W, która przysługuje każdemu aksjomatowi systemu $<A, \boldsymbol{D}>$ i jest dziedziczona ze względu na klasę działań $\boldsymbol{D}$, tj. $inh(W, \boldsymbol{D})$, oraz W nie przysługuje wyrażeniom sprzecznym, to system ten jest niesprzeczny w sensie zdefiniowanym w **D10.a2**.

Dowód:

Jako że zbiór tez systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$ jest identyczny z $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$, tj. z najmniejszym zbiorem zawierającym zbiór A i zamkniętym ze względu na klasę działań wnioskowania $\boldsymbol{D}$ {**D2**}, jak również jeśli jakaś cecha przysługuje każdemu elementowi danego zbioru i jest dziedziczona (niezmiennicza) ze względu na każdą funkcję (działanie) klasy $\boldsymbol{D}$, tj. $inh(W, \boldsymbol{D})$, to cecha ta przysługuje także każdemu elementowi zbioru $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ {***RI.1: **T1**}, więc z założeń tego twierdzenia, tj.:

1. $(\bigwedge \Phi_a \in A)\ W(\Phi_a)$;
2. $inh(W, \boldsymbol{D})$;
3. własność W nie przysługuje wyrażeniom sprzecznym

wynika, że:

4. $(\bigwedge \Phi)$ [Φ jest tezą systemu $<A, \boldsymbol{D}>$, tj. $\Phi \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A) \Rightarrow W(\Phi)$]
{**D2,** ***RI.1: **T1**: 1, 2}.

Ponieważ przypuszczenie, że

1.1 $(\bigvee \Phi \in S_{<A,\, \boldsymbol{D}>})$ [Φ, $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A)$]

implikuje wniosek, że

1.2 $W(\Phi)$ i $W({\sim}\Phi)$ {4, 1.1},

który jest sprzeczny z założeniem 3., więc

5. ${\sim}(\bigvee \Phi \in S_{<A,\, \boldsymbol{D}>})$ [Φ, $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A)$] {1.1 $\Rightarrow$ sprz.},

co znaczy, że system $<A, \boldsymbol{D}>$ jest niesprzeczny w sensie określonym w **D10.a**. ■

Natomiast w dowodach niesprzeczności pojmowanej jak w **D10.b2** podstawowe jest twierdzenie:

T16.b Jeśli istnieje własność W, która przysługuje każdemu aksjomatowi systemu $<A, \boldsymbol{D}>$ i jest dziedziczona ze względu na klasę działań $\boldsymbol{D}$, tj. $inh(W, \boldsymbol{D})$, oraz istnieje $\Phi \in S_{<A,\, \boldsymbol{D}>}$ takie, że ${\sim}W(\Phi)$, to system ten jest niesprzeczny w sensie zdefiniowanym w **D10.b2**.

Dowód:

I ten dowód jest oparty na definicji **D2** oraz na twierdzeniu ***RI.1: **T1**, które zastosowane do założeń:

1. $(\bigwedge \Phi_a \in A)\ W(\Phi_a)$;
2. $inh(W, \boldsymbol{D})$;
3. istnieje $\Phi \in S_{<A,\, \boldsymbol{D}>}$ takie, że ${\sim}W(\Phi)$

prowadzą do uznania, że:

4. $(\bigwedge \Phi)$ [Φ jest tezą systemu $<A, \boldsymbol{D}>$, tj. $\Phi \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A) \Rightarrow W(\Phi)$]
{**D2**, ***RI.1: **T1**: 1, 2}.

Skoro każdej tezie tego systemu przysługuje własność W, to – zgodnie z 3:

5. $(\bigvee \Phi \in S_{<A,\, \boldsymbol{D}>})$ [$\Phi \notin Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A)$],

czyli

6. ${\sim}(\bigwedge \Phi \in S_{<A,\, \boldsymbol{D}>})\ \Phi \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A)$ {${\sim}\bigwedge$: 5},

co pozwala ogłosić, że system $<A, \boldsymbol{D}>$ jest niesprzeczny w znaczeniu zdefiniowanym w **D10.b2**. ■

Porównanie **T16.a** i **T16.b** prowadzi do praktycznego wniosku co do budowania dowodów niesprzeczności opartych na tych twierdzeniach. Ponieważ dwa pierwsze założenia obu tych twierdzeń są takie same, więc w dowodzie – niezależnie od sprawdzanego systemu i od tego, czy korzysta się z **T16.a** czy z **T16.b** – trzeba najpierw okazać, że istnieje własność, która przysługuje wszystkim aksjomatom danego systemu i jest dziedziczona ze względu na klasę pierwotnych jego działań wnioskowania, a następnie, że nie przysługuje: tezom sprzecznym (gdy w dowodzie korzysta się z **T16.a**) lub jakiemuś wyrażeniu zdaniowemu danego systemu (gdy korzysta się z **T16.b**).

Według tego schematu dowodzi się niesprzeczności aksjomatycznych systemów klasycznego rachunku zdań, np. systemu Hilberta-Bernaysa i systemu implikacyjno-negacyjnego Łukasiewicza (**RI.4): ponieważ własność tautologiczności (sprawdzania się metodą zero-jedynkową) przysługuje aksjomatom tych systemów i jest dziedziczona ze względu na pierwotne działania odrywania i podstawiania, bo w wyniku zastosowania **RO** lub **RP** do aksjomatów uzyskuje się tautologie KRZ, a własność ta nie przysługuje formułom sprzecznym (bo tylko jedna z pary formuł sprzecznych może się sprawdzać metodą zero-jedynkową), więc – zgodnie z **T16.a** – aksjomatyczne systemy KRZ (dokładniej – systemy ze znakiem negacji) są niesprzeczne w sensie zdefiniowanym w **D10.a2**, a więc także w sensie określonym w **D10.b2**[10].

Przykładem systemu KRZ niezawierającego znaku negacji jest implikacyjny rachunek zdań, w którego słowniku oprócz zmiennych zdaniowych i symboli pomocniczych (nawiasów) jedynym symbolem stałej jest znak implikacji. System ten jest oparty na pierwotnych regułach odrywania i podstawiania oraz na aksjomatach:

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$
$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$.

W dowodzie niesprzeczności tego systemu metodą cechy dziedzicznej korzysta się z **T16.b**: ponieważ aksjomaty tego systemu są tautologiami KRZ i własność tautologiczności dziedziczy się względem działań zgodnych z **RO** i **RP**, a przy tym są takie wyrażenia zdaniowe tego systemu, np. pojedyncze zmienne, $p \Rightarrow q$, $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ itd., którym własność ta nie przysługuje, więc system ten jest niesprzeczny w sensie zdefiniowanym w **D10.b2**.

Przykładem dowodu, w którym korzysta się z dziedziczenia własności innej niż tautologiczność jest dowód niesprzeczności równoważnościowego rachunku zdań, w którym spośród symboli funktorów występuje

[10] W: G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt., s. 69–70 są dowody niesprzeczności zwykłej i absolutnej dla systemu KRZ.

wyłącznie symbol równoważności, pierwotnymi regułami są **RO**$_{\Leftrightarrow}$ i **RP**, a jedynym aksjomatem formuła:

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(r \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow r)]$.

Aksjomat ten ma tę własność, że każda zmienna zdaniowa występuje w nim parzystą liczbę razy (jako że 0 należy do liczb parzystych, więc dotyczy to także – co ważne z uwagi na stosowanie **RP** – symboli zmiennych innych niż widoczne w zapisie tego aksjomatu). Ponieważ własność występowania przez każdą zmienną parzystą liczbę razy jest dziedziczona przez dowolne wyrażenie uzyskane z tego aksjomatu w wyniku stosowania **RO** i **RP**, a są takie wyrażenia zdaniowe tego systemu, którym własność ta nie przysługuje (np. pojedyncze zmienne), więc – na podstawie **T16.b** – system ten jest niesprzeczny w sensie **D10.b2**[11].

Dowody niesprzeczności metodą interpretacji syntaktycznej są oparte na sformułowanej niżej definicji **D11**. Ponieważ w kontekście rozważań tego rozdziału jest oczywiste, że chodzi o interpretację syntaktyczną, a nie o semantyczną, więc i w tej definicji, i w dalszych analizach mowa po prostu o interpretacji, a przy tym symbol *T* – używany w innych kontekstach także na oznaczenie ogółu tez systemu – będzie się odnosił do systemów aksjomatycznych.

D11 System aksjomatyczny *T* ma interpretację w systemie aksjomatycznym *T'* wtedy i tylko, gdy istnieje takie przyporządkowanie terminom pierwotnym systemu *T* terminów (pierwotnych lub zdefiniowanych) systemu *T'*, że po zastąpieniu terminów pierwotnych systemu *T* przez przyporządkowane im terminy *T'* jest tak, że:
1. aksjomaty systemu *T* są przekształcane w tezy systemu *T'*;
2. reguły pierwotne systemu *T* są przekształcane w reguły systemu *T'*.

Odczytując warunek 1., warto pamiętać, że aksjomaty systemu też są jego tezami, czyli warunek ten dopuszcza przekształcenie aksjomatów (wszystkich lub niektórych) systemu *T* w aksjomaty systemu *T'*, a wymagane w warunku 2. przekształcanie reguł pierwotnych systemu *T* obejmuje ich przejście nie tylko w reguły pierwotne, lecz także wtórne systemu *T'*. Wyrażenia, które uzyskuje się z wyrażeń systemu *T* w wyniku

[11] Wszystkie podane przykłady dowodów niesprzeczności metodą cechy dziedzicznej są zaczerpnięte z: L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 338 i 340.

zastąpienia w nich terminów pierwotnych tego systemu terminami systemu S' (zgodnie z przyjętym przyporządkowaniem), nazywa się tłumaczeniami wyrażeń systemu *T* w systemie *T'*. Stosując tę nazwę, można krócej powiedzieć, że system *T* ma interpretację w systemie *T'* wtedy i tylko, gdy tłumaczenie każdego aksjomatu systemu *T* jest tezą systemu *T'*, a tłumaczenie każdej pierwotnej reguły wnioskowania systemu *T* jest regułą wnioskowania w systemie *T'*. Analogicznie mówi się o poszczególnych aksjomatach i pierwotnych regułach wnioskowania systemu *T*: mają interpretację w systemie *T'* wtedy i tylko, gdy ich tłumaczenie jest tezą/regułą wnioskowania systemu *T'*.

Określenie **D11** upraszcza się w przypadku systemów aksjomatycznych opartych na tym samym rachunku logicznym, czyli na tych samych pierwotnych regułach wnioskowania, w takiej sytuacji można bowiem pominąć warunek 2. Korzystając z upraszczającego terminu „tłumaczenie", można pojęcie interpretacji określić dla takich systemów następująco:

D11' Jeśli systemy aksjomatyczne *T* i *T'* są oparte na tym samym rachunku logicznym, to *T* ma interpretację w systemie aksjomatycznym *T'* wtedy i tylko, gdy tłumaczenie każdego aksjomatu systemu *T* jest tezą systemu *T'*.

Gdy w definicji tej mowa o tłumaczeniu aksjomatu, chodzi – co w kontekście tych określeń powinno być jasne – o tłumaczenie w systemie *T'*, tj. wyrażenie uzyskane w wyniku przyjętego przyporządkowania (zastąpienia) terminów obu systemów.

W kontekście **D11** jest zrozumiały następujący wniosek (i w nim jest użyty, dla skrótu, termin „tłumaczenie").

W7 Jeśli system aksjomatyczny *T* ma interpretację w systemie *T'*, to tłumaczenie każdej tezy systemu *T* – uzyskane w wyniku fundującego interpretację przyporządkowania terminów systemu *T* terminom systemu *T'* – jest tezą w systemie *T'*.

Dowód:

Rzeczywiście, jeśli bowiem *T* ma interpretację w systemie *T'*, to istnieje przyporządkowanie terminów obu systemów, w którym tłumaczenie każdego aksjomatu systemu *T* jest tezą systemu *T'*, a tłumaczenie każdej reguły pierwotnej systemu *T* jest regułą wnioskowania w systemie *T'* {**D11**}. Jeśli więc teza Φ należy do aksjomatów systemu *T*, to jest tezą *T'*; a jeśli teza Φ systemu *T* nie jest jego aksjomatem, czyli została wyprowadzona z aksjomatów na podstawie pierwotnych reguł wnioskowania, to jest także wyprowadzalna z tłumaczeń aksjomatów i tłumaczeń reguł pierwotnych w systemie *T*', czyli też jest tezą tego systemu. ■

W dowodach niesprzeczności systemów aksjomatycznych metodą interpretacji korzysta się z następującego twierdzenia.

T17.a Jeśli system aksjomatyczny *T* ma interpretację w systemie aksjomatycznym *T*' oraz system *T*' jest niesprzeczny w sensie określonym w **D10.a2**, to również system *T* jest w tym sensie niesprzeczny.

Dowód:
Sformułowane w kontekście założeń:
1. System *T* ma interpretację w systemie *T*'
oraz
2. System *T*' jest niesprzeczny w sensie określonym w **D10.a2**
przypuszczenie, że:
3. system *T* jest sprzeczny w sensie zdefiniowanym w **D10.a2'**{zdn.}
prowadzi do sprzeczności. Założenie to znaczy bowiem, że:
4. system *T* zawiera jako swoje tezy dwa wyrażenia sprzeczne, Φ i $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner$ {3, **D10.a2'**},
a wtedy również ich tłumaczenia Φ' i $\ulcorner{\sim}\Phi'\urcorner$, uzyskane w przyporządkowaniu ustalającym interpretację, byłyby dwiema sprzecznymi tezami systemu *T*' {**W7**}, czyli i ten system byłby sprzeczny, wbrew założeniu 2. ■

W sytuacjach, w których można mówić jedynie o niesprzeczności w znaczeniu zdefiniowanym w **D10.b2**, jest stosowane twierdzenie analogiczne do **T17.a**, lecz pozwalające ogłosić niesprzeczność danego systemu *T* na podstawie niesprzeczności systemu *T*' tylko po spełnieniu dodatkowego warunku.

T17.b Jeśli system aksjomatyczny *T* ma taką interpretację w systemie aksjomatycznym *T*', że każde wyrażenie zdaniowe systemu *T*' jest tłumaczeniem pewnego wyrażenia zdaniowego systemu *T* oraz system *T*' jest niesprzeczny w sensie określonym w **D10.b2**, to również system *T* jest w tym sensie niesprzeczny.

Warto dostrzec, że dodatkowy (w porównaniu z **T17.a**) warunek dotyczy nie tylko tez systemu *T*', lecz dowolnego jego wyrażenia zdaniowego (ma być tłumaczeniem jakiegoś wyrażenia zdaniowego systemu *T*), tj. dowolnego wyrażenia należącego do $T'_{<A,\, \boldsymbol{D}>}$.

D o w ó d:
Założenia dowodzonego twierdzenia:
1. System T ma interpretację w systemie T';
2. Każde wyrażenie zdaniowe systemu T' jest tłumaczeniem pewnego wyrażenia zdaniowego systemu T;
3. System T' jest niesprzeczny w sensie określonym w **D10.b2**.
Z założenia 3. oraz **D10.b2** wynika, że istnieje takie wyrażenie zdaniowe systemu T', które nie jest jego tezą ($S_{<A,\, \boldsymbol{D}>}$ i $S'_{<A',\, \boldsymbol{D}'>}$ to ogół poprawnie zbudowanych wyrażeń zdaniowych systemu, odpowiednio, T i T'), tj. {**O**V}:
4. $\Phi' \in S'_{<A',\, \boldsymbol{D}'>} \wedge \Phi' \notin Cn_{A',\, \boldsymbol{D}'}(A')$.
Wtedy, zgodnie z 2.:
5. istnieje $\Phi \in S_{<A,\, \boldsymbol{D}>,}$ którego tłumaczeniem w danej interpretacji jest wyrażenie Φ'.
Z przypuszczenia, że:

1.1 system T jest sprzeczny w znaczeniu określonym w **D10.b2’** {zd.}

wynika:

1.2 Φ jest tezą systemu T, tj. $\Phi \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A)$ {**D10.b2’**, 5}

1.3 Φ' jest tezą systemu T' tj. $\Phi' \in Cn_{A',\, \boldsymbol{D}'}(A')$ {**W7**, 1, 1.2},

co jednak jest sprzeczne z 4. Zatem:
T jest niesprzeczny w znaczeniu określonym w **D10.b2’** {1.1⇒sprz.}.■

Dowody niesprzeczności systemu przeprowadzane metodą cechy dziedzicznej są nazywane absolutnymi, jako że nie wymagają porównywania danego systemu z innym. Natomiast dowody metodą interpretacji nazywa się dowodami względnymi, ponieważ okazując niesprzeczność danego systemu, trzeba wskazać jego interpretację w innym systemie niesprzecznym. W ten pośredni sposób da się udowodnić na przykład: niesprzeczność geometrii nieeuklidesowej, interpretując ją w geometrii euklidesowej, której niesprzeczność okazuje się, interpretując ją w arytmetyce, która jest systemem niesprzecznym; niesprzeczność algebry Boole’a oraz Łukasiewicza aksjomatycznego systemu sylogistyki arystotelesowskiej przez interpretację tych systemów w klasycznym rachunku zdań (którego niesprzeczność da się okazać metodą cechy dziedzicznej)[12].

[12] Przykłady tu podane i inne są dokładniej opisane w: L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 343.

2.4.2 Zupełność

Podstawowe, intuicyjnie łatwiej uchwytne pojęcie zupełności dotyczy systemów, w których występują zdania, tj. wyrażenia zdaniowe niezawierające zmiennych wolnych. Mowa wtedy o tzw. zupełności systemu w sensie klasycznym.

D12.a1 System aksjomatyczny $<A, \boldsymbol{D}>$ jest zupełny (w sensie klasycznym) wtedy i tylko, gdy dla każdego zdania $\Phi \in S_{<A,\, \boldsymbol{D}>}$ jest tak, że: $\Phi \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A) \vee \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_{A,\, \boldsymbol{D}}(A)$.

Odczytując tę (i **D12.b**) definicję trzeba pamiętać, że S jest zbiorem poprawnie zbudowanych formuł języka J, w którym jest zbudowany system $<A, \boldsymbol{D}>$. Definicja ta jest więc zrelatywizowana do określonego języka: chodzi o zdanie Φ dowolne, lecz sformułowane w języku J systemu $<A, \boldsymbol{D}>$[13]. Po drugie, jako że zgodnie z przyjętą w tym podrozdziale symboliką, $S_{<A,\, \boldsymbol{D}>}$ oznacza ogół wyrażeń zdaniowych systemu $<A, \boldsymbol{D}>$ (a więc także funkcji zdaniowych, tj. wyrażeń ze zmiennymi wolnymi), dlatego warunek że wyrażenie Φ jest zdaniem, musi być w **D12.a** wyraźnie postawiony. Jak bowiem wiadomo (*RIII.1), istnieją wzajemnie sprzeczne funkcje zdaniowe – np. $x > y$, $\sim(x > y)$; $p \vee q$, $\sim(p \vee q)$ – z których każda jest fałszywa, czyli żadna funkcja z danej pary nie jest tezą. Mówiąc swobodniej i ogólniej niż w tej definicji: w systemie zupełnym z każdej pary zdań sprzecznych zapisanych w języku danego systemu co najmniej jedno zdanie jest jego tezą.

Zgodnie z **D12.a1** można, używając innej terminologii, powiedzieć, że jeśli system $<A, \boldsymbol{D}>$ jest zupełny, to nie ma w języku tego systemu zdań od systemu niezależnych, tj. takich, że ani dane zdanie, ani jego negacja nie są tezami systemu.

To ostatnie sformułowanie (tak samo jak rozumienie niesprzeczności zgodne z **D10.a2**) może być także stosowane do zbiorów zdań, także do zdań sformułowanych w języku naturalnym, często zwanych systemami

[13] Relatywizacja zupełności do języka J danego systemu, tu podkreślona w komentarzu do **D12.a**, bywa wskazywana wprost w definicji zupełności – zob. np.: T. Batóg, *Podstawy* logiki, dz. cyt., s. 218, definicja 7.1; L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii* mnogości, dz. cyt., s. 347–348, definicje 15 i 16. W: A. Grzegorczyk, *Zarys logiki matematycznej*, dz. cyt., pojęcie zupełności jest zrelatywizowane do określonego języka za pośrednictwem identyfikującego dany język zbioru jego terminów stałych (tamże, s. 249, definicja 6).

(np. filozoficznymi), które nie są systemami (teoriami) w znaczeniu uściślonym wyżej w **D5** (także **W3.a**, **W3.b**, **T10**). Poniższe określenie może być stosowane m.in. do rozstrzygania, czy jest zupełny zbiór aksjomatów *A* badanego systemu, tj. czy każde zdanie języka *J* lub jego negacja jest pośród konsekwencji logicznych zbioru *A*.

D12.a2 Zbiór *X* formuł zdaniowych języka *J* jest w tym języku zupełny (w sensie klasycznym) wtedy i tylko, gdy dla każdego zdania Φ tego języka jest tak, że: $\Phi \in Cn_L(X) \vee \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_L(X)$[14].

Klasyczne rozumienie zupełności nie może być stosowane do systemów, w których występują wyłącznie funkcje zdaniowe. W przypadku takich systemów jest badana tzw. zupełność w sensie Posta.

D12.b System aksjomatyczny $<A, \boldsymbol{D}>$ jest zupełny w sensie Posta wtedy i tylko, gdy dla każdego $\Phi \in S_{<A,\ \boldsymbol{D}>}$ jest tak, że: $\Phi \in Cn_{A,\ \boldsymbol{D}}(A) \vee Cn_{A,\ \boldsymbol{D}}(A \cup \{\Phi\}) = S_{<A,\ \boldsymbol{D}>}$[15].

Pamiętając, że równość $Cn_{A,\ \boldsymbol{D}}(A \cup \{\Phi\}) = S_{<A,\ \boldsymbol{D}>}$ znaczy, że system $<A, \boldsymbol{D}>$ wzbogacony o wyrażenie Φ jest systemem sprzecznym w znaczeniu określonym w **D10.b2'**, można odczytać tę definicję następująco: system jest zupełny w sensie Posta wtedy i tylko, gdy każde wyrażenie zdaniowe zapisane w języku tego systemu jest jego tezą lub dołączone do tez daje system sprzeczny w sensie zdefiniowanym **D10.b2'**[16].

Z badań nad systemami dedukcyjnymi wiadomo, że nieliczne tylko są systemami zupełnymi. Systemem zupełnym w sensie klasycznym jest klasyczny rachunek zdań z kwantyfikatorami. Słownik tego rachunku jest wzbogacony o znaki kwantyfikatorów, kwantyfikatory wiążą zmienne zdaniowe i są stosowane zgodnie z regułami rachunku predykatów. O ile,

14 Zupełność zdefiniowana jak w **D12.a** jest także nazywana zupełnością negacyjną – zob. G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt., s. 145. W cytowanej pracy jest także zdefiniowana zupełność rozumiana ogólniej, tj. bez warunku, by formuła Φ była zdaniem (tamże, s. 98). Zob. także: J. Woleński, *Semantics and Truth*, dz. cyt., s. 135, **Df15(f)**.

15 Systemy zupełne w sensie Posta są w: G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt., s. 98 nazywane syntaktycznie zupełnymi (w języku polskim wystarczyłby termin „system zupełny", bo teorie semantycznie zupełne są zwane pełnymi).

16 Dlatego system dedukcyjny zupełny w sensie Posta może być także nazywany maksymalnie niesprzecznym (maksymalnym niesprzecznym) – zob. J. Woleński, *Semantics and Truth*, dz. cyt., s. 135, **Df15(i)**.

co oczywiste, nie można klasycznie rozumianej zupełności stosować do systemów KRZ (nie ma w nich zdań), to po związaniu kwantyfikatorami zmiennych zdaniowych występujących w sprzecznych funkcjach zdaniowych, z których żadna nie jest prawdziwa, uzyskuje się pary zdań sprzecznych spełniające warunek wymagany dla klasycznie rozumianej zupełności, tj. z każdej pary zdań sprzecznych jedno jest tezą, np. sprzeczne (obie fałszywe) funkcje zdaniowe p oraz $\sim p$ są przekształcone w zdania $(\bigwedge p)\ p$ oraz $\sim(\bigwedge p)\ p$, z których drugie jest tezą KRZ z kwantyfikatorami. Z kolei aksjomatyczny systemy rachunku zdań Hilberta-Bernaysa oraz negacyjno-implikacyjny system Łukasiewicza (**RI.4) są systemami zupełnymi w sensie Posta, a nie jest takim systemem węższy rachunek predykatów (**RIII.2.1), bo np. wyrażenie: $(\bigvee x)\ A(x) \Rightarrow (\bigwedge x)\ A(x)$ ani nie jest tezą WRP, ani dodane do tez nie daje systemu sprzecznego w sensie określonym w **D10.b2'**.

W dowodach zupełności (niezupełności) systemu są zwykle wykorzystywane pojęcia i twierdzenia dotyczące postaci normalnych (***RI.1.3 i 1.4.2). Najpierw trzeba okazać, że każde wyrażenie zdaniowe systemu jest sprowadzalne do równoważnej z nim postaci normalnej, a następnie, że z każdej pary zdań o postaci normalnej sprzecznych jedno jest tezą (w dowodzie zupełności w sensie klasycznym) albo że każde wyrażenie o postaci normalnej jest tezą systemu lub dołączone do tez daje system sprzeczny w sensie **D10.b2'** (zupełność w sensie Posta)[17].

Dla dowolnych systemów sformułowanych w określonym języku *J* łatwo jest okazać, że:

T18. Jeśli system *Y* jest rozszerzeniem systemu *X* oraz:

a *X* jest systemem zupełnym w sensie klasycznym, to *Y* jest systemem sprzecznym w sensie określonym w **D10.a'**;

b *X* jest systemem zupełnym w sensie Posta, to *Y* jest systemem sprzecznym w sensie określonym w **D10.b2'**.

[17] Szkic dowodu zupełności w sensie Posta dla aksjomatycznego systemu KRZ Hilberta-Bernaysa jest w: L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 349. Wiele uwag (metalogicznych i historycznych) na temat zupełności oraz pełny dowód zupełności tzw. elementarnej teorii nierówności jest w: T. Batóg, *Podstawy logiki*, dz. cyt., s. 218–233.

D o w ó d :
Założenia wspólne dla **T18.a** i **T18.b** to:
1. X, Y są sformułowanymi w języku J systemami;
2. system Y jest rozszerzeniem systemu X.
Z założenia 1. wynika, że
3. $Cn(X) = X$ i $Cn(Y) = Y$ {**W3.a**},
a z założenia 2., że
4. $(Y - X) \neq \emptyset$, tj. istnieje zdanie, nazwijmy je Φ_1: $\Phi_1 \in Y$ i $\Phi_1 \notin X$ {**D5.b**}.

Cd. d o w o d u T18.a:
Zgodnie z założeniem tego twierdzenia:
5. system X jest zupełny w sensie klasycznym;
Jeśli S_X to ogół zdań jezyka, w którym jest sformułowany system X, to 5 znaczy, że:
6. dla każdego zdania $\Phi \in S_X$ jest tak, że: $\Phi \in Cn(X) \vee \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn(X)$ {**D12.a**, 5}.
Ponieważ $\Phi_1 \notin X$ {4}, więc
7. $\ulcorner{\sim}\Phi_1\urcorner \in Cn(X) = X$ {6, 3};
jako że Y jest rozszerzeniem X {2}, więc
8. $\ulcorner{\sim}\Phi_1\urcorner \in Cn(Y) = Y$ {7, 3};
czyli
9. Φ, $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn(Y)$ {4, 8},
co znaczy, że system Y jest sprzeczny w sensie określonym w **D10.a2'**.

Cd. d o w o d u T18.b:
5. system X jest zupełny w sensie Posta {zał.};
6. dla każdego zdania $\Phi \in S_X$ jest tak, że: $\Phi \in Cn(X) \vee Cn(X \cup \{\Phi\}) = S_X$ {5, **D12.b**}.
Ponieważ $\Phi_1 \notin X = Cn(X)$ {4}, więc jest wobec 6 oczywiste, że
7. $Cn(X \cup \{\Phi_1\}) = S_X$ {6};
co znaczy, że
8. system $(X \cup \{\Phi_1\})$ jest sprzeczny w sensie określonym w **D10.b2'**.
Jako że system $(X \cup \{\Phi_1\})$ jest zawarty w systemie Y {4}, więc również system Y jest sprzeczny w sensie określonym w **D10.b2'**. ■

Jeśli pojęcie sprzeczności określone w **D10.a2'** nazwie się klasycznym, a sprzeczność systemu określoną w **D10.b2'** – sprzecznością w sensie Posta, to komentując **T18**, można powiedzieć, że każde rozszerzenie Y danego zupełnego – w sensie klasycznym lub Posta – systemu X niewykraczające poza język J tego systemu jest sprzeczne – w sensie klasycznym lub w sensie Posta. Warto podkreślić, że dla uznania prawidłowości ogłoszonych w **T18** niezbędny jest warunek rozszerzania systemu *X* w obrębie danego języka *J*. Jeśli bowiem dopuści się wzbogacenie również języka danego systemu zupełnego, to można uzyskać jego niesprzeczne rozszerzenia[18]. Dobrym tego przykładem są aksjomatyczne teorie liczb naturalnych: np. arytmetyka Presburgera (w jej języku jest symbol jednego tylko działania, tj. dodawania) oraz arytmetyka Skolema (wyłącznie działanie mnożenia), których rozszerzeniem są niesprzeczne systemy arytmetyki z dodawaniem i mnożeniem[19].

W kontekście **T18.a** jest oczywiste, że dowolny zbiór formuł zdaniowych *X* języka *J* jest zupełny w znaczeniu określonym w **D12.a2** wtedy i tylko, gdy dla dowolnej formuły Φ języka *J* takiej, że $\Phi \notin Cn_L(X)$, zbiór $(X \cup \{\Phi\})$ jest sprzeczny w sensie uściślonym w **D10.a1'**. Inaczej mówiąc, każde rozszerzenie (powiększenie) zupełnego zbioru *X* o formułę, która nie jest jego konsekwencją, daje zbiór wyrażeń sprzeczny[20]. Z drugiej strony wiadomo (**T14**), że jeśli $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \notin Cn_L(X)$, to zbiór $(X \cup \{\Phi\})$ jest niesprzeczny w sensie określonym w **D10.a1**, czyli dowolny niesprzeczny zbiór może być niesprzecznie powiększany o formułę Φ, o ile pośród konsekwencji zbioru *X* nie ma negacji tej formuły. Wniosek ten nasuwa pytanie o granice takiego niesprzecznego rozszerzania, czyli o maksymalne niesprzeczne rozszerzenie danego niesprzecznego zbioru *X* formuł języka *J*.

T19 Jeżeli *X* jest niesprzecznym zbiorem formuł zdaniowych języka *J* (w sensie **D10.a1**), to istnieje w tym języku niesprzeczny i zupełny system *Y*, który jest rozszerzeniem zbioru *X*, tj. $X \subset Y$.

Kluczowe w dowodzie tego twierdzenia jest wskazanie sposobu dobrego uporządkowania formuł języka *J* (w sensie uściślonym w **RIV.2: **D27**),

[18] Warunek nierozszerzania języka jest obecnie sformułowany w nagłówku **T18** (wcześniej był jedynie zakładany), a jest to wynikiem uwzględnienia uwagi J. Woleńskiego, który odnosząc się do wcześniejszej wersji tego twierdzenia, wskazał arytmetykę Presburgera jako (kontr-)przykład systemu zupełnego mającego niesprzeczne rozszerzenie.

[19] Zupełność i rozstrzygalność artmetyki dodawania liczb całkowitych udowodnił M. Presburger w 1929 roku, stosując w dowodzie zupełności zaproponowaną przez siebie metodę eliminacji kwantyfikatorów, która także jest znaczącym wynikiem w badaniach metamatematycznych. Własności wybranych systemów dedukcyjnych są zestawione w ***RIII.2.

[20] Zob. T. Batóg, *Podstawy logiki*, dz. cyt., twierdzenie 7.3, s. 220–221.

czyli sposobu ułożenia tych formuł w taki ciąg, dla którego istnieje skuteczna (efektywna) metoda rozstrzygania, na którym miejscu w danym ciągu (którym jego wyrazem) jest dowolna formuła badanego języka, czyli – wyrażając to w innej terminologii – wskazania efektywneego sposobu wyliczenia, numerowania (enumeracji) wyrażeń języka J. Klasycznym sposobem, zapoczątkowanym przez K. Gödla, jest tzw. arytmetyzacja składni języka J. Polega na tym, że najpierw przyporządkowuje się pewne liczby symbolom podstawowym, tj. ze słownika (alfabetu) danego języka, a następnie podaje się algorytm (wzór, funkcję), którego stosowanie gwarantuje jednoznaczne przypisanie odpowiedniej liczby wyrażeniom złożonym. Chodzi więc o określenie jedno-jednoznacznej funkcji, która odwzorowuje zbiór formuł danego języka w podzbiór zbioru $\mathcal{N}$: każde poprawnie zbudowane wyrażenie języka J ma odpowiadającą mu liczbę, a zbiór wartości tej funkcji, czyli liczby naturalne, wskazują jednoznacznie na daną formułę. Takie jedno-jednoznaczne przyporządkowanie dotyczy wszystkich formuł, od najprostszych, tj. składających się na alfabet języka, do formuł dowolnego rzędu (zob. np. ***RI.1: **D2**, **D3**) – także, co szczególnie ważne dla uzasadniania twierdzeń metalogicznych, dla sformułowanych w danym języku ciągów formuł, czyli dla dowodów, co jest wykorzystywane m.in. w metalogicznych dowodach twierdzeń o własnościach (m.in. o pełności) systemów dedukcyjnych.

Przykładem takiej efektywnej numeracji jest naszkicowana niżej arytmetyzacja języka teorii liczb naturalnych[21]. Pierwszym krokiem tej procedury jest przypisanie liczb naturalnych podstawowym symbolom (tworzącym alfabet) tej teorii:

(	)	$\bigvee$	$\bigwedge$	$\sim$	$\Rightarrow$	$\vee$	$\wedge$	$\Leftrightarrow$	0	S	$<$	$+$	.	P	$=$	x	$\vert$	,
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

W tym zestawie znaków podstawowych 0 jest symbolem stałym oznaczającym liczbę zero (jest nazwą zera), S – odczytywany jako *następnik* – symbolizuje funkcję, której wartością dla dowolnej liczby naturalnej jest liczba o jeden od niej większa, np. $S(0) = 1$, a ogólnie $S(x) = x + 1$, symbol $\vert$ (kreska) służy do różnicowania symbolu predykatowego P i symbolu zmiennej liczbowej x, np. zmienna x_3 jest w tym ujęciu reprezentowana przez $x\vert\vert\vert$.

[21] Przykład jest zaczerpnięty z: A. Grzegorczyk, *Zarys logiki matematycznej*, dz. cyt., s. 392.

Wyrażenia złożone są ciągami wyrażeń podstawowych, np. formuła $x_1 = 0$ jest czterowyrazowym ciągiem znaków, którym w powyższym przyporządkowaniu odpowiadają liczby 17, 18, 16 oraz 10; a formuła $P(x, x) < 0$, jest ciągiem symboli podstawowych ośmiowyrazowym, którego kolejne wyrazy są wskazane liczbami 15, 1, 17, 19, 17, 2, 12 oraz 10.

Przypisywanie liczb formułom złożonym jest kierowane następującym algorytmem: wylicz liczbę, która jest iloczynem kolejnych liczb pierwszych – tj. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ... – podniesionych do potęgi równej liczbie naturalnej przypisanej danemu symbolowi podstawowemu w powyższej tabeli, a przy tym iloczyn ten ma tyle czynników, ile jest wyrazów w ciągu reprezentującym daną formułę, Wartością tak określonej funkcji N jest dla formuły:

$x_1 = 0$ iloczyn $2^{17} \cdot 3^{18} \cdot 5^{16} \cdot 7^{10}$,

a $N(P(x, x) < 0) = 2^{15} \cdot 3^{1} \cdot 5^{17} \cdot 7^{19} \cdot 11^{17} \cdot 13^{2} \cdot 17^{12} \cdot 19^{10}$.

Jedno-jednoznaczne przyporządkowanie formuł liczbom naturalnym daje podstawę reprezentowania formuł, relacji w zbiorze formuł i własności tego zbioru liczbami, relacjami między liczbami i własnościami podzbioru liczb naturalnych będącego N obrazem zbioru formuł w zbiorze $\boldsymbol{\mathcal{N}}$[22].

Innym, prostszym sposobem wzajemnie jednoznacznego przypisania formułom badanego systemu liczb naturalnych jest arytmetyzacja języka klasycznego rachunku zdań, którego słownik (alfabet) składa się z sześciu symboli: znak „prim" służy do różnicowania (tworzenia nazw) zmiennych zdaniowych p', p'', p''', ..., nawiasy pełnią funkcje symboli pomocniczych, a $\sim$ oraz $\Rightarrow$ są jedynymi stałymi logicznymi (symbole spójników prawdziwościowych). Znaki te są następująco reprezentowane liczbami:

p	‘	$\sim$	$\Rightarrow$	(	)
10	100	1000	10000	100000	1000000

Formułom złożonym z tych symboli są jednoznacznie przypisywane liczby naturalne, które są oznaczane przez ciągi cyfr jeden i zero otrzymane w wyniku zestawienia liczb przyporządkowanych symbolom

[22] Są do tego niezbędne dalsze kroki metody arytmetyzacji składni, dostosowane do działań wykonywanych w systemie na wyrażeniach – zob. tamże, s. 392–399, gdzie jest też zarysowany alternatywny sposób – nawiązujący do A. Tarskiego teorii konkatenacji – reprezentowania w metalogice formuł systemów logicznych.

podstawowym w kolejności, w której symbole te występują w danej formule. Napis uzyskany zgodnie z tym algorytmem jest w rozwijanej tu reprezentacji nazwą (liczebnikiem, numerałem) liczby, która jest przypisywana danej formule.

Oznaczając funkcję zgodną z tym przepisem przez L można na przykład ogłosić, że:

$L(p') = 10100$,

$L(\sim p') = 1000010100$,

a numerałem dla formuły $\sim(p' \Rightarrow \sim p'')$ jest:

10001000000101001000010001010010010000000.

Jak widać, na długość formuły, tj. liczbę składowych jej symboli podstawowych wskazuje liczba jedynek w uzyskanym numerale (odpowiednik ilości początkowych liczb branych z ciągu liczb pierwszych zgodnie z algorytmem opisanym w przykładzie pierwszym).

Każdej formule odpowiada dokładnie jeden numerał i odwrotnie, każdy numerał wskazuje jednoznacznie na odpowiadającą mu formułę tego systemu. Liczby przypisane wzajemnie jednoznacznie formułom – niezależnie od zastosowanego, lecz jedno-jednoznacznego przyporządkowania – uporządkowane według wielkości, wyznaczają dobre uporządkowanie zbioru formuł badanego systemu, co pozwala mówić o jego formule pierwszej, drugiej, trzeciej, ...

Zastosowanie opisanych wyżej, przykładowych metod reprezentowania formuł do jezyków formalnych używanych w praktyce (logiki i matematyki) wymaga wprowadzenia pewnych umów umożliwiających jednoznaczne przypisanie formułom liczb, umów, które utrudniłyby zapisywanie formuł w danym języku i wykonywanie na nich operacji. Dlatego na przykład w językach przedmiotowych systemów logiki i matematyki są zwykle używane: jako zmienne zdaniowe litery p, q, r, ..., a nie symbole p', p'', p''', ... – stosowane w opisie metalogicznym; zmienne nazwowe to x, y, z ..., a nie $x|$, $x||$, $x|||$, ...; stałe indywiduowe to a, b, c, ...; predykaty są symbolizowane literami P, Q, R, ..., funkcje znakami f, g, h, ... lub F, G, H, ... a nie $P|$, $P||$, ..., $F|$, $F||$ oraz są zwykle pomijane składniki wskazujące na liczbę argumentów predykatu lub funkcji (w kontekście całego napisu jest to wiadome). Dlatego na przykład w równościach takich, jak $f(x, y) = z$, jest prosty symbol f zamiast metajęzykowego symbolu złożonego $F^{**}|$, w którym gwiazdki wskazują na liczbę argumentów, a kreski identyfikują dany symbol spośród przeliczalnie wielu symboli funkcyjnych $F|$, $F||$, ... Ponadto są w językach przedmiotowych przyjmowane inne umowy upraszczające zapisy, np. umowy co do siły wiązania funktorów, umożliwiające pomijanie nawiasów wskazujących na argumenty funktora, lub umowy co do sposobu zapisywania zmiennych wiązanych kwantyfikatorem.

Naszkicowana niżej metoda jednoznacznego reprezentowania i dobrego uporządkowania zbioru wyrażeń badanego systemu jest celowo bliska sposobowi zapisu formuł stosowanemu w logice[23]. Punktem wyjścia jest liniowe uporządkowanie symboli podstawowych języka *J* badanego systemu; ponieważ także przecinek należy do symboli słownika, dlatego symbole w poniższym ciągu (J) nie są nim oddzielone (użyte standardowo wielokropek i średnik nie należą do słownika języka *J*):

(J) $\sim \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$ ...; $\bigwedge \bigvee$ ...; , ( ) [ ] ...; $p\ x\ a$; $P\ F$ = ...; * | ...

Jak widać, grupa symboli spójników prawdziwościowych poprzedza w (J) grupy: kwantyfikatorów, wewnątrzjęzykowych symboli pomocniczych, symboli zmiennych i stałych indywiduowych; rozmaitych relacji itd. Trzeba to rozumieć tak, że każdy symbol spójnika poprzedza dowolny symbol pozostałych grup, a uporządkowanie w poszczególnych grupach jest wskazane podanym wyliczeniem; wielokropki sugerują, że uporządkowanie może być uzupełnione np. o kolejne symbole spójników prawdziwościowych (/, $\Downarrow$, $\underline{\vee}$), kwantyfikatory ($\bigvee_1$, $\bigvee_n$) lub inne operatory itd. Pośród uporządkowanych wyżej elementów słownika języka *J* są upraszczające opis metalogiczny znaki * oraz |, stosowanie tych znaków pozwala bowiem, jak była o tym mowa, w jednolity sposób reprezentować rozmaite symbole stałe i zmienne używane w badanym systemie. Usunięcie ich z zasobu podstawowego wymaga wprowadzenia do definicji relacji porządkującej zbiór formuł dodatkowych warunków, pozwalających dobrze uporządkować zbiór formuł języka *J*. Chodzi tu np. o warunki takie, jak: o kolejności symboli literowych decyduje ich miejsce w alfabecie (łacińskim, greckim, hebrajskim itd.), z którego są czerpane litery; symbole bez wskaźników (proste) poprzedzają symbole ze wskaźnikami, np. *p* poprzedza *p*' i poprzedza p_1; wcześniejsze są: symbole o wskaźnikach mniej złożonych (np. *p*' poprzedza *p*''), o mniejszych wskaźnikach liczbowych (p_1 przed p_2) lub alfabetycznie wcześniejszych wskaźnikach literowych (x_i przed x_j); o kolejności symboli rozstrzyga najpierw wskaźnik dolny

[23] Propozycja ta jest zasadniczo zgodna z metodą uporządkowania „alfabetycznego" opisaną w: T. Batóg, *Podstawy logiki*, dz. cyt., s. 221–222.

(np. P_1” przed P_2’, P_i’ przed P_i”). Porównując formuły złożone, trzeba zestawiać ich kolejne symbole składowe aż do pierwszego różnicującego, tj. wskazującego na kolejność w uporządkowaniu (często już pierwszy pozwala to rozstrzygnąć), a jeśli takie porównywanie wyczerpie ciąg symboli jednego z wyrażeń i nie rozstrzyga o ich kolejności, wtedy wyrażenie o większej liczbie symboli składowych jest późniejsze (nieróżnicujące wyczerpanie obu zasobów jest możliwe tylko dla formuł identycznych)[24].

Nie siląc się na próbę wyczerpującego sformułowania takich reguł, które zależą od opisywanego języka *J* i tego, w jakim stopniu chce się zachować w metalogice jego stosowany w praktyce słownik, wystarczy tu stwierdzić, że definicja relacji *R* porządkujących ogół formuł języka *J* musi być taka, by w przypadku dowolnych dwóch porównywanych jego formuł dało się rozstrzygnąć, która z nich jest wcześniejsza, a mówiąc dokładniej – relacja ta musi być w danym zbiorze formuł spójna, antysymetryczna i przechodnia.

Na przykład w kontekście uporządkowania zainicjowanego ciągiem (J) (bez symboli * i |) oraz sformułowanych warunków dodatkowych można ustalić, że formuły:

(i) p
(ii) $p \vee \sim p$
(iii) $\sim(p \wedge \sim p)$
(iv) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Leftrightarrow \sim p)$
(v) $(\bigwedge x)\ [p \vee A(x)] \Leftrightarrow (p \vee (\bigwedge x)\ A(x))$
(vi) $\sim(\bigvee x)\ A(x) \Leftrightarrow (\bigwedge x) \sim A(x)$
(vii) $(\bigwedge x)\ [P_1(x) \Leftrightarrow P_2(x)] \Rightarrow ((\bigvee_1 x)\ P_1(x) \Leftrightarrow (\bigvee_1 x)\ P_2(x))$
(viii) $(\bigvee y)\ y = x$
(ix) $(\bigvee y)\ y = x \wedge (\bigwedge y, z)\ [(y = x \wedge z = x) \Rightarrow y = z]$
(x) $(\bigwedge x)\ [(\bigvee y)\ y = x \wedge (\bigwedge y, z)\ [(y = x \wedge z = x) \Rightarrow y = z]]$
(xi) $(\bigwedge x)\ [P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \Rightarrow ((\bigvee_1 x)\ P(x) \Leftrightarrow (\bigvee_1 x)\ Q(x))$

są uporządkowane w kolejności: (vi), (iii), (x), (v), (xi), (vii), (viii), (ix), (i), (ii).

Formuły (vi) i (iii) są wcześniejsze od pozostałych, bo ich pierwszym znakiem składowym jest symbol ~ z pierwszej grupy symboli słownika, a (vi) wyprzedza (iii), bo na trzecim miejscu (miejsce drugie nie różnicuje)

[24] Opisywane tu uporządkowanie prowadzi do efektywnej enumeracji, a nie wymaga dodatkowego dzielenia wyrażeń na klasy wedle ich długości, tj. liczby ich symboli składowych (por. T. Batóg, *Podstawy logiki*, dz. cyt., s. 222.)

jest w tej formule symbol kwantyfikatora, wyprzedzający w uporządkowaniu wyjściowym symbol p. Z kolei formuły rozpoczynające się od symbolu nawiasu zwykłego zw. lewym (otwierającego) poprzedzają formuły (i) i (ii), w których jako pierwszy jest symbol p, późniejszy niż nawiasy w uporządkowaniu wyjściowym. W grupie wyrażeń rozpoczynających się od nawiasu każda z formuł (v), (vii), (x) i (xi) poprzedza wyrażenia (viii) i (ix), bo na drugim miejscu jest w tych pierwszych kwantyfikator ogólny, a w tych drugich szczegółowy. Natomiast formuły (v), (vii), (x) i (xi), choć nierozróżnialne na miejscach 1–5 – zajmowanych przez identyczny dla tych formuł człon $(\bigwedge x)$ [– można wyliczyć w wyżej wskazanej kolejności, ponieważ w (x) jest na miejscu szóstym nawias, wcześniejszy od symbolu p zajmującego to miejsce w formule (v), który z kolei jest wcześniejszy od symbolu predykatowego widocznego na tym miejscu w formułach (vii) i (xi), z których ta ostatnia jest wcześniejsza, ponieważ użyty w niej symbol P poprzedza, jako symbol bez wskaźników, symbol P_1. Z kolei formuła (viii) w opisanym uporządkowaniu poprzedza ciąg symboli (ix), ponieważ ma mniej symboli składowych, a porównywanie tych formuł na miejscach 1–7 nie różnicuje i wyczerpuje pierwszą z nich. Z tego samego powodu wcześniejsza od wyrażenia (ii) jest formuła (i).

Zbiór formuł uporządkowany relacją spójną, antysymetryczną i przechodnią jest uporządkowany liniowo (zob. **RIV.2: **D21.a)**; ponadto w każdym podzbiorze zbioru formuł jest element pierwszy, czyli zbiór ten jest uporządkowany dobrze (w znaczeniu określonym w **RIV.2: **D27**). Opisana metoda, choć nie polega na wzajemnie jednoznacznym przypisywaniu formułom liczb naturalnych, a wobec tego nie porządkuje zbioru formuł wedle wielkości przypisanych formułom liczb, to pozwala mówić o dobrym uporządkowaniu zbioru formuł, co również daje podstawę, by w dowodach twierdzeń dotyczących tego zbioru przyjąć, że jest w nim formuła pierwsza, druga, trzecia itd, czyli że da się je efektywnie wyliczyć. Skoro istnieje, takie jak naszkicowane wyżej, wyliczenie $\boldsymbol{N}$ wszystkich formuł danego języka, to da się także uporządkować dobrze, czyli ułożyć w ciąg wszystkie jego formuły będące zdaniami.

D o w ó d T19:

1. X jest dowolnym niesprzecznym zbiorem formuł zdaniowych języka J {zał.}.

Na podstawie powyższych ustaleń, przyjmijmy, że:

2a. Efektywna enumeracja $\boldsymbol{N}$ ustawia formuły języka J w ciąg $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$

2b. Pochodna względem $\boldsymbol{N}$ enumeracja $\boldsymbol{N'}$ polega na tym, że po pominięciu w ciągu $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, ...\}$ formuł zbioru X niebędących zdaniami (formuł otwartych) wylicza się pozostałe w nim zdania w kolejności ich wskaźników w ciągu wyjściowym.
Niech:
3a. $\{Y_i: i \in \mathcal{N}\}$ jest ciągiem nieskończonym takim, że:
(i) $Y_1 = X$
(ii) jeśli Φ_i jest i-tą formułą w uporządkowaniu $\boldsymbol{N}$, to
$Y_{i+1} = Y_i \cup \{\Phi_i\}$, o ile $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \notin Cn_L(Y_i)$
albo
$Y_{i+1} = Y_i$, o ile $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_L(Y_i)$; {def.}
3b. $Y = Cn_L(\bigcup Y_i, i = 1, ..., \infty)$ {def.}.
Zgodnie z indukcyjną definicją 3a, jeśli do początkowego zbioru $Y_1 = X$ można niesprzecznie włączyć formułę pierwszą w uporządkowaniu $\boldsymbol{N}$, to $Y_2 = Y_1 \cup \{\Phi_1\}$, a jeśli nie można, wtedy $Y_2 = Y_1$; te same warunki wyznaczają zbiór Y_3, a ogólnie zbiór Y_{i+1} dla dowolnego $i = 1, ..., \infty$. W definicji 3b systemu Y suma $\bigcup Y_i$, $i = 1, ..., \infty$ jest rozumiana zgodnie z **RIV.1: **D6.a3**.
Da się okazać, że Y jest systemem (a) niesprzecznym), (b) zupełnym) oraz że (c) $X \subset Y$.
Ad (a) Zdefiniowany w 3a sposób konstruowania ciągu $\{Y_i: i \in \mathcal{N}\}$ gwarantuje, że wszystkie jego wyrazy są niesprzecznymi zbiorami formuł. Zbiór Y_1 jest identyczny z niesprzecznym zbiorem X, a jeśli jest niesprzeczny zbiór Y_i {zał. ind.}, to niesprzeczny jest także zbiór Y_{i+1}, bo jest on albo identyczny z Y_i, albo – o ile zdanie $\ulcorner{\sim}\ \Phi\urcorner \notin Y_i$ – jest zbiorem $(Y_i \cup \{\Phi_i\})$, który również – zgodnie z **T14** – jest niesprzeczny. Zatem:
4. Każdy zbiór formuł ciągu $\{Y_i: i \in \mathcal{N}\}$ jest niesprzeczny w sensie zgodnym z **D10.a1**.
Ponieważ jest w kontekście 3a oczywiste, że ciąg $\{Y_i: i \in \mathcal{N}\}$ jest wstępujący, tzn.
5. $Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3 \subset ... \subset Y_i \subset ...$,
więc na podstawie **W5.2** można uznać, że:
6. Suma $\bigcup Y_i$, $i = 1, ..., \infty$ jest zbiorem niesprzecznym (w tym samym sensie).
Zatem system $Y = Cn_L(\bigcup Y_i, i = 1, ..., \infty)$ jest niesprzeczny {6, **T13**}.
Ad (b) Trzeba okazać, że dla każdego zdania Φ tego języka:
$\Phi \in Cn_L(Y) \vee \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_L(Y)$.

Dowolne zdanie Φ języka J zajmuje określone miejsce w uporządkowaniu $\boldsymbol{N'}$ zdań tego języka, a tym samym określone miejsce i w szeregu formuł $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots$ ułożonym wedle enumeracji $\boldsymbol{N}$. Określone w 3a zasady niesprzecznego dołączania formuł dotyczą więc także zdania Φ. Mianowicie: jeśli $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \notin Cn_L(Y_i)$, to $\Phi \in Y_{i+1} = Y_i \cup \{\Phi_i\}$, czyli jest także elementem sumy $\bigcup Y_i$, $i = 1, \ldots, \infty$), zbioru $Y = Cn_L(\bigcup Y_i, i = 1, \ldots, \infty)$ oraz $Cn_L(Y)$ {**T1'**}; jeśli natomiast $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_L(Y_i)$, to jest również elementem sumy
$\bigcup Y_i$, $i = 1, \ldots, \infty$), zbioru Y oraz zbioru $Cn_L(Y)$.
Dla dowolnego zdania Φ tego języka jest więc tak, że:
$\Phi \in Cn_L(Y) \vee \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_L(Y)$.
Ad (c) Ponieważ każdy ze zbiorów ciągu $\{Y_i: i \in \boldsymbol{N}\}$ jest zawarty sumie
$\bigcup Y_i$, $i = 1, \ldots, \infty$ {**RIV.1: **T11**}, a suma ta jest zawarta w
$Cn_L(\bigcup Y_i, i = 1, \ldots, \infty)$ {**T1'**}, więc
$X = Y_1 \subset Cn_L(\bigcup Y_i, i = 1, \ldots, \infty) = Y$ {3a, 3b}.■

Zgodnie z **T19** można głosić, że każdy niesprzeczny zbiór formuł ma niesprzeczne i zupełne (maksymalne) rozszerzenie, co znaczy także, że każdą niesprzeczną teorię logiki klasycznej da się rozszerzyć do niesprzecznej teorii zupełnej. Twierdzenie to, udowodnione przez A. Lindenbauma, jest wykorzystywane jako pomocnicze w dowodach wielu ważnych twierdzeń metalogicznych (dlatego jest zwane lematem)[25].

2.4.3 Rozstrzygalność

Ścisła definicja rozstrzygalności jest oparta na pojęciu obliczalności: system jest rozstrzygalny wtedy i tylko, gdy zbiór jego tez jest obliczalny[26]. Inaczej mówiąc, system jest rozstrzygalny, gdy zbiór jego tez jest rekurencyjny, co znaczy, że o dowolnej formule zdaniowej z języka danego

---

[25] Zob. *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, red. W. Marciszewski, Warszawa 1987, s 135; W.A. Pogorzelski, *Klasyczny rachunek zdań...*, dz. cyt., s. 105–111; biogram naukowy A. Lindenbauma – zob. J. Woleński, *Lindenbaum, Adolf*, w: A. Dąbrowski, M. Hoły-Łuczaj, A. Schumann i in., *Leksykon logików polskich 1900–1939*, Kraków–Rzeszów 2022, s. 203–208. Rolę analogiczną do **T19**, wykorzystywanego w dowodach twierdzeń o istnieniu rozszerzeń dla systemów finitystycznych, odgrywa w kontekstach (sytuacjach, rozumowaniach) ogólniejszych, tj. obejmujących zbiory nieskończone nieprzeliczalne, lemat Kuratowskiego, uogólniony do twierdzenia zwanego lematem Kuratowwskiego-Zorna (zob. **RIV.2.3.4: **T21**).

[26] Zob. L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 349, D19.

systemu da się skutecznie rozstrzygnąć, czy jest elementem tego zbioru. Ponieważ pojęcie obliczalności zostało wyżej określone tylko intuicyjnie (w uwagach do pojęcia systemu dedukcyjnego i aksjomatyki), a pojęcie rekurencyjności zbioru jedynie w ostatnim zdaniu, więc bardziej jest w kontekście dotychczasowych ustaleń zrozumiałe twierdzenie, że rozstrzygalność znaczy, że istnieje skuteczna (tj. w skończonej liczbie kroków) metoda rozstrzygania o każdym wyrażeniu zapisanym w języku danego systemu (teorii), czy jest ono jego tezą[27].

D13.a System *X* jest rozstrzygalny wtedy i tylko, gdy dla dowolnej formuły zapisanej w języku tego systemu istnieje skuteczny sposób (algorytm) ustalania, czy formuła Φ jest tezą systemu X, tj. czy $\Phi \in Cn(X)$.

Oprócz pojęcia systemu rozstrzygalnego vs nierozstrzygalnego, jest w metalogice stosowane pojęcie systemu istotnie nierozstrzygalnego.

D13.b System *X* jest istotnie nierozstrzygalny wtedy i tylko, gdy *X* jest nierozstrzygalny i każde jego niesprzeczne rozszerzenie jest nierozstrzygalne[28].

Rozszerzenie systemu jest w powyższej definicji rozumiane zgodnie z ***RI.2: **D5.b**, a niesprzeczność w sensie zgodnym z ***RI.2: **D10.a2** lub **D10.b2** (na gruncie teorii ze znakiem negacji oba te pojęcia są równoważne).

Przykładem metody zapewniającej rozstrzygalność jest sprawdzanie zero-jedynkowe wyrażeń KRZ, rozstrzygalny jest także fragment WRP, tzn. węższy jednoargumentowy rachunek predykatów, natomiast systemami nierozstrzygalnymi są np. WRP i G. Peana aksjomatyczny system arytmetyki liczb naturalnych z działaniami dodawania i mnożenia, choć podsystemy tego ostatniego systemu są rozstrzygalne[29]. W dowodach

[27] Pojęcia definicji i funkcji rekurencyjnych (indukcyjnych) były już wzmiankowane (odpowiednio w *RVII.1.3 i **RIV.2.3.1), uściślenie pojęcia obliczalności pojęciem funkcji rekurencyjnej zostanie omówione w ***RIII.1.

[28] Pojęcie istotnej nierozstrzygalności pochodzi od A. Tarskiego, który udowodnił także twierdzenia dotyczące warunków wystarczających nierozstrzygalności, wykorzystane w okazywaniu rozstrzygalności vs nierozstrzygalności wielu teorii.

[29] Dokładniej: rozstrzygalna jest arytmetyka liczb naturalnych wyłącznie z działaniem dodawania (M. Presburger), wyłącznie z działaniem mnożenia (T. Skolem), z oboma tymi działaniami i nazwami indywiduowymi dla każdej liczby naturalnej, lecz

rozstrzygalności korzystających z definicji i twierdzeń dotyczących postaci normalnych wykazuje się, że wyrażenia zapisane w języku danego systemu są sprowadzalne do równoważnych z nimi postaci normalnych oraz że jest metoda rozstrzygania, czy wyrażenia postaci normalnej są tezami danego systemu. W dowodach nierozstrzygalności są stosowane m.in. pojęcia i twierdzenia dotyczące interpretacji syntaktycznej, pozwalające orzekać nierozstrzygalność danego systemu na podstawie jego związków interpretacyjnych z innym systemem nierozstrzygalnym.

Prostym przykładem ilustrującym te ogólne uwagi jest możliwość wykorzystania pojęcia postaci normalnych – koniunkcyjnej (***RI.1.3: **D5**) i alternatywnej (***RI.1.3: **D6**) – oraz twierdzeń mówiących o sprowadzalności wyrażeń KRZ do postaci normalnej – koniunkcyjnej lub alternatywnej (***RI.1.4) w strukturalnej i ogólnej metodzie rozstrzygania, czy wyrażenie jest tezą KRZ: strukturalnej, tj. odwołującej się wyłącznie do budowy wyrażeń, a ogólnej, tzn. pozwalającej rozstrzygnąć o dowolnej formule. Metoda ta jest oparta na tym, że każda tautologia jest tezą KRZ (pojęcia tautologii KRZ i tezy KRZ są równozakresowe) oraz że metoda zero-jedynkowa jest ogólną metodą sprawdzania tautologiczności. Jak wiadomo, każda formuła KRZ jest sprowadzalna do równoważnej z nią koniunkcyjnej postaci normalnej {***RI.1.4: **T4.1**}. Można łatwo okazać, że są prawdziwe następujące twierdzenia:

T20.a Alternatywa elementarna jest tautologią KRZ wtedy i tylko, gdy spośród użytych w niej symboli zmiennych zdaniowych co najmniej jeden występuje i bez znaku negacji, i z negacją.

T20.b Formuła o koniunkcyjnej postaci normalnej jest tautologią KRZ wtedy i tylko, gdy tautologią jest każda z jej alternatyw elementarnych.

Dowód T20.a:
Jak wiadomo, alternatywa elementarna to *n*-członowa ($n \geq 1$) alternatywa zmiennych lub ich negacji {***RI.1.3: **D5.a**}.

---

bez ogólnego pojęcia liczby naturalnej (A. Tarski). Nierozstrzygalność WRP okazał A. Church (zob. ***RIII.1), a twierdzenie o nierozstrzygalności arytmetyki G. Peana udowodnił K. Gödel; nierozstrzygalna jest także np. teoria liczb wymiernych z działaniami dodawania i mnożenia (J. Robinson) i teoria mnogości Zermela-Fraenkla; rozstrzygalna jest elementarna teoria liczb rzeczywistych i elementarna geometria euklidesowa (A. Tarski).

$\boxed{\rightarrow}$

Gdyby w formule o tej postaci

1.1 żadna ze zmiennych nie występowała i bez, i ze znakiem negacji (zd.), wtedy

1.2 istniałoby wartościowanie tej formuły, w którym końcowa wartość = 0, mianowicie wartościowanie, w którym za zmienne bez negacji podstawia się 0, a za zmienne zanegowane 1.

Zatem:

1. Jeżeli żadna ze zmiennych nie występuje i bez, i ze znakiem negacji, to alternatywa elementarna nie jest tautologią KRZ,

czyli:

jeżeli alternatywa elementarna jest tautologią KRZ, to co najmniej jedna zmienna występuje i bez, i ze znakiem negacji {**TR**: 1}.

$\boxed{\leftarrow}$

Jeśli w alternatywie elementarnej jest co najmniej jedna zmienna i bez, i ze znakiem negacji, to w każdym wartościowaniu wartość końcowa = 1, czyli jest tautologią KRZ.

D o w ó d T20.b:

Ponieważ koniunkcyjna postać normalna to *n*-członowa ($n \geq 1$) koniunkcja alternatyw elementarnych {**D5.b**}, więc jeśli jest ona tautologią, to każdy z jej członów, czyli każda z jej alternatyw składowych ma wartość 1, czyli jest tautologią; i odwrotnie. ■

Korzystając z tych twierdzeń, można o dowolnym wyrażeniu KRZ rozstrzygnąć, czy jest tezą, sprawdzając jego budowę pod kątem występowania w każdej ze składowych alternatyw elementarnych jego koniunkcyjnej postaci normalnej co najmniej jednej zmiennej bez oraz ze znakiem negacji.

Analogiczne jest rozumowanie okazujące rozstrzygalność KRZ, rozumowanie, w którym korzysta się z pojęcia alternatywnej postaci normalnej, twierdzenia o sprowadzalności dowolnego wyrażenia KRZ do takiej postaci {***RI.1.4: **T4.2**} oraz twierdzenia dostarczającego kryterium pozwalającego w przypadku dowolnego wyrażenia KRZ rozstrzygnąć, czy jest ono tezą KRZ – rozstrzygnąć na podstawie budowy równoważnej z nim alternatywnej postaci normalnej.

Uogólnieniem metody zero-jedynkowej, stosowanej dla rozstrzygania o tautologiczności wyrażeń KRZ, jest tzw. metoda matrycowa. Terminy „metoda tabelkowa” i „metoda matrycowa” były już stosowane w omówieniach sprawdzania zero-jedynkowego (**RI.2), w stronę tego uogólnienia szły już także uwagi do logiki wielowartościowej (**RII.1) i stosowana w nich terminologia i symbolika. Podstawowe dla ich uściślenia jest pojęcie matrycy logicznej.

D14. **a** Matrycą logiczną jest układ $<A, W; \boldsymbol{F}>$, w którym A to zbiór wartości matrycy, $W \subset A$ jest zbiorem wartości wyróżnionych, a $\boldsymbol{F} = \{f_1, ..., f_k\}$ to funkcje matrycy, których argumenty i wartości należą do zbioru A.

b Wartościowaniem w matrycy $<A, W; \boldsymbol{F}>$ jest każda funkcja, która odwzorowuje zbiór zmiennych zdaniowych w zbiór wartości A.

Na wartościowość matrycy i opartego na niej rachunku wskazuje liczność zbioru wartości A. W rachunkach klasycznych $\|A\| = 2$, w L_3 (***RII.1) $\|A\| = 3$, a przy tym i w rachunkach klasycznych, i w L_3 jedyną wartością wyróżnioną jest 1. Mogą być definiowane dowolne matryce, choć zwykle są badane matryce o zbiorze wartości skończonym lub mocy $\aleph_0$. Na przykład Łukasiewicz od klasycznych matryc $\|A\| = 2$ przeszedł najpierw do badania rachunku opartego na matrycy o zbiorze wartości $\|A\| = 3$, a następnie przedstawił rachunki oparte na matrycach z $\|A\| = n$, $n \in \mathcal{N}$, uogólnione ostatecznie do rachunku $L_{\aleph_0}$ ($\|A\| = \aleph_0$). Jak wiemy (**RII.1), zarówno zbiór wartości A, jak i funkcje matrycy mogą być określone nie tylko w tabelach (macierzach), lecz także wzorami. Na przykład w rachunku n wartościowym ($n \geq 2$) zbiór wartości A_n jest identyczny z $\{w_i\colon w_i = k_i/n - 1, 0 \leq k_i \leq n - 1\} = \{0, 1/n - 1, 2/n - 1, ...\}$, a funkcje prawdziwościowe są określone wzorami: $\sim p = 1 - p$; $\wedge(p, q) = \min(p, q)$; $\vee(p, q) = \max(p, q)$; $\Rightarrow(p, q) = 1$, gdy $p \leq q$ oraz jest równe $(1 - p + q)$, gdy $p > q$; $\Leftrightarrow(p, q) = \min(\min(1, 1 - p + q), \min(1, 1 - q + p))$ – w których „min” oznacza najmniejszą, a „max” największą spośród wartości przypisanych w danym wartościowaniu zmiennym p oraz q.

Pojęcie wartościowania było już stosowane w kontekście pojęcia tautologii KRZ i metody zero-jedynkowej (**RI.2), a także w uwagach do logik wielowartościowych (**RII.1). W **D14.b** pojęcie to jest uogólnione na matryce (rachunki) o dowolnej liczności zbioru wartości logicznych oraz uściślone za pomocą pojęcia odwzorowania danego zbioru w inny. Jak pamiętamy (**RIV.2.3.1) napis $f\colon A \to B$ znaczy, że funkcja f jest określona na elementach zbioru A, tj. $A = D_{\mathrm{I}}(f)$, a jej wartościami są elementy zbioru B, przy czym jeśli $D_{\mathrm{II}}(f) \subset B$, to mówimy, że f przekształca zbiór A w zbiór B ($f\colon A \to_{\mathrm{w}} B$) , a jeśli $D_{\mathrm{II}}(f) = B$, wtedy f przekształca zbior A na zbiór B ($f\colon A \to_{\mathrm{na}} B$). W **D14.b** jest mowa o odwzorowaniu zbioru zmiennych zdaniowych w zbiór wartości, bo są, jak wiemy, wartościowania dla zmiennych w danej formule, które nie wyczerpują zbioru wartości *A*.

W uwagach do definicji funktorów prawdziwościowych (**RI.1.2.2) było wyjaśnienie, dlaczego w wyliczaniu liczby wartościowań dla danej formuły i liczby funktorów prawdziwościowych są do zastosowania znane z kombinatoryki wzory określające liczbę wariacji z powtórzeniami (wariacji o określonej liczbie wyrazów, tworzonych z zestawu o określonej liczbie elementów). Stosując te znane ustalenia do uogólnionych pojęć matrycy i wartościowania, można powiedzieć, że liczba wartościowań danej formuły o *n* występujących w niej zmiennych zdaniowych jest określona wzorem $\|A\|^n$, który w przypadku logiki klasycznej konkretyzuje się do 2^n, w logice trójwartościowej do 3^n itd. Wzór $\|A\|^n$ określa także liczbę funktorów prawdziwościowych *n*-argumentowych. W logice dwuwartościowej funktorów jednoargumentowych jest 2^k, a ponieważ k to liczba wartościowań dla jednego argumentu, tj. $k = 2^1$, więc w rachunku dwuwartościowym są cztery prawdziwościowe funktory jednoargumentowe, dwuargumentowych jest 16 (2^k, $k = 2^2$), trójargumentowych jest 256 (2^k, $k = 2^3$) itd.; w logice trójwartościowej jednoargumentowych jest 27 (3^k, $k = 3^1$), dwuargumentowych 19683 (3^k, $k = 3^2$) itd.

W terminologii stosowanej obecnie można powiedzieć, że budowanie rachunku zdaniowego metodą matrycową polega na przyporządkowaniu funkcji z matrycy $<A, W; \boldsymbol{F}>$ funktorom prawdziwościowym danego rachunku. Na przykład w KRZ funkcja $f_\sim \in \boldsymbol{F}$, taka, że: $f_\sim(1) = 0$, $f_\sim(0) = 1$, tj. $f_\sim = \{<1, 0>, <0, 1>\}$ definiuje w matrycy $<\{1, 0\}, \{1\}, \boldsymbol{F}>$ funktor negacji; funkcja $f_\wedge$: $f_\wedge(1, 1) = 1$, $f_\wedge(1, 0) = 0$, $f_\wedge(0, 1) = 0$ i $f_\wedge(0, 0) = 0$, tj. $f_\wedge = \{<(1, 1), 1>, <(1, 0), 0>, <0, 1), 0>, <0, 0), 0>\}$ jest przyporządkowana koniunkcji; $f_\Rightarrow = \{<(1, 1), 1 >, <(1, 0), 0>, <(0, 1), 1>, <(0, 0), 1>\}$ definiuje implikację itd.

Zgodne ze znanymi ustaleniami jest także ogólniejsze określenie tautologii.

D15. **a** Tautologią matrycy logicznej $<A, W; \boldsymbol{F}>$ w określonym przyporządkowaniu funkcji z klasy $\boldsymbol{F}$ funktorom rachunku zdań jest formuła zdaniowa, która dla każdego wartościowania przyjmuje wartość wyróżnioną tej matrycy, wyliczoną zgodnie z funkcjami definiującymi w danym przyporządkowaniu funktory występujące w tej formule.

b Matryca logiczna M jest przy określonym przyporządkowaniu jej funkcji funktorom rachunku zdań R adekwatna względem tego rachunku wtedy i tylko, gdy zbiór tez rachunku R jest identyczny ze zbiorem tautologii matrycy M przy tym przyporządkowaniu.

c Rachunek zdań R jest n-wartościowy wtedy i tylko, gdy n jest najmniejszą liczbą taką, że istnieje n-wartościowa matryca logiczna M adekwatna względem rachunku R.

Pod **D15.a** podpada sformułowane wcześniej określenie tautologii KRZ (**RI.2.1: **D1**). W obecnej definicji są użyte uogólnione i uściślone pojęcia wartościowania i matrycy, dopuszczające więcej wartości logicznych, więcej wartości wyróżnionych oraz definicje funktorów (przyporządkowanie funkcji matrycy funktorom) inne niż określone wcześniej dla KRZ (**RI.1.2.2: **D3.a'**, **D3.b'**). Tautologie danej matrycy są także nazywane jej wyrażeniami prawdziwymi, co również zgodne z wcześniejszymi uwagami co do zakresu orzekania prawdy (*RIII.1.1) oraz do pojęcia tautologii (**RI.2.1), choć gdy chce się podkreślić, że bycie tautologią jest własnością syntaktyczną, lepiej mówić o przyjmowaniu wartości wyróżnionej w danej matrycy.

Możliwość rozmaitych przyporządkowań funkcji matrycy funktorom rachunku, a tym bardziej konstruowania różnych matryc dla danego rachunku podsuwa myśl o takiej matrycy, której tautologie są tezami danego rachunku i odwrotnie. Matrycę, która ma taką cechę względem danego rachunku, nazywa się matrycą dlań adekwatną (**D15.b**). Korzystając z pojęcia matrycy adekwatnej dla danego rachunku, można też ściślej niż dotąd mówić o wartościowości rachunku: rachunek ma wartościowość tej matrycy, której wartościowość jest najmniejsza spośród wartościowości matryc względem danego rachunku adekwatnych, czyli n jest najmniejszą spośród liczb oznaczających wartościowości matryc logicznych adekwatnych względem R (**D15.c**).

W uwagach dotyczących sposobów budowania KRZ (**RI.1) metoda rozstrzygania była już wskazana jako jedną z metod tworzenia systemu klasycznego rachunku. Obecnie, gdy można skorzystać z definicji pojęcia systemu (**D5.a**), wcześniejsze zapewnienia można uściślić i uzasadnić. Jak wiadomo, zbiór wyrażeń X jest systemem, o ile jest zamknięty ze względu na określoną funkcję konsekwencji, w tym sensie, że $X = Cn(X)$ {**W3.a**}. Wiadomo także, że w systemach dedukcyjnych pojęcie konsekwencji – a dokładniej pojęcie wyprowadzalności danego wyrażenie z danego zbioru wyrażeń – jest oparte na pojęciu dowodu {**D3.1**, **D4.b**, **W2**}. Mówiąc swobodnie, odpowiednikiem pojęcia wyprowadzalności (bycia konsekwencją) jest w systemach budowanych metodą matrycową (metodą rozstrzygania o tautologiczności) pojęcie współbycia tautologią, tj. bycia w danej matrycy M tautologią razem z wszystkimi wyrażeniami zbioru X. Myśl ta jest uściślona w kolejnej definicji.

D16 $\Phi \in Cn_M(X)$ wtedy i tylko, gdy Φ przybiera wartość wyróżnioną matrycy M dla każdego wartościowania, w którym wszystkie wyrażenia zbioru X uzyskują wartość wyróżnioną tej matrycy.

Dla danej matrycy M i danego zbioru X zbiór $Cn_M(X)$ jest wyznaczony jednoznacznie: jest wartością funkcji Cn dla pary $<M, X>$, a przy ustalonej matrycy M – wartością funkcji Cn_M dla danego zbioru wyrażeń zdaniowych X. Funkcja Cn_M jest zwana relacją konsekwencji matrycowej, a zbiór $Cn_M(X)$, jak i ogół tautologii matrycy, są systemami. Systemem jest więc także zbiór tautologii matrycy $<\{1, 0\}, \{1\}, \boldsymbol{F}>$, w której funkcje klasy $\boldsymbol{F}$ są określone definicjami **RI.1: **D3.a'**, **D3.b'** i przyporządkowane spójnikom KRZ.

2.4.4 Niezależność aksjomatów

O niezależności aksjomatów była już mowa w uwagach o własnościach teorii aksjomatycznych (**RI.4). Pojawiło się w nich twierdzenie, że niezależność aksjomatów systemu polega na tym, że żadnego spośród nich nie da się wyprowadzić z pozostałych, co znaczy, że można mówić o niezależności poszczególnych aksjomatów względem pozostałych, a na tej podstawie o niezależności zbioru aksjomatów. Twierdzenie to, w kontekście wcześniejszych uwag wystarczające, teraz można uogólnić i uściślić.

D17. **a** Wyrażenie Φ jest na gruncie systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$ niezależne od zbioru wyrażeń X wtedy i tylko, gdy Φ nie jest na gruncie tego systemu konsekwencją zbioru wyrażeń X, tj. $\Phi \notin Cn_{<A, \boldsymbol{D}>}(X)$.

b Zbiór wyrażeń X jest na gruncie systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$ niezależny wtedy i tylko, gdy na gruncie tego systemu żadne z wyrażeń zbioru X nie jest konsekwencją pozostałych wyrażeń tego zbioru, tj. $(\bigwedge \Phi \in X)\ \Phi \notin Cn_{<A, \boldsymbol{D}>}(X - \{\Phi\})$.

Pojęcia zdefiniowane w **D17** odnoszą się, co oczywiste, także do niezależności aksjomatów jakiegoś systemu (teorii) – zarówno poszczególnych aksjomatów, jak i aksjomatyki, tj. zbioru aksjomatów (**D7**, **W4**). Gdy chodzi o metody syntaktyczne, to niezależności aksjomatu lub aksjomatyki dowodzi się metodami stosowanym przy syntaktycznym okazywaniu niesprzeczności (2.3.1), tj. metodą cechy dziedzicznej oraz metodą interpretacji, można także wykorzystać twierdzenia mówiące o związkach między niezależnością a niesprzecznością zbioru wyrażeń.

Pojęcie własności dziedzicznej ze względu na określoną funkcję lub klasę funkcji (zdefiniowane w ***RI.1: **D4.c** i **D4.d**) jest w okazywaniu niezależności wykorzystane analogicznie jak w dowodach niesprzeczności, analogiczne (do **T16**) jest również twierdzenie dające podstawę dla tej metody okazywania niezależności. W zapisie tego twierdzenia również jest skrót $inh(W, \boldsymbol{D})$, który znaczy, że własność W jest dziedziczna ze względu na klasę działań $\boldsymbol{D}$.

T21 Jeśli istnieje własność W, która przysługuje wszystkim wyrażeniom należącym do zbioru $\{A \cup X\}$, $inh(W, \boldsymbol{D})$ oraz W nie przysługuje wyrażeniu Φ, to wyrażenie Φ jest na gruncie systemu $<A, \boldsymbol{D}>$ niezależne od zbioru wyrażeń X.

D o w ó d:
Z założeń tego twierdzenia, tj.:
1. $(\bigwedge \Phi \in A \cup X)\ W(\Phi)$;
2. $inh(W, \boldsymbol{D})$;
3. $\sim W(\Phi)$
– wziętych w kontekście wcześniejszych ustaleń – wynika, że wyrażenie Φ jest niezależne od zbioru wyrażeń X. Wiadomo bowiem, że zbiór tez systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$ jest identyczny z $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$, tj. z najmniejszym zbiorem zawierającym zbiór A i zamkniętym ze względu na klasę działań wnioskowania $\boldsymbol{D}$ {**D2**}, oraz $Z_{\min}((A \cup X), \boldsymbol{D}) = Cn_{A, \boldsymbol{D}}(X)$ {**D4.a**}; a przy tym jest tak, że jeśli jakaś cecha przysługuje każdemu elementowi danego zbioru i jest dziedziczona (niezmiennicza) ze względu na każdą funkcję (działanie) klasy $\boldsymbol{D}$, tj. $inh(W, \boldsymbol{D})$, to przysługuje także każdemu elementowi zbioru $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ {***RI.1: **T1**},
Zatem – na podstawie założeń 1 i 2 – również
4. jeżeli $\Phi \in Cn_{A, \boldsymbol{D}}(X)$, to $W(\Phi)$.
Ponieważ $\sim W(\Phi)$ {3}, więc
5. $\Phi \notin Cn_{A, \boldsymbol{D}}(X)$,

co – zgodnie z **D17** – znaczy, że wyrażenie Φ jest na gruncie systemu $<A, \boldsymbol{D}>$ niezależne od zbioru wyrażeń X.■

Uszczegółowienie **T21** stosowane do okazywania niezależności aksjomatów uzyskuje się, przyjmując, że zbiór X jest pusty, a zbiór aksjomatów jest pomniejszony o sprawdzany aksjomat Φ, tzn. że jest identyczny z $A - \{\Phi\}$:

T21' Jeśli istnieje własność W, która przysługuje wszystkim aksjomatom należącym do $(A - \{\Phi\})$ i $inh(W, \boldsymbol{D})$, a W nie przysługuje aksjomatowi Φ, to aksjomat Φ jest na gruncie systemu $<A, \boldsymbol{D}>$ niezależny od pozostałych aksjomatów tego systemu.

Korzystając z **T21'** okazuje się niezależność poszczególnych aksjomatów i aksjomatyk różnych teorii aksjomatycznych. Dowody takie często polegają na zbudowaniu matryc takich, że pewna określona w danej matrycy własność, np. przyjmowanie przez wyrażenie własności wyróżnionej skonstruowanej matrycy, jest dziedziczona ze względu na operacje wnioskowania klasy $\boldsymbol{D}$ oraz przysługuje wszystkim aksjomatom z wyjątkiem sprawdzanego, tj. nie przysługuje tylko temu aksjomatowi, którego niezależność od pozostałych trzeba okazać.

Prostym przykładem takiej metody dowodzenia jest wykazanie niezależności pierwszego z aksjomatów systemu KRZ opracowanego przez Łukasiewicza. Jak wiadomo (**RI.4), w systemie tym – którego terminami pierwotnymi są implikacja i negacja, a pierwotnymi regułami (działaniami) są reguła odrywania i podstawiania – są trzy aksjomaty:

1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$;
2. $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$;
3. $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$.

O niezależności pierwszego z nich od dwóch pozostałych świadczą np. prawidłowości obowiązujące w matrycy $<\{0, 1, 2\}, \{1\}, \boldsymbol{F}>$. Matryca ta jest trójwartościowa, jedyną wartością wyróżnioną jest 1, a w klasie funkcji tej matrycy są dwie wystarczające dla rachunku implikacyjno-negacyjnego, tj. jednoargumentowa $f_\sim$ taka, że: $f_\sim(0) = 1$, $f_\sim(1) = 0$, $f_\sim(2) = 2$, czyli $f_\sim = \{<0, 1>, <1, 0>, <2, 2>\}$ oraz dwuargumentowa $f_\Rightarrow = \{<(0, 0), 1>, <(0, 1), 1>, <(0, 2), 1>, <(1, 0), 0>, <(1, 1), 1>, <(1, 2), 0>, <(2, 0), 1>, <(2, 1), 1>, <(2, 2), 0>\}$. Otóż łatwo da się sprawdzić, że:

(i) własność tautologiczności w tej matrycy, tj. przyjmowania przez funkcję zdaniową wartości w tej matrycy wyróżnionej, przysługuje aksjomatom 2. oraz 3.

Jest również tak, że

(ii) własność ta jest dziedziczona względem działań odrywania (jeśli i implikacja, i jej poprzednik mają wartość 1, to wartość tę ma również – zgodnie z ***F*** – następnik) i podstawiania;

natomiast

(iii) własność ta nie przysługuje pierwszemu z aksjomatów (prawo sylogizmu warunkowego), bo jest wartościowanie, mianowicie $p = 2$, $q = 0$, $r = 2$, dla którego formuła ta nie uzyskuje wartości wyróżnionej (zgodnie z ***F*** uzyskuje wtedy wartość 0).

Prawidłowości te świadczą – zgodnie z **T21'** – o niezależności na gruncie tego systemu aksjomatu pierwszego od dwóch pozostałych[30]. Gdy udowodni się ponadto, że niezależne są także aksjomaty drugi oraz trzeci od pozostałych, wtedy można ogłosić, że aksjomatyka systemu Łukasiewicza jest niezależna {**D17.b**}.

Okazywanie niezależności aksjomatów metodą interpretacji przebiega podobnie, ponieważ polega na wskazaniu takiej interpretacji dla systemu $\langle A - \{\Phi\}, \boldsymbol{D} \rangle$, w której sprawdzany aksjomat $\Phi \in A$ nie jest tezą (nie jest tezą jego tłumaczenie, rozumiane zgodnie z **D11**)[31].

Natomiast dowody wykorzystujące związki między niezależnością a niesprzecznością zbioru wyrażeń są wsparte m.in. na następującym twierdzeniu.

T22 Jeżeli wyrażenie $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner$ jest konsekwencją niesprzecznego w sensie **D10.a2** zbioru wyrażeń $X \cup \{\Phi\}$, to wyrażenie Φ jest niezależne od wyrażeń zbioru X.

Dowód:

Da się okazać, że jest prawdziwa implikacja (pomocnicza w dowodzie **T22**):

L2 Jeżeli $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn(X \cup \{\Phi\})$ i zbiór wyrażeń $X \cup \{\Phi\}$ jest niesprzeczny w znaczeniu określonym w **D10.a2**, to $\Phi \notin Cn(X)$.

---

30 Przykłady ten jest zaczerpnięty z: L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 345.

31 Jako przykład L. Borkowski (tamże, s. 346) podaje dowód niezależności, na gruncie zaproponowanej przez J. Łukasiewicza aksjomatyki sylogistyki arystotelesowskiej, aksjomatu $(M \text{ a } P \wedge M \text{ i } S) \Rightarrow S \text{ i } P$ od pozostałych aksjomatów tego systemu.

Dowód L2:
Gdy do założeń dowodzonego twierdzenia, tj.:
1. $\ulcorner \sim \Phi \urcorner \in Cn(X \cup \{\Phi\})$,
2. zbiór wyrażeń $X \cup \{\Phi\}$ jest niesprzeczny w znaczeniu określonym w **D10.a2**

dołączy się
3. $\Phi \in Cn(X)$ {zdn.},
wtedy – na podstawie **RIV.1: **T4**, $X \subset (X \cup \{\Phi\})$, 3 oraz **T2** – uzyskuje się
4. $\Phi \in Cn(X \cup \{\Phi\})$,
co w koniunkcji z założeniem 1. daje podstawę do twierdzenia, że zbiór wyrażeń $(X \cup \{\Phi\})$ jest sprzeczny {**D10.a2'**}, wbrew założeniu 2.
Zatem: $\Phi \notin Cn(\Phi)$.
Ponieważ – w myśl **D17.a** – $\Phi \notin Cn(X)$ jest równoważne z twierdzeniem, że Φ jest niezależne od zbioru wyrażeń X, więc wspomagając się **L2**, można uznać **T22**.■

Warto odnotować fakt, że ogólne pojęcie niezależności, którego określenie w **D17** odsyła do ogólnego pojęcia konsekwencji Cn, odnosi się także do systemów wspartych na logice, tj. wspartych na $<A_{\text{log}}, \boldsymbol{D}_{\textbf{log}}>$. Ta sama uwaga dotyczy twierdzeń **T21**, **T21'**, **T22**, **L2** – są spełnione także, gdy zakładany lub wprost użyty w ich zapisach lub dowodach symbol relacji konsekwencji, tj. „Cn", jest zastąpiony przez „Cn_L", oznaczający relację konsekwencji logicznej.

Na przykład o niezależności piątego aksjomatu (pewnika) geometrii Euklidesa od pozostałych aksjomatów tego systemu świadczy fakt, że negacja tego aksjomatu – głoszącego, że przez dany punkt przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do danej prostej – jest konsekwencją niesprzecznych systemów geometrii nieeuklidesowej, tj. teorii, w których pewnik ten został zastąpiony aksjomatem, że w sytuacji takiej nie ma żadnej prostej lub że prostych jest nieskończenie wiele (z obu tych twierdzeń wynika negacja pewnika piątego)[32].

[32] Przykład ten jest podany m.in. w: tamże, s. 346–347.

ROZDZIAŁ II

POJĘCIA I ZAGADNIENIA SEMANTYCZNE

W rozdziale tym zostaną najpierw zdefiniowane pojęcia podstawowe w semantycznej charakterystyce wyrażeń systemów dedukcyjnych, a następnie – semantyczne własności systemów. Wyjściowe dla metalogicznych pojęć semantycznych jest (w porządku definiowania) pojęcie spełniania. Na nim są oparte pojęcia prawdy, modelu, wynikania, a także pojęcia odnoszące się do semantycznych własności systemów dedukcyjnych, tj. do niesprzeczności (rozumianej semantycznie), kategoryczności oraz pełności systemu[1].

1. Pojęcia spełniania i prawdy

Pojęcie spełniania zostanie zdefiniowane dla języka teorii pierwszego rzędu. Ograniczenie do takich systemów jest dla celów tych analiz wystarczające, a ponadto uzasadnione tym, że definicje właściwe dla teorii rzędów wyższych są uogólnieniem pojęcia spełniania dla teorii rzędu pierwszego, uogólnieniem, w którym trzeba uwzględnić obok zmiennych nazwowych i wiążących je kwantyfikatorów także zmienne predykatowe i funkcyjne rzędów wyższych, a także kwantyfikatory wiążące te zmienne. Podobne ograniczenie (i możliwość uogólnienia) dotyczy wszystkich pojęć semantycznych wspartych na pojęciu spełniania.

[1] Prezentowane tu ujęcie jest oparte na semantycznej teorii prawdy zapoczątkowanej przez Tarskiego (*Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Warszawa 1933). Monograficzne opracowanie Tarskiego semantycznej teorii prawdy jest w: J. Woleński, *Semantics and Truth*, dz. cyt.

1.1 Spełnianie

Znaczenie pojęcia spełniania było już przybliżane, gdy była mowa o podziale funkcji zdaniowych na kategorie (*RIII.4.2). Zakładaną w tamtym podziale kontekstową definicję spełniania można wyrazić tak: funkcja zdaniowa jest spełniona przez stałe podstawiane za występujące w funkcji zmienne, gdy w wyniku podstawienia uzyskuje się zdanie prawdziwe. A przy tym – co widoczne już w uwagach do dokonanego tam podziału – mówiąc o spełnianiu, trzeba uwzględnić i zakres zmiennych w funkcji i przyporządkowanie kolejnym zmiennym konkretnych elementów z zakresu. Jako przykłady takiego przyporządkowania są zwykle podawane skończone zbiory uporządkowane, tj. ciągi przedmiotów (np. liczb, zdań, zbiorów) oznaczanych przez symboliczne stałe podstawione za symboliczne zmienne danej funkcji.

W ścisłym ujęciu pojęcia spełniania pomocne są dokładniejsze uwagi co do opisywania języka systemów logicznych. Z ustaleń dotyczących języka (*RII) wiadomo, że do opisu dowolnych obiektów w dowolnym języku niezbędne jest, by w słowniku danego języka były ich nazwy. Wymóg ten dotyczy również opisu języka, wyrażeń językowych i ich systemów (*RII.3). Dlatego w ścisłej, metalogicznej charakterystyce wyrażeń systemów dedukcyjnych jest wyraźnie stawiany warunek, że w języku metasystemu, w którym dokonuje się charakterystyki wyrażeń dowolnego systemu, jest dla każdego wyrażenia systemu opisywanego jego nazwa lub reguła tworzenia takich metajęzykowych nazw wyrażeń. Bez spełnienia tego wymogu nie da się w metalogice zdefiniować żadnych ogólnych pojęć odnoszących się do wyrażeń systemów logicznych, zarówno pojęć syntaktycznych, jak i semantycznych. W przypadku charakterystyki semantycznej – w której mowa o związkach wyrażeń opisywanego systemu z ich odniesieniami – niezbędny jest dodatkowy warunek dotyczący metajęzyka: dla każdego wyrażenia języka badanego systemu istnieje w metajęzyku jego przekład. Tylko wtedy bowiem da się zdefiniować metajęzykowe pojęcia semantyczne, tj. odnoszące się do relacji między wyrażeniami badanego języka (systemu) a przedmiotami, do których wyrażenia te się odnoszą.

Jeśli *J* jest językiem teorii pierwszego rzędu, to pośród specyficznych jego symboli zmiennych są indywiduowe zmienne nazwowe (zmienne zdaniowe można wprowadzić w słowniku metajęzyka) i symbole predykatowe (w ujęciu ogólniejszym także symbole funkcyjne), stałe logiczne to symbole spójników prawdziwościowych oraz symbole kwantyfikatorów, a symbole pomocnicze to nawiasy. Funktory prawdziwościowe i kwantyfikatory są zapisywane przy użyciu symboli znanych z KRZ (**RI.1.1) i WRP (**RIII.2.1.1), natomiast gdy chodzi o zmienne indywiduowe i predykaty, to są zwykle (i będą w tych analizach) stosowane następujące umowy notacyjne.

(i) Zmienne indywiduowe języka J są oznaczane literą x z zapisanym w indeksie dolnym wskaźnikiem stałym oznaczającym liczbę naturalną, tj.: x_1, x_2, x_3, ...; odnoszące się do tych zmiennych metajęzykowe symbole tym tylko się różnią, że w indeksie dolnym jest wskaźnik zmienny, którego zakresem jest zbiór liczb naturalnych, dlatego używane w słowniku metajęzyka MJ symbole x_i, x_j, $i, j \in \mathcal{N}$ – jeśli będzie potrzeba, to z dodatkowymi wskaźnikami stałymi lub zmiennymi, np. x_{k_1} x_{k_t} – są metajęzykowymi zmiennymi reprezentującymi w MJ dowolne zmienne indywiduowe języka J.

(ii) Na oznaczenie predykatów jest używany symbol P uzupełniony dwiema wskaźnikowymi liczbami naturalnymi: zapisana w indeksie górnym wskazuje na liczbę argumentów predykatu, a zapisana w indeksie dolnym wskazuje na różne predykaty w danej, n-argumentowej kategorii, np. P^3_1, P^3_2, P^3_3, P^3_4, ... to kolejne predykaty trójargumentowe. Dla uproszczenia notacji wskaźniki górne będą jednak pomijane w każdym kontekście, w którym ilość argumentów nie jest ważna lub zapis bez górnego wskaźnika jest jednoznaczny, tj. zawsze, gdy liczba argumentów jest inaczej wskazana, jak np. w napisie $P_2(x_{1,}\, x_{5,}\, x_2)$, wskazującym, że w danej formule języka J jest użyty predykat P^3_2. W metajęzyku symbole predykatowe języka J są reprezentowane przez metajęzykowe zmienne predykatowe P_i, P_j, ... – jeśli to potrzebne, to także ze wskaźnikiem górnym – których wskaźnik dolny jest zmienną przebiegającą zbiór dolnych wskaźników symboli predykatów języka J.

Warto również podać definicję poprawnie zbudowanego wyrażenia – definicję indukcyjną, która jest zgodna z określeniem ***RI.1: **D3**. Upraszczając uwagi sformułowane wcześniej, wystarczy tu przypomnieć, że w warunku wstępnym definicji indukcyjnej jest określone poprawnie zbudowane wyrażenie proste (elementarne, atomiczne) języka J, a w warunku indukcyjnym jest określony sposób poprawnego budowania wyrażeń złożonych z prostszych (ostatecznie – z elementarnych). W definicji sformułowanej niżej są uwzględnione umowy notacyjne (i) oraz (ii) oraz wcześniejsze uzgodnienia co do symboli metajęzyka stosowanych na oznaczenie wyrażeń języka *J*.

D1 Zbiór *S* wyrażeń poprawnie zbudowanych jest to najmniejszy spośród zbiorów *S'* spełniających następujące warunki:

1. do zbioru *S'* należy każde wyrażenie postaci $\ulcorner P_i(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t})\urcorner$;

2. jeśli Φ i Ψ należą do zbioru *S'*, to do zbioru tego należą również wyrażenia: $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner$, $\ulcorner\Phi \wedge \Psi\urcorner$, $\ulcorner\Phi \vee \Psi\urcorner$, $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner$, $\ulcorner\Phi \Leftrightarrow \Psi\urcorner$, …, $\ulcorner(\bigwedge x_j)\, \Phi\urcorner$, $\ulcorner(\bigvee x_j)\, \Phi\urcorner$.

Użyte w tym określeniu pojęcie najmniejszego zbioru spełniającego określone warunki było już stosowane, m.in. w definicji zbioru tez systemu aksjomatycznego (***RI.2: **D2**). W warunku pierwszym (wstępnym) jest określone wyrażenie elementarne języka *J*: wyrażenia takie są zbudowane z symbolu predykatu oraz, umieszczonych w nawiasie, *t* symboli zmiennych indywiduowych (w opisie kształtu formuły elementarnej jest przy symbolu zmiennej funktorowej pominięty wskaźnik górny, bo napis „$(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t})$” wskazuje, że chodzi o dowolny predykat *t*-argumentowy). Wykropkowane miejsce warunku drugiego (indukcyjnego) można wypełnić schematami wyrażeń złożonych zbudowanych za pomocą symboli funktorów KRZ innych niż uwzględnione wprost w **D1**.

Potrzebne jest także bardziej ścisłe i ogólniejsze niż dotąd mówienie o odniesieniach wyrażeń języka *J*. Ponieważ pojęcie spełniania ma dotyczyć dowolnych formuł poprawnie zbudowanych, zawierających dowolną liczbę zmiennych, więc zmierzając do uściślenia i uogólnienia definicji spełniania, warto używać ogólniejszego pojęcia, tj. spełniania funkcji zdaniowej przez nieskończony ciąg przedmiotów. Jeśli więc *U* jest dowolnym niepustym zbiorem, rozumianym w tym kontekście jako dziedzina, do której odnoszą się wyrażenia języka *J*, to zbiorowi $x_1, x_2, x_3, \ldots$ zmiennych występujących w wyrażeniu Φ będzie przyporządkowany nieskończony ciąg $\{a_n\}$ przedmiotów $a_1, a_2, a_3, \ldots$ należących do zbioru *U*. Uogólnienie to nie zmienia wcześniejszych pojęć i symboliki, przyporządkowanie nieskończonego ciągu $\{a_n\}$ jest jednak oparte na bardzo ważnej umowie: z danego ciągu nieskończonego są wybierane, tj. podstawiane za zmienne danego wyrażenia, te tylko wyrazy ciągu nieskończonego, których wskaźnik jest zgodny ze wskaźnikiem danej zmiennej występującej w wyrażeniu zdaniowym. Gdy więc stosuje się pojęcie nieskończonego ciągu $\{a_n\}$ do funkcji zdaniowej o skończonej, a zwykle niewielkiej liczbie zmiennych, to zmiennym są przyporządkowywane tylko te wyrazy ciągu $\{a_n\}$, które są opatrzone wskaźnikiem zgodnym z wskaźnikiem zmiennej.

By ściślej niż dotąd mówić o odniesieniach wyrażeń języka J oraz o przyporządkowaniu zmiennym występującym w funkcji zdaniowej przedmiotów z dziedziny U, zostaną tu użyte pojęcia tzw. funkcji interpretującej oraz funkcji wartościującej (zob. **RI.1.2.1). Funkcja interpretująca określa sposób rozumienia stałych pozalogicznych języka J. Można bowiem powiedzieć – ograniczając się, zgodnie z **D1**, do języka, w którego wyrażeniach występują jako nieindywiduowe symbole pozalogiczne tylko symbole predykatów – że funkcja ta przyporządkowuje symbolom predykatów $P_{1,}$ P_2, $P_{3,}$ … relacje $R_{1,}$ R_2, $R_{3,}$ …, a przy tym jeśli predykat jest jednoargumentowy, to jego interpretantem (zwanym także denotatem) jest podzbiór zbioru U, gdy jest dwuargumentowy, to jego odniesieniem jest dwuargumentowa relacja, czyli podzbiór iloczynu kartezjańskiego $U \times U$, predykatom trójargumentowym są przyporządkowywane podzbiory z $(U \times U \times U)$ itd. Funkcję interpretującą f_J można więc identyfikować ze zbiorem par uporządkowanych $\{<P_1, R_1>, <\mathrm{P}_2, R_2>, \ldots, <P_k, R_k>\}$, choć w dokładniejszym zapisie trzeba uwzględnić, że może być w języku J wiele predykatów jednoargumentowych, dwuargumentowych itd.; ponadto w przypadku języków, których wyrażenia zawierają oprócz symboli predykatów także symbole funkcji i nazwy indywiduów (stałe indywiduowe) trzeba dodać pary, których pierwszym elementem jest kolejny symbol funkcyjny, a drugim odpowiadająca mu funkcja w uniwersum U oraz pary nazw jednostkowych danego języka (symboli indywiduów) oraz oznaczanych przez nie, w interpretacji f_J, indywiduów z U. Ogólniej można więc powiedzieć, że funkcja denotowania jest określona na zbiorze symboli stałych pozalogicznych danego języka J, a jej wartościami są relacje (wartości funkcji f_J dla symboli predykatywnych), funkcje (wartości f_J dla symboli funkcyjnych) i przedmioty (wartości f_J dla stałych indywiduowych) w zbiorze U. Czyli dziedziną $D_{\mathrm{I}}(f_J)$ funkcji interpretującej jest zbiór symboli pozalogicznych języka J, a zbiorem jej wartości (przeciwdziedziną) $D_{\mathrm{II}}(f_J)$ jest zbiór odpowiadających im interpretantów (denotatów) w zbiorze U.

Odniesienie danego języka J oraz systemu w danym języku sformułowanego jest więc wynikiem interpretacji i tylko ten wynik zwany będzie w tych analizach dziedziną języka i systemu. Dlatego dziedzina będzie oznaczana nie jako para $<U, f>$, lecz według schematu $<U, D_{\mathrm{II}}(f_J)>$, w którym zamiast $D_{\mathrm{II}}(f_J)$ będą wypisane odniesienia predykatów języka

J (w przypadku bogatszych języków także symboli funkcyjnych i stałych) wyznaczone przez interpretację *f*. Stosowanie schematu <*U*, *f*> jest na pewno prostsze w zapisie, bo odniesienia symboli pozalogicznych są reprezentowane tylko symbolem *f*; co więcej, mimo że w zapisie tym nie jest wyraźnie wskazywana relatywizacja do danego języka, to też wskazuje on na interpretowany język *J*, bo w definicji dziedziny funkcji *f* jest wskazany zbiór symboli pozalogicznych danego języka. Jednakże stosowanie schematu <*U*, *f*> sprzyja uznaniu, że składnikiem dziedziny języka (systemu) są jego wyrażenia, co nie jest zgodne z rozumieniem odniesienia języka i teorii, przyjmowanym także w tych rozważaniach.

Wybór schematu $<U, D_{II}(f_J)>$ jako reprezentującego dziedzinę teorii i języków jest uzasadniony tym bardziej, że można przyjąć umowy notacyjne, które uproszczą zapisy i rozważania w sposób zbliżony do notacji zakładającej schemat <*U*, *f*>. Otóż ponieważ w wyrażeniach elementarnych języka *J* występuje skończona (zwykle niewielka) liczba symboli predykatowych, a w wyrażeniach złożonych liczba takich symboli jest nie większa niż suma liczb predykatów w ich wyrażeniach składowych, więc można uznać, że w dowolnym wyrażeniu liczba symboli predykatowych jest skończona. Dlatego dziedzina języka *J* lub sformułowanego w danym języku systemu będzie reprezentowana przez układ (strukturę), w którym po zbiorze *U* są wyliczone wartości funkcji interpretującej f_J, tj. układ $\mathcal{M}_J = <U, R_1, R_2, ..., R_k>$, w którym *U* to uniwersum dziedziny, a $R_1, R_2, ..., R_k$ wyznacza sposób rozumienia predykatów $P_{1,}$ $P_2, ..., P_k$ języka *J* (dziedzina jest także zwana interpretacją semantyczną). Ponieważ inne elementy definiujące dziedzinę $\mathcal{M}_J$ są nadbudowane nad zbiorem *U* – w tym sensie, że są konstruktami zbudowanymi z jego elementów – więc uniwersum *U* jest także zwane bazą dziedziny $<U, R_1, R_2, ..., R_k>$. Ponadto, gdy wiadomo, który lub jaki język jest opisywany, albo też nie jest to w metologicznym opisie i definicjach istotne, wtedy można pominąć wskaźnik relatywizujący do języka. Dlatego ustalona dziedzina $<U, R_1, R_2, ..., R_k>$ będzie oznaczana skrótowo symbolem $\mathcal{M}$.

Co się natomiast tyczy funkcji wartościujących, to – przeciwnie do interpretacji – są one określone na zbiorze wszystkich zmiennych danego języka, a ich wartości są elementami zbioru *U*, czyli funkcje te odwzorowują zbiór zmiennych w zbiór *U* (w sensie określonym komentarzu do **RIV.2: **D12.1**). Jeśli $\boldsymbol{W_J}$ jest klasą funkcji wartościujących określonych na zbiorze V_J zmiennych indywiduowych języka *J*, to można powiedzieć (pominąwszy wskaźniki relatywizujące do języka *J*), że

$w \in \boldsymbol{W} \Leftrightarrow w \in U^V \Leftrightarrow w\colon V \dashrightarrow_{w} U$, czyli funkcja wartościowania w jest elementem klasy wszystkich odwzorowań zbioru zmiennych V_J w zbiór przedmiotów dziedziny U (**RIV.2: **D13**). Ponieważ, zgodnie z umową notacyjną (i), wskaźniki zmiennych przebiegają zbiór $\mathcal{N}$ liczb naturalnych (zbiór zmiennych jest wzajemnie jednoznacznie przyporządkowany zbiorowi liczb naturalnych), więc można także stwierdzić, że $w \in \boldsymbol{W} \Leftrightarrow w \in U^{\mathcal{N}} \Leftrightarrow w\colon \mathcal{N} \dashrightarrow_{w} U$.

W klasie $\boldsymbol{W_J}$ są także takie np. funkcje, których wartością dla dowolnej zmiennej języka J jest ten sam przedmiot należący do U, są funkcje, których ciągi wartości różnią się na jednym tylko miejscu, na dwóch miejscach, ..., na każdym miejscu. Nieskończone ciągi wartości $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, ... funkcji wartościujących nazywa się wartościowaniami. Konkretna funkcja wartościująca ustala przyporządkowanie zmiennym języka J przedmiotów ze zbioru U, a funkcja wartościująca ograniczona do zbioru zmiennych wolnych danego wyrażenia (ograniczona w znaczeniu zgodnym z **RIV.2: **D4**), przyporządkowuje tym zmiennym przedmioty z dziedziny U. Jeśli $\{x_{i,}\ x_j, \ldots, x_k\}$ jest zbiorem zmiennych wolnych występujących w wyrażeniu Φ, a w jest funkcją wartościującą, to w-obrazem zbioru $\{x_{i,}\ x_j, \ldots, x_k\}$ jest zbiór $\{a_{i,}\ a_j, \ldots, a_k\}$, w którym $a_i = w(x_i)$, $a_j = w(x_j)$, ..., $a_k = w(x_k)$. A przy tym jeśli w_1 oraz w_2 są różnymi funkcjami wartościującymi, to mogą być różne wartości tych funkcji dla tych samych zmiennych wyrażenia Φ, czyli zbiory $w_1\{x_{i,}\ x_j, \ldots, x_k\}$ oraz $w_2\{x_{i,}\ x_j, \ldots, x_k\}$; a z drugiej strony funkcje wartościujące w_1 i w_2 mogą być różne, nawet jeśli $w_1\{x_{i,}\ x_j, \ldots, x_k\} = w_2\{x_{i,}\ x_j, \ldots, x_k\}$, o ile ciągi $\{a_n\} = w_1(V_J)$ oraz $\{b_n\} = w_2(V_J)$ różnią się swoimi wyrazami na co najmniej jednym z innych miejsc (tj. poza miejscami $i, j, \ldots, k$).

W ślad za indukcyjną definicją wyrażenia poprawnie zbudowanego (**D1**) również definicja spełniania stosowalna do dowolnego wyrażenia języka J jest indukcyjna. Powtarzające się w niej powiedzenie: „wyrażenie zdaniowe Φ języka J jest w dziedzinie $\mathcal{M}$ spełnione przez ciąg $\{a_n\}$” jest skrócone przez „$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$”. Relatywizacja do dziedziny $\mathcal{M}$ oznacza, że mowa o spełnianiu przy ustalonym znaczeniu predykatów $P_{1,}\ P_2, P_3, \ldots, P_k$ w uniwersum U, tj. przy ustalonej interpretacji (funkcji interpretującej) f_J – symbol $\mathcal{M}$ w poniższej i kolejnych definicjach oznacza więc dowolną, ale określoną w wyniku interpretacji dziedzinę badanego języka J. Kolejna umowa notacyjna jest następująca: ciąg uzyskany z ciągu $\{a_n\}$ w wyniku zastąpienia jego i-tego wyrazu przez pewien przedmiot $a \in U$, tj. ciąg $\{a_{1,}\ a_2, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots\}$, będzie oznaczany skrótem

„$\{a_n\}(a_i/a)$" – w poniższej definicji „$\{a_n\}$" oznacza dowolny, lecz ustalony ciąg przedmiotów z uniwersum U, czyli wartościowanie w dziedzinie $\mathcal{M}$ (*wtw* jest skrótem łącznika „wtedy i tylko, gdy").

D2. **1** $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner P_i(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t})\urcorner, \{a_n\})$ *wtw* $R_i(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t})$;

2 **a** $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner \sim\Phi\urcorner, \{a_n\})$ *wtw* $\sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$;

b $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner \Phi \wedge \Psi\urcorner, \{a_n\})$ *wtw* $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \wedge \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$;

c $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner \Phi \vee \Psi\urcorner, \{a_n\})$ *wtw* $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \vee \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$;

d $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner \Phi \Rightarrow \Psi\urcorner, \{a_n\})$ *wtw* $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$;

e $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner \Phi \Leftrightarrow \Psi\urcorner, \{a_n\})$ *wtw* $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \Leftrightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$;

f $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigwedge x_i)\ \Phi\urcorner, \{a_n\})$ *wtw* $(\bigwedge a \in U)\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}(a_i/a))$;

g $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner, \{a_n\})$ *wtw* $(\bigvee a \in U)\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}(a_i/a))$.

Komentując określenie **D2**, można najpierw powiedzieć, że zgodnie z warunkiem 1. (warunek wstępny) formuła elementarna jest spełniona wtedy i tylko, gdy dla relacji R_j orzekanej w formule $\ulcorner P_i(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t})\urcorner$ elementy zbioru U przyporządkowane zmiennym $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t}$ tworzą układ związany relacją R_i (są członami tej relacji).

Natomiast w warunku 2. (warunek indukcyjny) spełnianie – w dziedzinie $\mathcal{M}$ przez nieskończony ciąg $\{a_n\}$ – wyrażeń złożonych zbudowanych za pomocą spójników prawdziwościowych KRZ jest określone (w punktach 2a–2e) w sposób zgodny z tabelkowymi definicjami tych funktorów: negacja dowolnego wyrażenia jest spełniona wtedy i tylko, gdy nie jest spełnione dane wyrażenie; koniunkcja dwóch wyrażeń, gdy spełnione jest każde z nich; alternatywa, gdy jest spełnione co najmniej jedno z nich; implikacja – gdy nie jest spełnione wyrażenie występujące w jej poprzedniku lub jest spełnione wyrażenie w następniku; a równoważność wtedy i tylko, gdy oba jej człony są jednocześnie spełnione lub niespełnione – przez dany ciąg przedmiotów.

Z kolei gdy chodzi o warunki spełniania dla wyrażeń z kwantyfikatorem (2f–2g), to: wyrażenie, w którym formuła Φ jest poprzedzona kwantyfikatorem ogólnym wiążącym którąś (dowolną) z jej zmiennych wolnych x_i jest spełnione przez ciąg $\{a_n\}$ wtedy i tylko, gdy formuła Φ jest spełniona przez każdy ciąg $\{a_n\}$' powstający z $\{a_n\}$ w wyniku zastąpienia w nim wyrazu a_i – odpowiadającego (wskaźnikiem) danej zmiennej x_i związanej kwantyfikatorem – przez dowolny przedmiot $a \in U$; natomiast wyrażenie, w którym Φ jest poprzedzone kwantyfikatorem szczegółowym, jest spełnione wtedy i tylko, gdy jest taki przedmiot $a \in U$, że ciąg $\{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots\}$ spełnia wyrażenie Φ (zmienna x_i jest w formule Φ wolna). Jak widać, warunki te są zgodne z rozumieniem kwantyfikatorów.

Jak wiadomo z uwag poprzedzających **D2**, zamiast o spełnianiu wyrażenia przez ciąg przedmiotów $\{a_n\}$ można mówić, że wyrażenie jest spełnione dla wartościowanie $\{a_n\}$; jest także stosowany sposób mówienia i zapisu nawiązujący do terminologii używanej w kontekście pojęcia tautologii KRZ (**RI.2.1). Mianowicie symbol „$W_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$" oznacza wartość logiczną wyrażenia Φ w dziedzinie $\mathcal{M}$ dla wartościowania $\{a_n\}$, a wtedy:

$W_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) = 1$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ oraz
$W_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) = 0$ wtedy i tylko, gdy $\sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$.

Jak widać, powiedzenie, że funkcja zdaniowa przyjmuje dla danego wartościowania wartość 1 albo przyjmuje wartość 0, podpada pod pojęcie spełniania funkcji zdaniowej przez ciąg przedmiotów czerpanych z dowolnego uniwersum, a nie tylko ze zbioru $U = \{1, 2\}$ lub $U = \{1, 0, 1/2\}$, jak zakładano, gdy była stosowana metoda matrycowa do sprawdzania wyrażeń KRZ (**R1.2) oraz rachunku Ł3 (**RII.1).

Mimo że, zgodnie z przyjętymi ustaleniami, mowa o spełnianiu wyrażeń przez nieskończone ciągi przedmiotów, to spełnianie funkcji zdaniowej zależy od tych tylko wyrazów nieskończonego ciągu $\{a_n\}$, które są przyporządkowane zmiennym danej funkcji. Zawężenie to widać wyraźnie w warunku, który określa pojęcie spełniania dla dowolnej formuły elementarnej, prawidłowość ta obowiązuje także dla wyrażeń złożonych, jak to wynika z definiensów równoważności 2a–2g. Pamiętając o tym, że pojęcie spełniania wyrażenia zdaniowego przez ciąg przedmiotów jest zrelatywizowane do dziedziny $\mathcal{M} = \langle U, R_1, R_2, \ldots, R_k \rangle$, można zatem powiedzieć, że:

T1 Jeśli $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t}\}$ jest zbiorem wszystkich zmiennych wolnych wyrażenia Φ oraz $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są dowolnymi ciągami przedmiotów ze zbioru U dziedziny $\mathcal{M}$, które nie różnią się wyrazami o wskaźnikach $j_1, j_2, \ldots, j_t$, tj. $a_{j_1} = b_{j_1}, a_{j_2} = b_{j_2}, \ldots, a_{j_t} = b_{j_t}$, to:
$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{b_n\})$.

Dowód:

W indukcyjnym dowodzie tego twierdzenia trzeba najpierw okazać, że jest ono spełnione dla wyrażeń elementarnych, a następnie, że także dla dowolnego wyrażenia złożonego, o ile jest prawdziwe dla jego wyrażeń składowych.

Dla wyrażeń elementarnych twierdzenie to jest oczywiste, jako że zgodnie z **D1.1**
$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner P_i(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t})\urcorner, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $R_i(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t})$ oraz
$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner P_i(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t})\urcorner, \{b_n\})$ wtedy i tylko, gdy $R_i(b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_t})$,
co wobec założenia: $a_{j_1} = b_{j_1}, a_{j_2} = b_{j_2}, \ldots, a_{j_t} = b_{j_t}$ prowadzi do równoważności: $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{b_n\})$.

By okazać, że jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla wyrażeń składowych, to jest też prawdziwe dla dowolnych wyrażeń złożonych, o których mowa w **D2.2a–e**, załóżmy, że

(*) **T1** jest spełnione dla wyrażeń Φ oraz Ψ {z. ind.}.

Jeśli chodzi o negację, to z **D2.a** wiadomo, że
$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\sim\Phi\urcorner, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $\sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$
oraz
$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\sim\Phi\urcorner, \{b_n\})$ wtedy i tylko, gdy $\sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{b_n\})$, a ponieważ – zgodnie z założeniem indukcyjnym:
$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}\ (\Phi, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}\ (\Phi, \{b_n\})$,
więc:
$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\sim\Phi\urcorner,\{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\sim\Phi\urcorner, \{b_n\})$.

W przypadku koniunkcji, zgodnie z **D2.2b**:
$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \wedge \Psi\urcorner, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \wedge \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$
oraz
$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \wedge \Psi\urcorner, \{b_n\})$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{b_n\}) \wedge \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{b_n\})$,
a przy tym, zgodnie z założeniem indukcyjnym:
$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{b_n\})$
oraz
$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{b_n\})$,
więc:
$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \wedge \Psi\urcorner, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \wedge \Psi\urcorner, \{b_n\})$.

Dowody dla kolejnych spójników są analogiczne; w dowodach tych można także wykorzystać fakt, że pozostałe funktory są definiowalne przez negację i koniunkcję, co pozwala uznać, że **T1** jest prawdziwe także dla wyrażeń złożonych, w których spójnikiem głównym jest funktor inny niż negacja i koniunkcja.

Jeśli chodzi o wyrażenia z kwantyfikatorem, to zgodnie z **D2.2f**:

1. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigwedge x_{j_i})\ \Phi\urcorner, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $(\bigwedge a \in U)\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}(a_{j_i}/a))$
   oraz
   $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigwedge x_{j_i})\ \Phi\urcorner, \{b_n\})$ wtedy i tylko, gdy $(\bigwedge a \in U)\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{b_n\}(b_{j_i}/a))$.

Z założenia indukcyjnego wiadomo, że jeśli dowolne dwa ciągi nie różnią się na miejscach odpowiadających wszystkim zmiennym wolnym wyrażenia Φ, to Φ jest spełnione przez jeden z tych ciągów wtedy i tylko, gdy jest spełnione przez drugi. Otóż da się okazać, że warunek ten, tj. identyczności wyrazów odpowiadających wszystkim zmiennym wolnym w Φ, spełniają ciągi $\{a_n\}(a_{j_i}/a)$ i $\{b_n\}(b_{j_i}/a)$ – niezależnie od tego, czy związana kwantyfikatorem zmienna x_{ji} jest zmienną wolną w Φ.

Mianowicie, jeśli:

1.1 x_{j_i}, $i = 1, \ldots, t$, nie jest zmienną wolną, to w wyrażeniach Φ i $\ulcorner(\bigwedge x_{j_i})\ \Phi\urcorner$ są te same zmienne wolne, jako że zastąpienie a_{j_i}/a oraz b_{j_i}/a jest wykonane w innym miejscu ciągu niż fragment, w którym są wyrazy obu ciągów o wskaźnikach $j_1, j_2, \ldots, j_t$. W kontekście założenia: $a_{j_1} = b_{j_1}$, $a_{j_2} = b_{j_2}, \ldots, a_{j_t} = b_{j_t}$ oraz założenia indukcyjnego (*) można więc uznać, że w tej sytuacji:

(**) $\quad \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}(a_{j_i}/a))$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{b_n\}(b_{j_i}/a))$.

Jeśli natomiast:

2.1 x_{j_i} jest zmienną wolną w Φ, to – wobec założenia $a_{j_1} = b_{j_1}$, $a_{j_2} = b_{j_2}$, $\ldots$, $a_{j_t} = b_{j_t}$ oraz faktu, że za x_{j_i} jest w obu ciągach podstawiany ten sam przedmiot a – ciągi te nie różnią się na żadnym miejscu spośród odpowiadających wszystkim zmiennym wolnym wyrażenia Φ, czyli ponownie (**) {(*)}.

Skoro jest uzasadnione twierdzenie, że:

2. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}(a_{j_i}/a))$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{b_n\}(b_{j_i}/a))$
{1.1 $\Rightarrow$ (**), 2.1 $\Rightarrow$ (**)},

a więc że równoważne są prawe strony równoważności 1., to można także uznać, że:

$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigwedge x_{j_i})\ \Phi\urcorner, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigwedge x_{j_i})\ \Phi\urcorner, \{b_n\})$.

Dowód **T1** dla wyrażeń poprzedzonych kwantyfikatorem szczegółowym rozpoczyna się od, zgodnych z **D2g**, twierdzeń:

$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $(\bigvee a \in U)\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}(a_i/a))$ oraz
$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $(\bigvee a \in U)\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}(a_i/a))$,

a jego tok jest analogiczny do rozumowania dla wyrażeń z kwantyfikatorem ogólnym. W dowodzie wyrażeń o takim kształcie można także wykorzystać fakt, że kwantyfikator szczegółowy da się równoważnościowo zdefiniować za pomocą kwantyfikatora ogólnego i negacji.

W kontekście **D1** można zatem uznać, że dla każdego wyrażenia Φ poprawnie zbudowanego ($\Phi \in S$) twierdzenie **T1** jest spełnione. ■[2]

Mimo więc że w definicji spełniania jest używane pojęcie nieskończonego ciągu przedmiotów, to na podstawie **T1** jest uzasadnione ograniczenie się do tej tylko skończonej części ciągu nieskończonego, w której są wyrazy odpowiadające wszystkim zmiennym wolnym danego wyrażenia.

Twierdzenie **T1** stosuje się także do przypadków skrajnych, tj. do sytuacji, gdy zbiór $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t}\}$ wszystkich zmiennych wolnych wyrażenia Φ jest pusty, a więc gdy wyrażenie zdaniowe Φ nie zawiera zmiennych wolnych, jest formułą zamkniętą, czyli jest zdaniem. Zbiór pusty zawiera wszystkie zmienne wolne takiego wyrażenia (zmiennych wolnych nie ma), a postawiony w poprzedniku implikacji **T1** drugi warunek, że ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$mają się nie różnić wyrazami o wskaźnikach $j_1, j_2, \ldots, j_t$, też jest spełniony, bo nie ma takich wyrazów (ciągi te nie mogą się różnić na miejscach o wskaźnikach należących do pustego zbioru); o dowolnych ciągach $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ czerpanych z U można więc powiedzieć, że warunek ten spełniają. Wynik tego rozumowania można sformułować następująco.

T2 Jeśli wyrażenie Φ jest zdaniem oraz $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są dowolnymi ciągami przedmiotów ze zbioru U dziedziny $\mathcal{M}$, to $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{b_n\})$.

Mówiąc inaczej, jeśli spełnienie funkcji zdaniowej przez ciąg przedmiotów zależy od tych tylko wyrazów ciągu, które odpowiadają jej zmiennym wolnym, to w przypadku zdania (funkcji o pustym zbiorze zmiennych wolnych) spełnianie nie zależy od żadnych elementów ciągu. Jeśli więc zdanie jest spełnione przez jakikolwiek dany ciąg, to jest spełnione przez dowolny inny, czyli przez każdy ciąg z danej dziedziny $\mathcal{M}$ (wyznaczonej interpretacją języka J).

T3 Jeśli wyrażenie Φ jest zdaniem oraz zbiór U dziedziny $\mathcal{M}$ jest niepusty, to: $(\bigvee \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ *wtw* $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$.

Dowód:

Jest oczywiste, że spełniona jest implikacja odwrotna tej równoważności, natomiast implikacja prosta jest konsekwencją **T2** i założeń dowodzonego twierdzenia: jeśli bowiem zdanie Φ jest spełnione przez jakiś ciąg, to jest też spełnione przez dowolny $\{a_n\}$ czerpany z niepustego zbioru U. ■

---

[2] Rozpisany pełniej, w innej notacji, dowód tego twierdzenia jest w: A. Grzegorczyk, *Zarys logiki matematycznej*, dz. cyt., s. 236–238.

Wysłowiając **T3** w innej terminologii, można powiedzieć, że jeśli zdanie jest spełnione (w niepustej dziedzinie U) przez jakiś ciąg przedmiotów, tj. przy pewnym wartościowaniu $\{a_n\}$ – co zapisuje się także jako $W_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) = 1$ – to jest spełnione przy dowolnym wartościowaniu (o wartościach w zbiorze U).

Pojęcie spełniania – wyżej sformułowane dla wyrażeń teorii pierwszego rzędu bez symboli funkcyjnych i stałych indywiduowych – można uogólnić na teorie (języki) zawierające oprócz symboli predykatowych także symbole funkcyjne oraz stałe indywiduowe (nazwy jednostkowe) oraz na teorie rzędów wyższych. Gdy chodzi o teorie z nie tylko predykatowymi symbolami pozalogicznymi, to w schematach oznaczających ich dziedziny trzeba wskazać odniesienia (denotaty) ich symboli funkcyjnych $F_1, F_2, \dots, F_l$ oraz stałych nazwowych $n_1, n_2, \dots, n_m$, np. mówić, że dziedziną takiego systemu jest – w ustalonej interpretacji języka danego systemu – $\mathcal{M} = <U, R_1, R_2, \dots, R_k, f_1, f_2, \dots, f_l, b_1, b_2, \dots, b_m>$, przy czym $f_1, f_2, \dots, f_l$ to denotaty symboli $F_1, F_2, \dots, F_l$, a $b_1, b_2, \dots, b_m$ to przedmioty z niepustego uniwersum U oznaczane, zgodnie z przyjętą interpretacją, przez nazwy (symbole) jednostkowe $n_1, n_2, \dots, n_m$. Natomiast w charakterystyce dziedzin teorii rzędów wyższych trzeba uwzględnić fakt, że w ich językach oprócz zmiennych indywiduowych mogą występować stałe i zmienne predykatowe i funkcyjne różnych rzędów.

Da się również okazać, że także dla tych bogatszych języków i odpowiadających im bogatszych dziedzin jest spełniona implikacja **T1**[3].

1.2 Pojęcie prawdy

Zrelatywizowanie pojęcia spełniania do określonego ciągu $\{a_n\}$ z dziedziny $\mathcal{M}$ pociąga za sobą, warto przypomnieć, odniesienie do określonej interpretacji danego języka J, tj. do wskazanego uniwersum U i ustalonego w nim znaczenia symboli predykatowych $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$ danego języka – a także symboli funkcyjnych i stałych indywiduowych, o ile występują w opisywanym języku. Dlatego warto pamiętać, że oprócz tego wyraźnie wskazanego odniesienia, tj. do dziedziny $\mathcal{M}$, pojęcie prawdy jest zrelatywizowane źródłowo do określonej interpretacji danego języka.

[3] Ogólniejsze pojęcie spełniania jest zdefiniowane np. w: L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 364–368 i A. Grzegorczyk, *Zarys logiki matematycznej*, dz. cyt., s. 253–255.

D3. **a** Wyrażenie zdaniowe Φ jest prawdziwe w dziedzinie $\mathcal{M} = \langle U, R_1, R_2, \ldots, R_k \rangle$, tj. $\Phi \in E(\mathcal{M})$, wtedy i tylko, gdy wyrażenie Φ jest spełnione w $\mathcal{M}$ przez każdy ciąg przedmiotów czerpanych z U, tj. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$.

b Wyrażenie Φ klasycznego systemu logicznego jest prawdziwe w dziedzinie U wtedy i tylko, gdy wyrażenie Φ jest spełnione przez każdy ciąg przedmiotów z U, tj. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_U(\Phi, \{a_n\})$.

Symbol „$E(\mathcal{M})$” oznacza zbiór wyrażeń (zapisanych w języku J) prawdziwych w dziedzinie $\mathcal{M}$ (jest także zwany zawartością dziedziny $\mathcal{M}$). Rozwijając zapis symboliczny, można powiedzieć, że wyrażenie Φ jest prawdziwe – a dokładniej: należy do zbioru $E(\mathcal{M})$ wyrażeń prawdziwych w dziedzinie $\mathcal{M}$ – wtedy i tylko, gdy przy rozumieniu jego terminów w sposób wyznaczony przez $\langle R_1, R_2, \ldots, R_k \rangle$ jest spełnione przez każdy ciąg przedmiotów, którego zapasem jest zbiór U; w innej terminologii – że jest spełnione w dziedzinie $\mathcal{M}$ przy każdym wartościowaniu $w \in \boldsymbol{W_J} = U^{\mathcal{N}}$, a mówiąc prościej i w sposób wyżej uzasadniony: jest prawdziwe, gdy rozumiane zgodnie z daną interpretacją jest spełnione przy każdym podstawieniu nazw przedmiotów ze zbioru U za występujące w Φ zmienne. W przypadku klasycznego systemu logicznego, w którego języku nie ma stałych pozalogicznych, dziedzina $\mathcal{M} = \langle U, R_1, R_2, \ldots, R_k \rangle$ jest zredukowana do uniwersum U, a przy tym w każdej dziedzinie terminy logiczne są rozumiane tak samo (standardowo).

Definicja ta dotyczy dowolnego wyrażenia zdaniowego języka J, a więc zarówno funkcji zdaniowych, jak i zdań, choć w przypadku zdań i pojęcie spełniania, i pojęcie prawdziwości są skrajnymi przypadkami pojęcia ogólnego (tak samo, jak pojęcie spełniania dla zdań jest skrajnym przypadkiem pojęcia spełniania dla funkcji zdaniowych).

Na podstawie definicji **D3** da się w metajęzyku MJ udowodnić każdą równoważność podpadającą pod schemat:

(*) Zdanie Φ języka J jest prawdziwe w dziedzinie $\mathcal{M} = \langle U, R_1, R_2, \ldots, R_k \rangle$ wtedy i tylko, gdy $MJ(\Phi)$.

W schemacie (*) zwrot „zdanie Φ” jest metajęzykową nazwą zdania Φ, a symbol „$MJ(\Phi)$” oznacza przekład zdania Φ na metajęzyk[4]. Prawa

[4] Według A. Tarskiego – od którego pochodzi definicja prawdziwości oparta na pojęci spełniania – możliwość udowodnienia, na podstawie pojęcia (definicji) zdania prawdziwego, równoważności podpadających pod ten schemat jest warunkiem koniecznym merytorycznej trafności semantycznej definicji prawdy – zob. A. Tarski,

strona w metajęzyku odnosi się do tych samych przedmiotów, o których mowa (w języku przedmiotowym badanej teorii) w zdaniu, które po lewej stronie równoważności jest oznaczone metajęzykową nazwą i o którym jest orzekana prawda.

Metajęzykowe nazwy wyrażeń można tworzyć według rozmaitych reguł. Na przykład dla wyrażenia rachunku zbiorów „$(\bigwedge A)\ A \subset A$" – zapisanego w notacji stosowanej w **RIV.1, a które można w innej notacji zapisać jako $(\bigwedge x_1)\ x_1 \subset x_1$ – metajęzykowa nazwa, skrócona zgodnie z przyjętymi przez Tarskiego regułami tworzenia takich nazw w symbolicznym metajęzyku, to „$\cap_1\ \mathrm{i}_{1,1}$"; ta symboliczna nazwa, odczytana w metajęzyku naturalnym brzmi: wyrażenie, w którym inkluzja łączy zmienną o indeksie 1 ze zmienną o indeksie 1, poprzedzane kwantyfikatorem ogólnym wiążącym tę samą zmienną[5]. Stosując taki sposób tworzenia metajęzykowych nazw wyrażeń można ogłosić na przykład, że w dziedzinie $\mathcal{M}$, której bazą U jest uniwersum zbiorów z określoną w nim relacją inkluzji, jest spełniona równoważność:

$\cap_1\ \mathrm{i}_{1,1}$ jest zdaniem prawdziwym, tj. $\cap_1\ \mathrm{i}_{1,1} \in E(\mathcal{M})$ wtedy i tylko, gdy $(\bigwedge x_1 \in U)\ x_1 \subset x_1$, tj. gdy każdy zbiór zawiera się w sobie.

Przyjmijmy jednak, zgodnie ze sposobem już stosowanym, że skrótem metajęzykowej ogólnej nazwy „wyrażenie Φ" jest symbol „$\ulcorner\Phi\urcorner$". Warto także przyjąć, by nie zmieniać dotychczas stosowanego zapisu, że tłumaczenie $MJ(\Phi)$ powstaje w wyniku zamiany (przetłumaczenia) symboli predykatowych $P_1, P_2, ..., P_k$ wyrażenia Φ na metajęzykowe symbole predykatowe $R_1, R_2, ..., R_k$ i zamiany zmiennych wolnych $x_1, x_2, ..., x_t$ na symbole $a_1, a_2, ..., a_t$ oraz ograniczenia (relatywizację) kwantyfikatorów wyrażenia Φ do uniwersum dziedziny $\mathcal{M} = \langle U, R_1, R_2, ..., R_k \rangle$, tj. do zbioru U. Uzyskane w ten sposób z wyrażenia Φ wyrażenie $\Phi(P_1/R_1, P_2/R_2, ..., P_k/R_k, \bigwedge/U, x_1/a_1, x_2/a_2, ..., x_t/a_t)$ jest metajęzykowym

Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych, dz. cyt., s. 48–49. „Merytorycznej", tj. ujmującej intuicje związane z prawdziwością, a zgodne z jej rozumieniem wywodzącym się od Arystotelesa: zdanie jest prawdziwe wtedy i tylko, gdy jest tak, jak zdanie to głosi. Fakt, że z definicji prawdy wynikają wszystkie równoważności podpadające pod schemat (*), świadczy o tym, że Tarskiego definicja prawdy chwyta intuicje zawarte w koncepcji klasycznej, tj. zgodnej z definicją Arystotelesa. Zob. J. Woleński, *Epistemologia. Poznanie – prawda – wiedza – realizm*, dz. cyt., s. 181–354; tenże, *Semantics and Truth*, dz. cyt., s. xi–xix, 271–330; a także A.C. Grayling, *An Introduction to Philosophical Logic*, dz. cyt., s. 122–187.

[5] O regułach tworzenia metajęzyka i kolejnych etapach budowania metasystemu zob. A. Tarski, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, dz. cyt., s. 16–59.

tłumaczeniem wyrażenia Φ. Wtedy odpowiednikiem schematu (*) na poziomie pojęcia spełniania jest następujący schemat – poprzedzony warunkiem, że $\{a_n\}$ jest dowolnym ciągiem w dowolnej, lecz określonej dziedzinie $\mathcal{M} = \langle U, R_1, R_2, ..., R_k \rangle$, tj. $\{a_n\} \in U^{\mathcal{N}}$:

(**) $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}$ ($\ulcorner\Phi\urcorner$, $\{a_n\}$) wtedy i tylko, gdy $\ulcorner\Phi\urcorner(P_1/R_1, P_2/R_2, ..., P_k/R_k, \bigwedge/U, x_1/a_1, ..., x_t/a_t)$.

Na przykład prawo $A \subset (A \cup B)$ (**RIV.1: **T11**), zapisane zgodnie z przyjętymi umowami notacyjnymi, to $x_1 \subset (x_1 \cup x_2)$. Można, zgodnie ze schematem (**) powiedzieć, że w uniwersum U zbiorów z relacją inkluzji i działaniem (dwuargumentową funkcją) dodawania zbiorów:

$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner x_1 \subset (x_1 \cup x_2)\urcorner, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $a_1 \subset (a_1 \cup a_2)$,

czyli, gdy chodzi o prawdziwość:

$\ulcorner x_1 \subset (x_1 \cup x_2)\urcorner \in E(\mathcal{M})$ *wtw* $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner x_1 \subset (x_1 \cup x_2)\urcorner, \{a_n\})$ *wtw*
wtw $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ a_1 \subset (a_1 \cup a_2)$.

Dla prawa $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ (**RIV.1: **T3**) uzyskane w ten sam sposób (i dla tej samej interpretacji semantycznej) formuły równoważne to:

$\ulcorner(x_1 \subset x_2 \wedge x_2 \subset x_3) \Rightarrow x_1 \subset x_3\urcorner \in E(\mathcal{M})$,
$(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(x_1 \subset x_2 \wedge x_2 \subset x_3) \Rightarrow x_1 \subset x_3\urcorner, \{a_n\})$ oraz
$(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ [(a_1 \subset a_2 \wedge a_2 \subset a_3) \Rightarrow a_1 \subset a_3]$.

Warto dostrzec, że w schematach (*) oraz (**) mowa o wyrażeniach języka i metajęzyka, czyli schematy te są twierdzeniami metametajęzyka.

Z definicji prawdy (**D3**) i spełniania (**D2**) oraz praw rozkładania i wyciągania kwantyfikatorów wynikają następujące twierdzenia spełnione dla dowolnych wyrażeń zdaniowych:

L1.

- **a** $\ulcorner\Phi \wedge \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ *wtw* $\Phi \in E(\mathcal{M}) \wedge \Psi \in E(\mathcal{M})$;
- **b** Jeżeli $(\Phi \in E(\mathcal{M}) \vee \Psi \in E(\mathcal{M}))$, to $\ulcorner\Phi \vee \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$;
- **c** Jeżeli $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$, to $(\Phi \in E(\mathcal{M}) \Rightarrow \Psi \in E(\mathcal{M}))$;
- **d** Jeżeli $\ulcorner\Phi \Leftrightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$, to $(\Phi \in E(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \Psi \in E(\mathcal{M}))$.

Dowód:
W zapisach opartych na definicji spełniania **D2** zamiast „$(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})$”, będzie stosowany krótszy napis „$(\bigwedge \{a_n\})$”, tym bardziej, że do danej dziedziny, a więc i do danego jej uniwersum, będzie relatywizował wskaźnik $\mathcal{M}$.

a.
Twierdzenie
1. $\ulcorner\Phi \wedge \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$
jest równoważne:
2. $(\bigwedge \{a_n\})$ $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \wedge \Psi\urcorner, \{a_n\})$ {**D3.a**, 1}
3. $(\bigwedge \{a_n\})$ $[\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \wedge \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})]$ {**D2.2b**, 3}
4. $(\bigwedge \{a_n\})$ $[\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})] \wedge (\bigwedge \{a_n\}$ $[\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})]$
{**RIII.2: **T5**, tj. $\bigwedge\|\wedge$, 3}.
Zatem: $\Phi \in E(\mathcal{M}) \wedge \Psi \in E(\mathcal{M})$ {**D3.a**, 4}. ■
b.
Alternatywa
1. $\Phi \in E(\mathcal{M}) \vee \Psi \in E(\mathcal{M})$
jest równoważna:
2. $(\bigwedge \{a_n\}$ $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \vee (\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})$ $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$ {**D3.a**, 1},
z którego wynika
3. $(\bigwedge \{a_n\})$ $[\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \vee \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})]$ {**RIII.2: **T10**, tj. $\vee|\bigwedge$, 2},
równoważne z:
4. $(\bigwedge \{a_n\})$ $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \vee \Psi\urcorner, \{a_n\})$ {**D2.2c**, 3}
oraz:
$\ulcorner\Phi \vee \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {**D3.a**, 4}. ■
c.
Twierdzenie
1. $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {zał.}
jest równoważne:
2. $(\bigwedge \{a_n\})$ $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner, \{a_n\})$ {**D3.a**, 1}
oraz
3. $(\bigwedge \{a_n\})$ $[\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})]$ {**D2.2d**, 2},
z którego wynika {**RIII.2: **T6**, tj. $\bigwedge|\Rightarrow$, 3}
4. $(\bigwedge \{a_n\})$ $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})) \Rightarrow (\bigwedge \{a_n\})$ $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$
równoważne z
$\Phi \in E(\mathcal{M}) \Rightarrow \Psi \in E(\mathcal{M})$ {**D3.a**, 4}. ■
d.
Twierdzenie
1. $\ulcorner\Phi \Leftrightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {zał.}
jest równoważne:
2. $(\bigwedge \{a_n\})$ $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \Leftrightarrow \Psi\urcorner, \{a_n\})$ {**D3.a**, 1}
oraz
3. $(\bigwedge \{a_n\})$ $[\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \Leftrightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})]$ {**D2.2e**, 2}

Z twierdzenia 3 wynika

4. $(\bigwedge \{a_n\})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \Leftrightarrow (\bigwedge \{a_n\})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$

{**RIII.2: **T8**, tj. $\bigwedge|\Leftrightarrow$, 3},

równoważne z

$\Phi \in E(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \Psi \in E(\mathcal{M})$ {**D3.a**, 4}.■

Można powiedzieć, że prawidłowości sformułowane w **L1** dotyczą rozkładania/wyciągania orzecznika prawdy na/przed człony koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności. Jak widać, w przypadku koniunkcji orzecznik ten może być i rozkładany, i wyciągany, w przypadku alternatywy – tylko wyciągany, a w implikacji i równoważności – tylko rozkładany. Da się natomiast okazać, że w zakresie zdań zależności te są pełne, tj. równoważnościowe.

L2. Jeżeli Φ i Ψ są zdaniami, to:

- **a** $\ulcorner\Phi \wedge \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ *wtw* $\Phi \in E(\mathcal{M}) \wedge \Psi \in E(\mathcal{M})$;
- **b** $\ulcorner\Phi \vee \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ *wtw* $(\Phi \in E(\mathcal{M}) \vee \Psi \in E(\mathcal{M}))$;
- **c** $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ *wtw* $(\Phi \in E(\mathcal{M}) \Rightarrow \Psi \in E(\mathcal{M}))$;
- **d** $\ulcorner\Phi \Leftrightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ *wtw* $(\Phi \in E(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \Psi \in E(\mathcal{M}))$.

D o w ó d:

W kontekście **L1** i faktu, że każde zdanie jest wyrażeniem zdaniowym, do udowodnienia są tylko implikacja prosta równoważności **b** oraz implikacje odwrotne równoważności **c** i **d** (nadal będzie stosowany skrót „$(\bigwedge \{a_n\})$" zamiast „$(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})$").

b.

⍈

1. $\ulcorner\Phi \vee \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {zał.}.
2. $\sim(\Phi \in E(\mathcal{M}) \vee \Psi \in E(\mathcal{M}))$ {zdn.}

Z założenia 2. wynika:

3. $\Phi \notin E(\mathcal{M}) \wedge \Psi \notin E(\mathcal{M})$ {**NA**: 2},
4. $(\bigvee \{a_n\}) \sim(\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \wedge (\bigvee \{a_n\}) \sim(\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$ {$\sim\bigwedge$, **D3.a**, 3},
5. $\sim(\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}') \wedge \sim(\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}'')$ {**O**$\bigvee$: 4}.

Natomiast założenie dowodzonego twierdzenia implikuje:

6. $(\bigwedge \{a_n\})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \vee \Psi\urcorner, \{a_n\})$ {**D3.a**, 1},
7. $(\bigwedge \{a_n\})\ [\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \vee \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})]$ {**D2.2.c**, 6},
8. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}') \vee \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}')$ {**O**$\bigwedge$: 7},
9. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}'') \vee \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}'')$ {**O**$\bigwedge$: 7}.

Łącząc konsekwencje obu tych założeń, można uznać:

10. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}')$ {**OA**: 8, 5}

11. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}'')$ {**OA**: 9, 5}

Ponieważ – zgodnie z ogólnym założeniem twierdzenia **L2** – Φ i Ψ to zdania, więc:

12. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}') \Leftrightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}'')$ {**T2**, 10}

a zatem:

13. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}'')$ {$\mathbf{RO}_{\Leftrightarrow}$: 12, 10},

co jest sprzeczne z 6. ■

c.

$\boxed{\vdash}$

1. $(\Phi \in E(\mathcal{M}) \Rightarrow \Psi \in E(\mathcal{M}))$ {zał.}
2. $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \notin E(\mathcal{M})$ {zdn.}
3. $(\bigvee \{a_n\}) \sim(\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner, \{a_n\})$ {$\sim\bigwedge$, **D3.a**, 2}
4. $\sim(\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner, \{a_n\}')$ {**O**$\bigvee$: 3}
5. $\sim(\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}') \Rightarrow (\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}')$ {$\mathbf{TR}_{\Leftrightarrow}$: **D2.2d**, 4}
6. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}' \wedge \sim(\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}'$ {**NI**: 5}
7. $(\bigwedge \{a_n\})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \Rightarrow (\bigwedge \{a_n\})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})]$ {**D3.a**, 1}
8. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}'$ {**OK**: 6}
9. $(\bigvee \{a_n\})\ (\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}')$ {**D**$\bigvee$: 8}

Ponieważ Φ jest zdaniem, więc:

10. $(\bigwedge \{a_n\})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ {**T3**, 9}
11. $(\bigwedge \{a_n\})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$ {**RO**: 7, 11}
12. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}')$ {**O**$\bigwedge$: 11}

sprz.: 12, 6. ■

d.

$\boxed{\vdash}$

Założenie

1. $\Phi \in E(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \Psi \in E(\mathcal{M})$

można równoważnie zapisać jako koniunkcję:

2. $(\Phi \in E(\mathcal{M}) \Rightarrow \Psi \in E(\mathcal{M})) \wedge (\Psi \in E(\mathcal{M}) \Rightarrow \Phi \in E(\mathcal{M}))$ {**OR**: 1}

oraz

3. $(\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})) \wedge ((\Psi \Rightarrow \Phi)\urcorner \in E(\mathcal{M}))$ {**L2.c**, 2}
4. $\ulcorner(\Phi \Rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \Rightarrow \Phi)\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {**L1.a**, 3},

a ostatecznie:

$\ulcorner\Phi \Leftrightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {**DR**: 4}. ■

Fakt, że definicja **D3** dotyczy przede wszystkim zdań, traktowanych jako szczególnego rodzaju funkcje zdaniowe (funkcje zdaniowe bez zmiennych wolnych), jest widoczny w kolejnym twierdzeniu.

T4 Jeśli Φ jest wyrażeniem o zmiennych wolnych $x_1, x_2, \ldots, x_t$, to $\Phi \in E(\mathcal{M})$ wtedy i tylko, gdy $\ulcorner(\bigwedge x_1, x_2, \ldots, x_t)\ \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$.

D o w ó d:

$\boxed{\rightarrow}$

Jeżeli

1. $\Phi \in E(\mathcal{M})$ {zał.},

czyli Φ jest prawdziwe w $\mathcal{M}$, to – zgodnie z **D3** – Φ jest spełnione przez dowolny ciąg $\{a_n\}$ przedmiotów z dziedziny U, a więc także przez każdy ciąg, który na miejscu i, $1 \leq i \leq t$, ma dowolny przedmiot $a \in U$; a zatem

2. $(\bigwedge a \in U)\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}(a_i/a))$,

a wobec tego – na podstawie **D2.2f**:

3. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigwedge x_i, 1 \leq i \leq t)\ \Phi\urcorner, \{a_n\})$,

czyli

4. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}\ \ulcorner(\bigwedge x_1, x_2, \ldots, x_t)\ \Phi\urcorner, \{a_n\})\urcorner$.

Skoro dowolny ciąg $\{a_n\}$ z $\mathcal{M}$ spełnia wyrażenie $\ulcorner(\bigwedge x_1, x_2, \ldots, x_t)\ \Phi\urcorner$, to $\ulcorner(\bigwedge x_1, x_2, \ldots, x_t)\ \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {**D3**}.

$\boxed{\leftarrow}$

Jeśli

1. $\ulcorner(\bigwedge x_1, x_2, \ldots, x_t)\ \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$,

czyli każdy ciąg $\{a_n\}$ spełnia wyrażenie $\ulcorner(\bigwedge x_1, x_2, \ldots, x_t)\ \Phi\urcorner$ {**D3**}, to

2. dowolny ciąg spełnia: wyrażenie $\ulcorner(\bigwedge x_2, \ldots, x_t)\ \Phi\urcorner$, w którym jedyną zmienną wolną jest x_1; wyrażenie $\ulcorner(\bigwedge x_3, \ldots, x_t)\ \Phi\urcorner$, w którym zmiennymi wolnymi są x_1 oraz x_2; itd.{**D2.2f**} – czyli:

3. każdy ciąg $\{a_n\}$ spełnia wyrażenie Φ o zmiennych wolnych $x_1, x_2, \ldots, x_t$, a to znaczy, że $\Phi \in E(\mathcal{M})$ {**D3**}. ■

Prawidłowości dotyczące spełniania zdań przez ciągi przedmiotów (spełniania w danym wartościowaniu) – sformułowane w **T2** oraz **T3** – są widoczne także, gdy mowa o prawdziwości zdań.

T5 Jeśli Φ jest zdaniem i $\mathcal{M} = \langle U, R_1, R_2, \ldots, R_k \rangle$ jest dziedziną niepustą, tj. $U \neq \emptyset$, to $\Phi \in E(\mathcal{M})$ wtedy i tylko, gdy $(\bigvee \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$.

D o w ó d:

Jako że

1. Φ jest zdaniem i $U \neq \emptyset$ {zał.},

więc – zgodnie z implikacją **T3**, której poprzednik jest spełniony {1} – prawdziwa jest równoważność

2. $(\bigvee \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$.

Jednocześnie – w myśl **D3**:
3. $\Phi \in E(\mathcal{M})$ wtedy i tylko, gdy $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})$ $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$.
Zatem:
$\Phi \in E(\mathcal{M})$ wtedy i tylko, gdy $(\bigvee \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})$ $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ {3, 2}. ■

Ważne własności zbioru zdań $E(\mathcal{M})$, tj. ogółu zdań prawdziwych w określonej dziedzinie, są widoczne w kontekście dowolnej pary zdań sprzecznych, tj. Φ i $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner$ – ilekroć będzie mowa o dziedzinie niepustej, chodzi (co widoczne w **T5**) o taką, której uniwersum U jest zbiorem niepustym.

T6 Jeśli dziedzina $\mathcal{M} = \langle U, R_1, R_2, \ldots, R_k\rangle$ jest niepusta, to:
$\sim(\Phi \in E(\mathcal{M}) \wedge \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M}))$.

D o w ó d:

Ponieważ negacja $\sim(\Phi \in E(\mathcal{M}) \wedge \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M}))$ jest równoważna alternatywie:
$\Phi \notin E(\mathcal{M}) \vee \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \notin E(\mathcal{M})$ {**NK**}, wiec w dowodzie wprost wystarczy okazać, że:
$\sim(\Phi \notin E(\mathcal{M})) \Rightarrow \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \notin E(\mathcal{M})$ $\{(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow (\sim\Phi \Rightarrow \Psi)\}$.
Rzeczywiście, dla dowolnego wyrażenia Φ jest tak, że jeśli

1.1 $\Phi \in E(\mathcal{M})$ {zd.},

to Φ jest spełnione przez każdy ciąg z dziedziny $\mathcal{M}$ {**D3**}, co znaczy, że

1.2 istnieją w niepustej dziedzinie $\mathcal{M}$ ciągi niespełniające wyrażenia $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner$ {**D2.a**},

co znaczy, że $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner$ nie jest spełnione dla każdego ciągu, czyli

1.3 $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \notin E(\mathcal{M})$ {**D3**}.

Zatem: $\sim(\Phi \notin E(\mathcal{M})) \Rightarrow \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \notin E(\mathcal{M})$ $\{1.1 \Rightarrow 1.3\}$.

Można także, w dowodzie niewprost, okazać, że przypuszczenie:
1. (i) $\Phi \in E(\mathcal{M})$ oraz (ii) $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {zdn.}, rozwinięte zgodnie z **D3** i **D2.2a**, prowadzi do sprzeczności: jeśli bowiem (ii), co znaczy, że $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner$ jest spełnione przez każdy ciąg {**D3**}, to (o ile $\mathcal{M}$ jest niepusta) na pewno istnieje ciąg $\{a_n\}$ taki, że $\sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ {**D2.2a**}, czyli wyrażenie Φ nie jest spełnione przez każdy ciąg, co sprzeczne z (i) rozwiniętym zgodnie z **D3**.■

Twierdzenie **T6** jest metalogicznym odpowiednikiem prawa niesprzeczności. Zgodnie z nim żadne dwa wyrażenia sprzeczne nie mogą być zarazem prawdziwe w dowolnej niepustej dziedzinie. Prawidłowość ta dotyczy dowolnych wyrażeń zdaniowych, a więc i funkcji zdaniowych, i zdań. Jeśli natomiast chodzi o zdania, to:

T7. Jeśli Φ jest zdaniem i $\mathcal{M} = \langle U, R_1, R_2, \ldots, R_k \rangle$ jest dziedziną niepustą, to
a $\Phi \in E(\mathcal{M}) \vee \ulcorner\sim\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$;
b $\Phi \notin E(\mathcal{M})$ wtedy i tylko, gdy $\ulcorner\sim\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$.

Dowód:
a.
W dowodzie alternatywy $\Phi \in \mathcal{M} \vee \ulcorner\sim\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ wystarczy okazać, że:
$\Phi \notin E(\mathcal{M}) \Rightarrow \ulcorner\sim\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ $\{(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow (\sim\Phi \Rightarrow \Psi)\}$.
Jeśli
1.1 $\Phi \notin E(\mathcal{M})$ {zd.}, to
1.2 nie każdy ciąg $\{a_n\} \in U^{\mathcal{N}}$ spełnia Φ {**D3**},
czyli istnieje ciąg $\{a_n\} \in U^{\mathcal{N}}$ taki, że: $\sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ $\{\sim\bigwedge\}$, co znaczy, że
1.3 $(\bigvee \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\sim\Phi\urcorner, \{a_n\})$ {**D2.a**}.
Ponieważ $\ulcorner\sim\Phi\urcorner$, tak jak Φ, jest zdaniem, więc od 1.3 można przejść – na podstawie **T3** – do
1.4 $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\sim\Phi\urcorner, \{a_n\})$,
czyli do
1.5 $\ulcorner\sim\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {**D3**}.
Zatem: $\Phi \notin E(\mathcal{M}) \Rightarrow \ulcorner\sim\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ $\{1.1 \Rightarrow 1.5\}$, co równoważne dowodzonej alternatywie.
b.
Implikacja prosta jest bezpośrednim wnioskiem z **T7.a**. W dowodzie implikacji odwrotnej, jeśli:
1. $\ulcorner\sim\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {zał.},
to ponieważ $\ulcorner\sim\Phi\urcorner$ jest zdaniem oraz dziedzina $\mathcal{M}$ jest niepusta, więc – zgodnie z **T6**:
2. $(\bigvee \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\sim\Phi\urcorner, \{a_n\})$,
czyli – na podstawie **D2.a**:
3. $(\bigvee \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$,
co znaczy, że nie każdy ciąg spełnia Φ, a zatem $\Phi \notin E(\mathcal{M})$ {**D3**}. ■

Twierdzenie **T7.a** jest metalogicznym odpowiednikiem prawa wyłączonego środka, zwanym semantyczną zasadą wyłączonego środka. W myśl tego twierdzenia z dwóch zdań sprzecznych co najmniej jedno jest prawdziwe. Z kolei semantyczna zasada niesprzeczności, sformułowana dla zdań (i w sposób dopełniający komentarz do **T6**), głosi, że z dwóch zdań sprzecznych co najmniej jedno jest fałszywe. Natomiast **T7.b** jest uściśleniem obu tych zasad, zgodnie z którym z dwóch zdań sprzecznych dokładnie jedno jest prawdziwe, co znaczy, że dokładnie jedno jest fałszywe. Łatwo jest sprawdzić, że **T7.b** $\Rightarrow$ **T6** i **T7.b** $\Rightarrow$ **T7.a**, tj. że są spełnione implikacje:

$(\Phi \notin E(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})) \Rightarrow {\sim}(\Phi \in E(\mathcal{M}) \wedge \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M}))$

oraz

$(\Phi \notin E(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})) \Rightarrow (\Phi \in E(\mathcal{M}) \vee \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M}))$,

a implikacje odwrotne nie są prawdziwe.

Natomiast **T7.b** jest równoważnie sformułowane za pomocą alternatywy rozłącznej:

$(\underline{\vee})\quad \Phi \in E(\mathcal{M}) \underline{\vee} \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$.

Z alternatywy tej, tak samo jak z równoważności **T7.b**, wynikają semantyczna zasada niesprzeczności i semantyczna zasada wyłączonego środka, tj. $(\underline{\vee}) \Rightarrow$ **T6** i $(\underline{\vee}) \Rightarrow$ **T7.a**. Ponieważ drugi człon tej alternatywy, tj. $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$, jest równoważny z $\Phi \notin E(\mathcal{M})$, więc można także powiedzieć, że zgodnie z **T7.b** każde zdanie jest prawdziwe albo fałszywe.

Zastosowanie pojęcia prawdziwości uściślonego w **D3** potwierdza więc intuicje wiązane z pojęciem prawdziwości, które były zakładane we wcześniejszych rozważaniach (zwłaszcza w części pierwszej). Do supozycji towarzyszących zdroworozsądkowemu rozumieniu prawdziwości, potwierdzonych uściślonymi analizami, należą na pewno twierdzenia: że dwa zdania sprzeczne nie mogą być jednocześnie prawdziwe (**T6**) ani jednocześnie fałszywe (**T7.a**), że każde zdanie jest albo prawdziwe, albo fałszywe (**T7.b**). Uściślone pojęcie prawdziwości sprawdziło się także w kontekście rozumienia spójników prawdziwościowych: koniunkcja zdań jest prawdziwa wtedy i tylko, gdy prawdziwe jest każde z jej zdań składowych, alternatywa – gdy co najmniej jedno z nich, implikacja – gdy jest wykluczone, by pierwsze zdanie było prawdziwe, a drugie fałszywe, a równoważność wtedy i tylko, gdy oba zdania mają tę samą wartość logiczną (**L2**).

2. Systemy dedukcyjne – charakterystyka semantyczna

Uściślone pojęcie prawdy będzie w tym podrozdziale zastosowane do tez systemu oraz w charakterystyce systemu twierdzeń prawdziwych, następnie w definicji pojęcia modelu i jego odmian oraz w semantycznych definicjach niesprzeczności, kategoryczności i pełności systemów dedukcyjnych.

2.1 Prawdziwość twierdzeń i własności zbioru twierdzeń prawdziwych

Ponieważ teorie aksjomatyczne oparte na logice klasycznej mogą być stosowane (semantycznie interpretowane) w różnych dziedzinach, więc jest także definiowane pojęcie prawdziwości wyrażenia systemu niezrelatywizowane do określonej dziedziny, będące uogólnieniem pojęcia wyrażenia prawdziwego w danej dziedzinie (***RII.1: **D3.a**). A jako że w wyrażeniach systemów logicznych nie występują stałe pozalogiczne, co w stosowanej tu notacji znaczy, że dziedziną jest uniwersum *U*, więc w przypadku wyrażeń systemów logicznych można powiedzieć (uogólniając określenie ***RII.1: **D3.b**), że są prawdziwe wtedy i tylko, gdy są prawdziwe w każdym niepustym zbiorze, co znaczy – jak wiadomo – że są spełnione przez każdy ciąg przedmiotów, którego zapasem jest dowolny niepusty zbiór *U*.

Oto stosowne określenia.

D1. **a** Wyrażenie *Φ* opartego na logice systemu aksjomatycznego <*A*, ***D***> jest prawdziwe wtedy i tylko, gdy jest prawdziwe w każdej dziedzinie $\mathcal{M}$ tego systemu.

b Wyrażenie *Φ* klasycznego rachunku logicznego jest prawdziwe wtedy i tylko, gdy jest prawdziwe w każdej dziedzinie $\mathcal{M}$ niepustej.

Dysponując uściślonym pojęciem prawdy, można okazać, że wszystkie tezy logiki klasycznej są prawdziwe w sensie określonym w **D1.b**, tj. prawdziwe w każdej dziedzinie niepustej. Ponieważ rachunki logiczne nie były w tym opracowaniu budowane metodą aksjomatyczną, więc zamiast okazywania, że prawdziwe w każdej dziedzinie są aksjomaty logiki klasycznej, a następnie, że są też prawdziwe ich konsekwencje, trzeba okazać, że niezawodne są reguły dowodzenia przyjęte w punkcie wyjścia rachunków budowanych metodą założeniową, potwierdzając intuicyjne rozumienie niezawodności, tj.: reguła niezawodna zawsze prowadzi od prawdziwych założeń do prawdziwego wniosku (**RI.2).

Reguły pierwotne dołączania nowych wierszy do dowodu przyjęte w systemie założeniowym KRZ (**RI.3) to reguła odrywania (**RO**) oraz reguły opuszczania i dołączania dla koniunkcji (**OK**, **DK**), równoważności (**OR**, **DR**) i alternatywy (**OA**, **DA**). W WRP, obok zakładanych w nim, odpowiednio wzmocnionych reguł KRZ (**RIII.2.1.2), jako reguły pierwotne specyficzne dla tego rachunku zostały przyjęte reguły dołączania i opuszczania kwantyfikatorów (**O**⋀, **D**⋀, **O**⋁, **D**⋁).

T1.1 Jeśli Φ i Ψ są wyrażeniami zdaniowymi i $\mathcal{M} = <U, R_1, R_2, ..., R_k>$ jest dziedziną niepustą, to:

a Jeżeli $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ oraz $\Phi \in E(\mathcal{M})$, to $\Psi \in E(\mathcal{M})$;

b $\ulcorner\Phi \wedge \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ *wtw* $\Phi \in E(\mathcal{M})$ oraz $\Psi \in E(\mathcal{M})$;

c $\ulcorner\Phi \Leftrightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ *wtw* $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ i $\ulcorner\Psi \Rightarrow \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$;

d Jeżeli $\ulcorner\Phi \vee \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ oraz $\Phi \notin E(\mathcal{M})$, to $\Psi \in E(\mathcal{M})$;

e Jeżeli $\Phi \in E(\mathcal{M})$, to $\ulcorner\Phi \vee \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$;

f Jeżeli $\ulcorner(\bigwedge x_i)\urcorner\ \Phi \in E(\mathcal{M})$, to $\ulcorner\Phi(x_i/\beta)\urcorner \in E(\mathcal{M})$;

g Jeżeli $\Phi \in E(\mathcal{M})$ i x_i nie jest zmienną wolną w założeniach dowodu, to $\ulcorner(\bigwedge x_i)\ \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$;

h Jeżeli $\ulcorner\Phi(x_i/\beta)\urcorner \in E(\mathcal{M})$, to $\ulcorner(\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$;

i.1 Jeżeli $\ulcorner(\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$, to $\ulcorner\Phi(x_i/\tau_{\beta_1}, ..., {}_{\beta_n})\urcorner \in E(\mathcal{M})$;

i.2 Jeżeli $\ulcorner Z \Rightarrow (\bigvee x_1)\ \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ i $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ oraz x_i nie jest zmienną wolną w Z, tj. w założeniach dowodu, ani w Ψ, to $\Psi \in E(\mathcal{M})$.

Dowody tych twierdzeń warto poprzedzić kilkoma uwagami. Twierdzenia **a–e** to semantyczne odpowiedniki reguł pierwotnych systemu założeniowego KRZ przedstawionego w **RI.3. Jak widać, **T1.1.a** odpowiada **RO**, **T1.1.d – OA**, **T1.1.f – DA**. Natomiast **T1.1.b** odpowiada regułom **OK** i **DK**, a **T1.1.c** reprezentuje **OR** i **DR** – w tym sensie, że udowodnienie tych równoważności skutkuje okazaniem, że zarówno obie reguły dla koniunkcji, jak i reguły dla równoważności są niezawodne. Po drugie, każda z pierwotnych reguł wnioskowania systemu założeniowego KRZ ma podstawę w prawie tego rachunku, natomiast reguły pierwotne rachunku kwantyfikatorów – tu zapisane zgodnie z notacją przyjętą w metajęzyku *MJ* na oznaczanie zmiennych języka przedmiotowego – nie mają takiej podstawy, a ich stosowanie jest, jak wiadomo (**RIII.2.1.2), oparte na pojęciu prawidłowego podstawienia oraz na dodatkowych warunkach korzystania z tych reguł, zapewniających, że zawsze dojdzie się od prawdziwych założeń do prawdziwego wniosku.

D o w ó d :

a.

Z założeń

1. $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$

oraz

2. $\Phi \in E(\mathcal{M})$

wynika, że wyrażenia $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner$ i Ψ są spełnione w $\mathcal{M}$ przez każdy ciąg przedmiotów czerpanych z U, tj.

3. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner, \{a_n\})$

oraz

4. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})]$ {***RII.1: **D3**: 1, 2}.

Ponieważ – zgodnie z ***RII.1: **D2.2d** – dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ jest tak, że

$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$,

więc twierdzenie $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner, \{a_n\})$ jest równoważne implikacji

5. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ [\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})]$.

Wobec 4 więc można stwierdzić, że

6. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$ {$\bigwedge|\Rightarrow$: 5, 4},

co znaczy, że $\Psi \in E(\mathcal{M})$ {***RII.1: **D3**, 6}. ■

b.

Twierdzenie to jest bezpośrednim wnioskiem z **L1.a**

c.

$\boxed{\rightarrow}$

Wychodząc z założenia $\ulcorner\Phi \Leftrightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$, uzyskuje się na podstawie **D3** i ***RII.2: **D2.2e** następujący ciąg równoważnych twierdzeń:

1. $\ulcorner\Phi \Leftrightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$;
2. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \Leftrightarrow \Psi\urcorner, \{a_n\})$;
3. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ [\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \Leftrightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})]$.

Z ostatniej równoważności wynika, że

4. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \Leftrightarrow (\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$ {$\bigwedge|\Leftrightarrow$: 3},

czyli

5. $\Phi \in E(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \Psi \in E(\mathcal{M})$ {***RII.1: **D3**: 4}.

Sformułowane w tej sytuacji przypuszczenie, że

1.1 $\sim(\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M}))$ lub $\sim(\ulcorner\Psi \Rightarrow \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M}))$ {zd.}

prowadzi do sprzeczności, musiałoby wtedy bowiem – zgodnie z ***RII.1: **D3** i ***RII.1: **D2.2d** – być tak, że

1.2 istnieje ciąg $\{a_n\}$, który spełnia wyrażenie Φ, a nie spełnia wyrażenia Ψ, lub odwrotnie, co jest sprzeczne z twierdzeniem 5. rozwiniętym według ***RII.1: **D3**.

Zatem:

$\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ i $\ulcorner\Psi \Rightarrow \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {1.1 $\Rightarrow$ sprz.}.

$\boxed{\leftarrow}$

Koniunkcja

1. $\ulcorner \Phi \Rightarrow \Psi \urcorner \in E(\mathcal{M})$ i $\ulcorner \Psi \Rightarrow \Phi \urcorner \in E(\mathcal{M})$ {zał.}

jest równoważna kolejno z:

2. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner \Phi \Rightarrow \Psi \urcorner, \{a_n\}) \wedge (\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner \Psi \Rightarrow \Phi \urcorner, \{a_n\})$ {***RII.1: **D3**},

3. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ [\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner \Phi \Rightarrow \Psi \urcorner, \{a_n\}) \wedge \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner \Psi \Rightarrow \Phi \urcorner, \{a_n\})]$ {$\bigwedge \Vert \wedge$: 2},

4. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ [(\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})) \wedge$
   $\wedge\ (\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}) \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}))]$ {***RII.1: **D2.2d**: 3},

5. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ [(\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \Leftrightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})]$

oraz

6. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner \Phi \Leftrightarrow \Psi \urcorner, \{a_n\})$ {***RII.1: **D2.2e**: 5},

a zatem: $\ulcorner \Phi \Leftrightarrow \Psi \urcorner \in E(\mathcal{M})$ {***RII.1: **D3**: 6}. ■

d.

1. $\ulcorner \Phi \vee \Psi \urcorner \in E(\mathcal{M})$ i $\Phi \notin E(\mathcal{M})$ {zał.}

2. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner \Phi \vee \Psi \urcorner, \{a_n\})$ i $\ulcorner {\sim}\Phi \urcorner \in E(\mathcal{M})$ {***RII.1: **D3**, **T7.a**: 1}

3. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ [\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, a_n\}) \vee \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})] \wedge$
   $\wedge\ (\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner {\sim}\Phi \urcorner, \{a_n\})$ {***RII.1: **D3**: 2}

4. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ [\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \vee \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})] \wedge$
   $\wedge\ (\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ {\sim}\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ {***RII.1: **D2.2**: 3}

5. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ [(\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \vee \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})) \wedge {\sim}\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})]$ {$\bigwedge \Vert \wedge$, 4}

6. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$,

a zatem: $\Psi \in E(\mathcal{M})$ {***RII.1: **D3**: 5}. ■

e.

1. $\Phi \in E(\mathcal{M})$ {zał.}

2. $\Phi \in E(\mathcal{M}) \vee \Psi \in E(\mathcal{M})$ {**DA**: 1}.

Powołując się na **L1.b** można zatem uznać:

$\ulcorner \Phi \vee \Psi \urcorner \in E(\mathcal{M})$ {**RO**, **L1.b**, 2}. ■

f.

Zgodnie z ***RII.1: **D3**, formuła

1. $\ulcorner (\bigwedge x_i)\ \Phi \urcorner \in E(\mathcal{M})$ {zał.}

jest równoważna

2. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner (\bigwedge x_i)\ \Phi \urcorner, \{a_n\})$.

Jeśli

  1.1 x_i nie jest wolne w Φ lub $x_i = \beta$ {zd.},

to

  1.2 $\Phi = \ulcorner \Phi(x_i/\beta) \urcorner$, a więc

1.3 $\ulcorner\Phi(x_i/\beta)\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {**RZ**$_=$: 1, 1.2};

Jeśli natomiast

2.1 x_i jest wolne w Φ i $x_i \neq \beta$ {zd.}

to ponieważ jest prawdziwe wyrażenie $\ulcorner(\bigwedge x_i)\Phi\urcorner$, więc wobec 2 również $\ulcorner\Phi(x_i/\beta)\urcorner$ jest prawdziwe, tj.

2.2 $\ulcorner\Phi(x_i/\beta)\urcorner \in E(\mathcal{M})$

– jako że, zgodnie z warunkami prawidłowego podstawiania, przedmiot oznaczany przez β także jest czerpany z tego samego uniwersum U modelu $\mathcal{M}$, które przebiega zmienna x_i – czyli:

$\ulcorner\Phi(x_i/\beta)\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {1.1 $\Rightarrow$ 1.3, 2.1 $\Rightarrow$ 2.2}. ■

g.

1. $\Phi \in E(\mathcal{M})$ {zał.}.

Jeśli Φ jest tezą systemu i x_i jest zmienną wolną w Φ, to wniosek $(\bigwedge x_i)\ \Phi \in E(\mathcal{M})$ jest oczywisty na podstawie założenia 1. $\Phi \in E(\mathcal{M})$ oraz **T4**. W przypadku gdy Φ nie jest tezą, lecz wyrażeniem uzyskanym w dowodzie z założeń Z, tj. gdy

1* $\ulcorner Z \Rightarrow \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$,

wtedy jest istotne założenie, że

2 x_i nie jest zmienną wolną w Z.

Jeśli dla dowolnego $\{a_n\} \in U^{\mathcal{N}}$ jest tak, że

1.1 $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(Z, \{a_n\})$ {zd.},

to Z jest także spełnione przez każdy ciąg $\{a_n\}$', w którym na miejscu określonym wskaźnikiem zmiennej x_i, która nie jest wolna w Z, jest dowolny element $a \in U$, natomiast na miejscach pozostałych są te same przedmioty co w ciągu $\{a_n\}$ {def. $\{a\}$'}, czyli

1.2 $(\bigwedge a \in U)\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(Z, \{a_n\}')$ {***RII.1: **T1**: 1.1, 2, def. $\{a_n\}$'}.

Ponieważ $\ulcorner Z \Rightarrow \Phi\urcorner$ jest spełnione przez dowolny ciąg przedmiotów z U {***RII.1: **D3**, (1*), a – zgodnie z ***RII.1: **D2.2d** – jeżeli jakiś ciąg spełnia Z, to spełnia Φ, więc także

1.3 $(\bigwedge a \in U)\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}')$,

czyli – na podstawie równoważności ***RII.1: **D2.2f**:

1.4 $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigwedge x_i)\ \Phi\urcorner, \{a_n\})$.

Zatem:

3. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(Z, \{a_n\}) \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigwedge x_i)\ \Phi\urcorner, \{a_n\})$ {1.1 $\Rightarrow$ 1.4},

co – w myśl ***RII.1: **D2.2d** jest równoważne:

4. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner Z \Rightarrow (\bigwedge x_i)\ \Phi\urcorner, \{a_n\})$.

Jako że ciąg $\{a_n\}$ jest dowolny, więc ostatnią formułę można uogólnić do
5. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner Z \Rightarrow (\bigwedge x_i)\ \Phi\urcorner, \{a_n\})$,
co znaczy, że $\ulcorner Z \Rightarrow (\bigwedge x_i)\ \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$.
O ile więc prawdziwe są założenia Z, tj. $Z \in E(\mathcal{M})$, to również generalizacja $\ulcorner(\bigwedge x_i)\ \Phi\urcorner$ jest prawdziwa {**T1.1a**}. ■

h.

Założenie
1. $\ulcorner\Phi(x_i/\beta)\urcorner \in E(\mathcal{M})$
znaczy, że
2. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi(x_i/\beta)\urcorner, \{a_n\})$ {***RII.1: **D3**: 1}.
Jeśli x_i nie jest wolne w Φ, to jest wobec 1. oczywiste, że $(\bigvee x_i)\ \Phi \in E(\mathcal{M})$, jako że w tej sytuacji, jak wiadomo z warunków prawidłowego podstawiania, wyrażenie $\ulcorner\Phi(x_i/\beta)\urcorner$ jest identyczne z Φ.
Jeśli x_i jest wolne w Φ, to podstawiane za tę zmienną wyrażenie nazwowe β może być
(i) stałą,
(ii) zmienną wolną występującą w założeniach dowodu
albo
(iii) zmienną wolną występującą w tezie systemu (o ile $\ulcorner\Phi(x_i/\beta)\urcorner$ jest tezą).
W każdym ciągu $\{a_n\}$ spełniającym podstawienie $\ulcorner\Phi(x_i/\beta)\urcorner$ na miejscu odpowiadającym zmiennej x_i z wyrażenia Φ jest:
w sytuacji (i) konkretny przedmiot $a \in U$, oznaczany przez stałą β;
w przypadku (ii) jakiś przedmiot $a \in U$;
w sytuacji (iii) – dowolny przedmiot $a \in U$.
W każdej z tych sytuacji jest więc tak, że:
(*) $(\bigvee a \in U)\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}(a_i/a))$,
co – zgodnie z ***RII.1: **D2.2g** – jest równoważne z: $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner, \{a_n\})$.
Ponieważ ciąg $\{a_n\}$, o którym mowa w (*), jest dowolny, więc
$(\bigwedge \{a_n\})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner, \{a_n\})$,
co znaczy, że: $\ulcorner(\bigvee x_i)\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {**D3**}. ■

i.1

Przyjmując
1. $\ulcorner(\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {zał.},
rozważmy możliwe sytuacje.

Jeśli x_i nie jest wolne w Φ, to wyrażenie $\ulcorner\Phi(x_i/\tau_{\beta_1}, ..., _{\beta_n})\urcorner$ jest identyczne z Φ, a zatem $\ulcorner\Phi(x_i/\tau_{\beta_1}, ..., _{\beta_n})\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {1}.

Gdy x_i jest wolne w Φ, wtedy w podstawianym za tę zmienną wyrażeniu nazwowym $\tau_{\beta_1}, ..., _{\beta_n}$, w którym $\beta_1, ..., \beta_n$ to symbole pozostałych (tj.

różnych od x_i) zmiennych wolnych wyrażenia Φ, a τ to funktor nazwotwórczy argumentów nazwowych $\beta_1, ..., \beta_n$, o ile $n \geq 1$, albo stała nazwowa, gdy $n = 0$; natomiast wyrażenie nazwowe $\tau_{\beta_1}, ..., _{\beta_n}$ w każdej sytuacji (dla $n \geq 0$) oznacza przedmiot z zakresu zmiennej x_i (zależny od $\beta_1, ..., \beta_n$), który – gdy $\tau_{\beta_1}, ..., _{\beta_n}$ jest podstawione za zmienną x_i – spełnia Φ (**RIII.2.1.2).

Jeżeli $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ jest zbiorem wszystkich zmiennych wolnych wyrażenia $\ulcorner(\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner$, to zbiorem wszystkich zmiennych wolnych formuły Φ jest $\{\beta_1, ..., \beta_n, \alpha\}$, a podstawienia $\Phi(x_i/\tau_{\beta_1}, ..., _{\beta_n})$ – ponownie zbiór $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$.

Ponieważ ciągi $\{a_n\}$ i $\{a_n\}(a_i/a_\tau)$ – gdzie symbol „τ" jest upraszczającym zapisy skrótem symbolu „$\tau_{\beta_1}, ..., _{\beta_n}$" – nie różnią się na miejscach odpowiadających zmiennym wolnym $\beta_1, ..., \beta_n$, więc – zgodnie z ***RII.1: **T1** – dla dowolnego ciągu $\{a_n\}$ jest tak, że:
$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner, \{a_n\}(a_i\ /a_\tau))$.
Jako że przedmiot a_τ z zakresu zmiennej x_i, oznaczany przez wyrażenie nazwowe $\tau_{\beta_1}, ..., _{\beta_n}$, spełnia Φ, więc z przypuszczenia, że

1.1 istnieje ciąg niespełniający wyrażenia $\ulcorner\Phi(x_i/\tau_{\beta_1}, ..., _{\beta_n})\urcorner$ {zd.}, wynika, że

1.2 istnieje ciąg niespełniający formuły $\ulcorner(\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner$,

co jednak sprzeczne z założeniem dowodzonego twierdzenia, tj. z $\ulcorner(\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$, równoważnym – w myśl ***RII.1: **D3** – z ogólnym twierdzeniem
$(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_U(\ulcorner(\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner, \{a_n\})$.
Zatem: $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi(x_i/\tau_{\beta_1}, ..., _{\beta n})\urcorner, \{a_n\})$ {1.1 $\Rightarrow$ sprz.},
czyli $\ulcorner\Phi(x_i/\tau_{\beta_1}, ..., _{\beta n})\urcorner \in E(\mathcal{M})$. ■

i.2

Założenia dowodzonego twierdzenia to:
1. $\ulcorner Z \Rightarrow (\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$;
2. $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$;
3. α nie jest zmienną wolną w założeniach dowodu ani w Ψ.

Założenia 1. oraz 2. są równoważne z (odpowiednio 4–6 oraz 7–8):
4. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner Z \Rightarrow (\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner, \{a_n\})$ {***RII.1: **D3**: 1};
5. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ [\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(Z, \{a_n\}) \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigvee x_i)\Phi\urcorner, \{a_n\})]$ {***RII.1: **D2.2d**: 4};
6. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ [\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(Z, \{a_n\}) \Rightarrow (\bigvee a \in U)\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}(a_i/a))]$ {***RII.1: **D2.2g**: 5}

oraz
7. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner, \{a_n\})$ {***RII.1: **D3**: 2}
8. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ [\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})]$ {***RII.1: **D2.2d**: 7}.

Z 6 i 8 wynikają:
9. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})$ [$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(Z, \{a_n\})$] $\Rightarrow$
$\Rightarrow (\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})$ [$(\bigvee a \in U)$ $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}(a_i/a))$] {∧|⇒: 6}
10. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})$ [$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$] $\Rightarrow (\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})$ [$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$]
{∧|⇒: 8}.

Jeśli $\{a_n\} \in U^{\mathcal{N}}$, a $\{a_n\}' = \{a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots\} = \{a_n\}(a_i/a))$ jest ciągiem, o którym mowa w następniku implikacji 6, to – ponieważ zmienna x_i nie jest wolna w Z {3}, a więc ciągi $\{a_n\}$ i $\{a_n\}'$ nie różnią się na miejscach odpowiadających zmiennym wolnym – na podstawie ***RII.1: **T1**:
11. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}(a_i/a)) \Leftrightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$,
a wobec tego
12. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})$ [$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(Z, \{a_n\}) \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$] {$\mathbf{RZ}_{\Leftrightarrow}$: 6, 11},
a przy tym, zgodnie z drugim założeniem:
13. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})$ [$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$].
Przypuśćmy, że
1.1 $(\bigvee \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})$ $\sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$
oraz niech $\{a_n\}'' = \{a_1, \ldots, a_{i-1}, d, a_{i+1}, \ldots\} \in U^{\mathcal{N}}$ jest ciągiem takim, że
1.2 $\sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}'')$.
Jako że zmienna x_i nie jest wolna także w Ψ {3}, co znaczy, że. ciągi $\{a_n\}$ i $\{a_n\}''$ nie różnią się na miejscach odpowiadających zmiennym wolnym, więc – ponownie na podstawie ***RII.1: **T1**:
1.3 $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}$ $(\Phi, \{a_n\}(a_i/d)) \Leftrightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$,
czyli
1.4 $\sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$ {$\mathbf{RZ}_{\Leftrightarrow}$:1.2,1.3}.
Wobec tego także:
1.5 $\sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ {**TOL**: 10, 1.4};
1.6 $\sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(Z, \{a_n\})$ {**TOL**: 12, 1.5},
co świadczyłoby o tym, że
1.7 $\sim(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})$ [$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(Z, \{a_n\})$,
a więc także
1.8 $\sim(Z \in E(\mathcal{M}))$ {***RII.1:**D3**}.
O ile więc prawdziwe są założenia Z, tj. jeśli $Z \in E(\mathcal{M})$, to:
14. $\sim(\bigvee \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})$ $\sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$ {1.1 ⇒ sprz. z $Z \in E(\mathcal{M})$},
co równoważne z:
15. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})$ $\mathbf{sp}(\Psi, \{a_n\})$
oraz z
$\Psi \in E(\mathcal{M})$ {***RII.1: **D3**: 15}.

Warto dostrzec, że przyjąwszy założenie o prawdziwości założeń Z, można uzyskać końcowy wniosek $\Psi \in E(\mathcal{M})$ również w rozumowaniu wprost, tj. z pominięciem fragmentu dowodu 1.1–1.8. Z założenia tego wynika bowiem, że jeśli dowolny ciąg $\{a_n\} \in U^{\mathcal{N}}$ spełnia założenia Z dowodu, tj. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(Z, \{a_n\})$, to także $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ i $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$ {**RO**: 12, 13}, a więc $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}(\Psi, \{a_n\}) \Leftrightarrow \Psi \in E(\mathcal{M})$.■

Reguły wnioskowania przyjęte w punkcie wyjścia systemu założeniowego logiki klasycznej (**RI.3 i **RIII.2.1.2) są więc niezawodne w sensie zdroworozsądkowym: wnioskowania zgodne z tymi regułami zawsze prowadzą od założeń prawdziwych do prawdziwych wniosków. Dlatego wszystkie tezy tego systemu założeniowego są prawdziwe, a oparte na nich wtórne reguły dowodzenia są niezawodne. Ogólniej, tzn. odrywając się od konkretnego systemu założeniowego (**RI.3 i **RIII.2.1.2), a z myślą o znanych systemach (aksjomatycznych i założeniowych) logiki klasycznej można powiedzieć, że:

T1.2 Wszystkie tezy klasycznego rachunku logicznego są prawdziwe w każdej niepustej dziedzinie.

Treść tego twierdzenia można wyrazić używając pojęcia tautologii. Uściślając stosowane już rozumienie tautologii – tj. formuły, która dla każdego wartościowania przyjmuje końcową wartość prawdziwości (**RI.2: D1) – można powiedzieć, że:

D2 Wyrażenie Φ jest tautologią klasycznego rachunku logicznego wtedy i tylko, gdy jest prawdziwe w każdej dziedzinie niepustej, tj. gdy $(\bigwedge \mathcal{M})\ \Phi \in E(\mathcal{M})$,

a następnie stwierdzić:

T1.2’ Wszystkie tezy klasycznego rachunku logicznego są tautologiami, tj. są prawdziwe w każdej dziedzinie niepustej.

W przypadku aksjomatycznych systemów logiki klasycznej w dowodzie tego twierdzenia trzeba najpierw okazać, że są prawdziwe (są tautologiami) aksjomaty danego systemu, a następnie, że własność prawdziwości (tautologiczności) jest dziedziczona w wyniku stosowania pierwotnych reguł wnioskowania (wyprowadzania). Na przykład w metajęzykowym sformułowaniu aksjomatów klasycznego rachunku zdań – które, jak była o tym mowa (**RI.4), pozwala pominąć regułę podstawiania – ten drugi etap sprowadza się do okazania, że reguła odrywania nie wyprowadza poza zdania prawdziwe w danej dziedzinie.

Dla systemów opartych na klasycznym rachunku logicznym jest spełniona następująca inkluzja.

T2 $Cn_L(E(\mathcal{M})) \subset E(\mathcal{M})$.

D o w ó d:

1.1 $\Psi \in Cn_L(E(\mathcal{M}))$ {zd.}.

1.2 $(\bigvee C)$ $\mathrm{dow}_{E(\mathcal{M}),\, \boldsymbol{D}}(C, \Psi)$,

czyli istnieje dowód (wyprowadzenie) wyrażenia Ψ z wyrażeń $E(\mathcal{M})$ {***RI.2: **W2**: 1.1}. Niech:

1.3 $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ jest ciągiem (dowodem), o którym mowa w 1.2, przy czym, jak wiadomo, $\Psi = \Psi_n$ {***RI.2: **D3.1**: 1.2}.

Da się okazać indukcyjnie, że

(*) dla dowolnego wskaźnika i wyrazów ciągu $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$, tj. dla $1 \leq i \leq n$, jest tak, że: $\Psi_i \in E(\mathcal{M})$.

Dla $i = 1$ twierdzenie $\Psi_i \in E(\mathcal{M})$ jest oczywiste, jako że $\Psi_1 \in E(\mathcal{M})$. Niech więc:

k jest wskaźnikiem wyrazów ciągu $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ takim, że $1 < k \leq n$ oraz dla każdego $i < k$: $\Psi_i \in E(\mathcal{M})$ {zał. ind.}.

By uznać, że przy tym założeniu także $\Psi_k \in E(\mathcal{M})$, wystarczy dostrzec, że gdy funkcja konsekwencji jest określona przez zasady dowodowe klasycznego rachunku logicznego, wtedy kolejne wyrazy ciągu $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ są uzyskiwane w wyniku zastosowania działań wnioskowania opartych na regułach, o których – z **T1.1** – wiadomo, że prowadzą od prawdy do prawdy. Jeśli więc wyrazy poprzedzające są prawdziwe {zał. ind}, to i kolejne są prawdziwe, aż do wyrazu Ψ_k, o wskaźniku $k = n$. Wobec faktu, że $\Psi_n = \Psi$ {1.3}, można uznać:

1.4 $\Psi \in E(\mathcal{M})$.

Zatem:

1. $(\bigwedge \Psi)$ $[\Psi \in Cn_L(E(\mathcal{M})) \Rightarrow \Psi \in E(\mathcal{M})]$ {**D**$\bigwedge$: 1.1 $\Rightarrow$ 1.4},

co znaczy, że: $Cn_L(E(\mathcal{M})) \subset E(\mathcal{M})$ {**df**$\subset$: 1}.■

Warto odnotować fakt – ważny dla kolejnych wnioskowań – że **T2** jest równoważne z twierdzeniem:

L1 Jeżeli $X \subset E(\mathcal{M})$, to $Cn_L(X) \subset E(\mathcal{M})$,

tj.:

(+) $Cn_L(E(\mathcal{M})) \subset E(\mathcal{M}) \Leftrightarrow (X \subset E(\mathcal{M}) \Rightarrow Cn_L(X) \subset E(\mathcal{M}))$.

D o w ó d **(+)**:

$\boxed{\rightarrow}$

1. $Cn_L(E(\mathcal{M})) \subset E(\mathcal{M})$ oraz $X \subset E(\mathcal{M})$ {zał.}

1.1 $\Phi \in Cn_L(X)$ {zd.}.

Ponieważ $X \subset E(\mathcal{M})$ {1}, więc – zgodnie z ***RI.2: **T2’**

1.2 $Cn_L(X) \subset Cn_L(E(\mathcal{M}))$,

czyli

1.3 $Cn_L(X) \subset E(\mathcal{M})$ {**RO**: **RIV.1: **T3**, 1.2, 1},

a więc:

1.4 $\Phi \in E(\mathcal{M})$ {**RIV.1: **T4**: 1.1, 1.3}.

Zatem: $Cn_L(X) \subset E(\mathcal{M})$ {**df**$\subset$: **D**$\wedge$: 1.1 $\Rightarrow$ 1.4}.

$\boxed{\leftarrow}$

Jeśli

1. $X \subset E(\mathcal{M}) \Rightarrow Cn_L(X) \subset E(\mathcal{M})$ {zał.},

to – jako że

2. $E(\mathcal{M}) \subset E(\mathcal{M})$

– więc: $Cn_L(E(\mathcal{M})) \subset E(\mathcal{M})$ {**RO**: 1($X/E(\mathcal{M})$, 2}.

Twierdzenie **L1** jest bezpośrednim wnioskiem z równoważności **(+)** i **T2**.■

Zgodnie z **T2** konsekwencje wyrażeń prawdziwych w danej dziedzinie także są wyrażeniami w tej dziedzinie prawdziwymi. Zbiór $E(\mathcal{M})$ jest więc zamknięty ze względu na działania wnioskowania oparte na regułach, o których mowa w **T1.1**, a mówiąc prościej, działania te nie wyprowadzają poza zbiór wyrażeń prawdziwych w danej dziedzinie.

Ponieważ jednocześnie $X \subset Cn_L(X)$ – zgodnie z ***RI.2: **T1** – więc wnioskiem z **T2** i inkluzji odwrotnej jest:

W1 $Cn_L(E(\mathcal{M})) = E(\mathcal{M})$.

Ogół konsekwencji zbioru wszystkich wyrażeń prawdziwych w danej dziedzinie jest zatem tożsamy z ogółem wyrażeń prawdziwych w tej dziedzinie.

Oczywistą konsekwencją twierdzenia **T2**, odczytanego w kontekście ***RI.2: **D5.a**, jest wniosek:

W2 $E(\mathcal{M}) \in \boldsymbol{Sys}$,

zgodnie z którym zbiór zdań prawdziwych w danej dziedzinie jest systemem.

Sformułowane wyżej prawidłowości **T2**, **L1**, **W1** i **W2** – odnoszące się do ogółu $E(\mathcal{M})$ wyrażeń prawdziwych w dziedzinie $\mathcal{M}$ – mają swoje odpowiedniki dotyczące ogółu $\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ wyrażeń spełnionych przez dany ciąg $\{a_n\}$ z dziedziny $\mathcal{M}$. Nim twierdzenia te zostaną zapisane i uzasadnione, warto przypomnieć, że zbiór $E(\mathcal{M})$, zwany też zawartością modelu, to ogół wyrażeń spełnionych przez każdy ciąg przedmiotów z uniwersum U dziedziny $\mathcal{M}$. Dlatego ogół ten jest podzbiorem dowolnego zbioru $\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}_i)\}$, tj. wyrażeń spełnionych przez określony ciąg $\{a_n\}_i$ o wyrazach z U. Biorąc po uwagę ogół takich zbiorów, tj. klasę zbiorów $\{\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}_i)\}\}$, $i = 1, 2, \ldots$ można o zbiorze $E(\mathcal{M})$ powiedzieć, że jest ich częścią wspólną, czyli iloczynem:
$E(\mathcal{M}) = \bigcap \{\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}_i)\}\}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Oto zapisy twierdzeń dla zbioru $\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$:

T2’ $Cn_L\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$.

L1’ Jeżeli $X \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$, to $Cn_L(X) \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$.

Jak widać, formuły te mają strukturę analogiczną do twierdzeń dla $E(\mathcal{M})$, analogiczne są również dowody – także dlatego, że twierdzenia obu grup są ostatecznie wsparte na pojęciu spełniania wyrażenia zdaniowego przez ciąg przedmiotów.

D o w ó d T2’:

1.1 $\Phi \in Cn_L\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ {zd.}

1.2 istnieje dowód (wyprowadzenie) wyrażenia Φ z wyrażeń zbioru $\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ {***RI.2: **W2**: 1.1}.

Niech:

1.3 $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ jest ciągiem (dowodem), o którym mowa w 1.2, przy czym, $\Phi = \Psi_n$ {***RI.2: **D3.1**: 1.2}.

Da się okazać indukcyjnie, że:

(*) dla dowolnego wskaźnika i wyrazów ciągu $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$, tj. dla $1 \leq i \leq n$, jest tak, że: $\Psi_i \in \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$.

Niech: k jest wskaźnikiem wyrazów ciągu $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ takim, że $1 < k \leq n$ oraz dla każdego $i < k$: $\Psi_i \in \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ {zał. ind.}.

By okazać, że wtedy także $\Psi_k \in \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$, wystarczy przypomnieć fakt, że zasady dowodowe określające funkcję konsekwencji Cn_L gwarantują przechodzenie od wyrażeń prawdziwych do wyrażeń prawdziwych w dziedzinie $\mathcal{M}$ {**T1.1**}, czyli od wyrażeń spełnionych przez każdy ciąg przedmiotów z $\mathcal{M}$ do wyrażeń spełnionych przez każdy ciąg przedmiotów z $\mathcal{M}$ {**D3**}, a zatem także od spełnionych przez określony ciąg $\{a_n\}$ z $\mathcal{M}$ do spełnionych przez ten sam ciąg. Jeśli zatem, zgodnie z założeniem indukcyjnym, wyrazy poprzedzające w ciągu $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ mają tę własność, że $\Psi_i \in \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$, to również wyraz ostatni: $\Psi_n \in \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$, co znaczy, że

1.4 $\Phi \in \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ {1.3}.

Wobec tego:

$Cn_L\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ {**df**$\subset$: **D**$\wedge$: 1.1 $\Rightarrow$ 1.4}. ■

D o w ó d L1':

Da się okazać, że jest prawdziwa równoważność:

(+)' $Cn_L\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ *wtw*
wtw $X \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \Rightarrow Cn_L(X) \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$.

D o w ó d (+)':

$\boxed{\rightarrow}$

1. $Cn_L\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ oraz $X \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ {zał.},

1.1 $\Phi \in Cn_L(X)$ {zd.}.

Ponieważ $X \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ {1}, więc – zgodnie z ***RI.2: **T2'**:

1.2 $Cn_L(X) \subset Cn_L(\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$,

czyli:

1.3 $Cn_L(X) \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ {**RO**: **RIV.1: **T3**, 1.2, 1},

a więc:

1.4 $\Phi \in \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ {**RIV.1: **T4**: 1.1, 1.3}.

Zatem: $Cn_L(X) \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ {**df**$\subset$: **D**$\wedge$: 1.1 $\Rightarrow$ 1.4}.

$\boxed{\leftarrow}$

Jeśli

1. $X \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \Rightarrow Cn_L(X) \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ {zał.},

to – jako że

2. $\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$,

więc: $Cn_L\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$,
{**RO**: 1($X/\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$, 2},

co kończy dowód równoważności **(+)'** .

Twierdzenie **L1'** jest bezpośrednim wnioskiem z równoważności **(+)'** i **T2'**. ■

Jeśli połączy się inkluzję **T2'**, tj.

$Cn_L\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$

z – zagwarantowaną przez ***RI.2: **T1** inkluzją
$\{\Psi\text{: } \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \subset Cn_L\{\Psi\text{: } \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$,
można uznać wniosek analogiczny do wyżej sformułowanego **W1**:

W1' $Cn_L\{\Psi\text{: } \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} = \{\Psi\text{: } \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$.

Zgodnie z **W1'** ogół konsekwencji zbioru wszystkich wyrażeń spełnionych w dziedzinie $\mathcal{M}$ przez określony ciąg $\{a_n\}$ jest identyczny z ogółem wyrażeń spełnionych przez ten ciąg w $\mathcal{M}$.

W kontekście definicji systemu (***RI.2: **D5.a**) bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia **T2'** jest:

W2' $\{\Psi\text{: } \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \in \boldsymbol{Sys}$.

Można także okazać, że ogół zdań prawdziwych w danej dziedzinie jest systemem niesprzecznym i zupełnym.

T3 $E(\mathcal{M})$ jest systemem w sensie klasycznym niesprzecznym i zupełnym.

D o w ó d:

Twierdzenie to – odczytane w kontekście definicji klasycznie rozumianych niesprzeczności systemu (***RI.2: **D10.a**) oraz zupełności systemu (***RI.2: **D12.a**) – jest bezpośrednim wnioskiem z semantycznych zasad niesprzeczności (***RII.1: **T6**) oraz wyłączonego środka (***RII.1: **T7.a**).■

Ponieważ wszystkie tezy klasycznego rachunku logicznego są prawdziwe w każdej niepustej dziedzinie (**T1.2**), więc oczywistym wnioskiem w **W2** i **T3** jest:

W3 Zbiór L tez klasycznego rachunku logicznego jest systemem w sensie klasycznym niesprzecznym i zupełnym.

2.2 Pojęcie modelu

Pojęcie modelu zostanie określone w przyjętym w tych analizach ujęciu semantycznym wywodzącym się od A. Tarskiego[6]. Definicja modelu jest w tym ujęciu oparta na określeniu pojęcia wyrażenia prawdziwego w danej

[6] Obszerne opracowanie poświęcone A. Tarskiego teorii prawdy – zawierające prezentację i omówienie tej teorii, uzupełnione ukazaniem jej szerokiego (od koncepcji starożytnych) kontekstu dziejowego i związanych z nią logicznych, a zwłaszcza

dziedzinie (***RII.1: **D3**). Również w przypadku pojęcia modelu trzeba pamiętać o wszystkich relatywizacjach związanych z pojęciem dziedziny, omówionych w kontekście pojęcia spełniania (***RII.1.1) i przypomnianych przed definicją wyrażenia prawdziwego (***RII.1.2). Oto osadzone w tym kontekście określenie:

D3. Dziedzina $\mathcal{M}$ jest modelem:

a dla zbioru wyrażeń zdaniowych X wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{M}$ jest dziedziną niepustą i $X \subset E(\mathcal{M})$;

b dla systemu $<A, \boldsymbol{D}>$ wtedy i tylko, gdy $\mathcal{M}$ jest dziedziną niepustą i $\mathcal{M}$ jest modelem dla zbioru $T_{<A,\ \boldsymbol{D}>}$ tez tego systemu, tj. wtedy i tylko, gdy $T_{<A,\ \boldsymbol{D}>} \subset E(\mathcal{M})$.

Modelem jest więc dziedzina niepusta, w której każde wyrażenie danego zbioru – rozumiane zgodnie z przyjętą interpretacją języka, w którym wyrażenia są zapisane – jest zdaniem prawdziwym. Pod określenie **D3.a** podpadają także zbiory wyrażeń jednoelementowe: dziedzina $\mathcal{M}$ jest modelem dla zbioru $\{\Phi\}$ wtedy i tylko, gdy $\{\Phi\} \subset E(\mathcal{M})$, tj. gdy $\Phi \in E(\mathcal{M})$ – w takiej sytuacji prościej jest mówić, że $\mathcal{M}$ jest modelem formuły Φ. Definicja **D3.a** obejmuje także sytuację, wyróżnioną w **D3.b**, gdy zbiór wyrażeń zdaniowych X to ogół tez systemu $<A, \boldsymbol{D}>$.

Jako że w systemach aksjomatycznych opartych na logice zbiór ich tez jest identyczny ze zbiorem konsekwencji aksjomatów systemu – tj. jeśli $<A, \boldsymbol{D}>$ jest takim systemem aksjomatycznym, to zbiór $T_{<A,\ \boldsymbol{D}>}$ tez tego systemu jest identyczny z $Cn_{A,\ \boldsymbol{D}}(A)$ (***RI.2: **D4.c**) – więc:

W4 Dziedzina $\mathcal{M}$ jest modelem opartego na logice systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$ wtedy i tylko, gdy $\mathcal{M}$ jest dziedziną niepustą oraz $Cn_{A,\ \boldsymbol{D}}(A) \subset E(\mathcal{M})$.

---

filozoficznych zagadnień i dyskusji wcześniejszych i nadal aktualnych – jest w monografii J. Woleńskiego, *Semantics and Truth*, dz. cyt. Zob. także: J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 154–171; R. Murawski, *Filozofia matematyki i logiki w Polsce międzywojennej*, Toruń 2011, s. 134–155. Zaproponowana przez A. Tarskiego definicja modelu – zakładająca pojęcia prawdy, spełniania, interpretacji zrelatywizowane do sformalizowanego języka J – jest ujęciem teoriomodelowym w sensie klasycznym, tj. ujęciem semantycznym w węższym znaczeniu terminu „semantyczne". W ***RIII.3 jest przykład semantycznego ujęcia, w którym model jest definiowany w sposób uproszczony (w publikacjach cytowanych w podrozdziale 3. są też odesłania do innych ujęć semantycznych).

Na podstawie ***RI.2: **T1** i **L1** da się łatwo okazać, że:

L2 $Cn_L(A) \subset E(\mathcal{M})$ wtedy i tylko, gdy $A \subset E(\mathcal{M})$.

D o w ó d L2:

$\boxed{\rightarrow}$

1. $Cn_L(A) \subset E(\mathcal{M})$ {zał.}.

Ponieważ

2. $A \subset Cn_L(A)$ {***RI.2: **T1**},

więc: $A \subset E(\mathcal{M})$ {**RIV.1: **T3**, 2, 1}.

$\boxed{\leftarrow}$

1. $A \subset E(\mathcal{M})$ {zał.}.

Jako że

2. $X \subset E(\mathcal{M}) \Rightarrow Cn_L(X) \subset E(\mathcal{M})$ {**L1**},

wiec: $Cn_L(A) \subset E(\mathcal{M})$ {**RO**: 2, 1}.■

W kontekście **L2** i **W4** oczywiste jest twierdzenie:

T4 Dziedzina $\mathcal{M}$ jest modelem opartego na logice systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$ wtedy i tylko, gdy $A \subset E(\mathcal{M})$.

Zgodnie z **T4** daną dziedzinę uznaje się za model systemu aksjomatycznego na tej i tylko na tej podstawie, że każdy z aksjomatów tego systemu jest w tej dziedzinie prawdziwy.

2.3 Semantyczne rozumienie niesprzeczności

Pojęcie niesprzeczności zostało już zdefiniowane w analizach syntaktycznych (***RI.2.4.1). W charakterystyce semantycznej niesprzeczności kluczowe jest pojęcie modelu, związane ściśle, jak wiemy, z prawdziwością tez systemu.

T5 Jeśli istnieje model dla zbioru wyrażeń zdaniowych X, to zbiór X jest niesprzeczny.

D o w ó d:

Jeśli

1. $\mathcal{M}$ jest modelem zbioru wyrażeń zdaniowych X {zał.},

to

2. $X \subset E(\mathcal{M})$ {**D3.a**, 1}.

Ponieważ podzbiór zbioru niesprzecznego jest zbiorem niesprzecznym {***RI.2: **W5.1**}, więc skoro 2 oraz – jak wiadomo z **T3** – $E(\mathcal{M})$ jest systemem niesprzecznym, to również zbiór wyrażeń X jest niesprzeczny.■

T6 Jeśli istnieje model dla zbioru aksjomatów systemu $<A, \boldsymbol{D}>$, to system ten jest niesprzeczny.

D o w ó d:
Jeśli
1. $A \subset E(\mathcal{M})$ {zał.},
to
2. $Cn_L(A) \subset E(\mathcal{M})$ {**L1**, 1};
a skoro $E(\mathcal{M})$ jest systemem niesprzecznym {**T3**}, to również
3. zbiór wyrażeń zdaniowych $Cn_L(A)$ jest niesprzeczny
{***RI.2: **W5.1**, 2}.
Ponieważ $Cn_L(A)$ jest identyczny ze zbiorem tez systemu $<A, \boldsymbol{D}>$ {***RI.2: **D4c**}, więc system $<A, \boldsymbol{D}>$ jest niesprzeczny.■

Twierdzenie **T6** jest podstawowe dla teoriomodelowych dowodów niesprzeczności systemów aksjomatycznych opartych na logice. Dowód polega na określeniu modelu dla aksjomatyki (zbioru aksjomatów) danego systemu $<A, \boldsymbol{D}>$. Jeśli bowiem zbiór aksjomatów A jest podzbiorem zbioru $E(\mathcal{M})$ wyrażeń prawdziwych we wskazanym modelu $\mathcal{M}$, to podzbiorem zbioru $E(\mathcal{M})$ jest także – zgodnie z **L1** – zbiór tez systemu, identyczny z ogółem konsekwencji aksjomatów, a ponieważ zbiór $E(\mathcal{M})$ jest systemem niesprzecznym (**T3**), więc również zbiór tez $Cn_L(A)$, jest – jako podzbiór $E(\mathcal{M})$ – niesprzeczny (***RI.2: **W5.1**).

Twierdzenia **T5** i **T6** dają podstawę, by z twierdzenia o istnieniu modelu dla zbioru wyrażeń wyprowadzać wniosek o niesprzeczności danego systemu.

Bardzo znaczące w metalogice jest także twierdzenie odwrotne.

T7 Każdy niesprzeczny zbiór wyrażeń zdaniowych ma model przeliczalny.

Model przeliczalny to taki, którego uniwersum U jest – zgodnie z **RIV.3: **D7** – skończone albo równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych; jeśli nie jest skończone, to – w myśl ***RIV.3: **D1** – istnieje funkcja f wzajemnie jednoznaczna przekształcająca zbiór $\mathcal{N}$ na uniwersum U modelu, co znaczy, że każde ze zdań danego zbioru wyrażeń X jest spełnione dla jakiegoś ciągu przedmiotów z uniwersum modelu wtedy i tylko, gdy jest spełnione dla ciągu liczb naturalnych, którego wyrazy są przyporządkowane przedmiotom danego ciągu według funkcji *f* ujawniającej równoliczność. Zgodnie z **T7** można więc powiedzieć, że każdy niesprzeczny zbiór zdań ma model w dziedzinie liczb naturalnych, tj. że można tak interpretować terminy dowolnego niesprzecznego zbioru zdań, że jest on podzbiorem ogółu $E(\mathcal{N})$ zdań prawdziwych w dziedzinie $\mathcal{N}$[7].

Z twierdzeń **T5** i **T7** wynika równoważność zwana twierdzeniem Gödla-Malcewa.

T8 Zbiór wyrażeń zdaniowych *X* jest niesprzeczny wtedy i tylko, gdy istnieje model dla zbioru *X*.

Twierdzenie **T8** można uznać za definicję semantycznego pojęcia niesprzeczności zbioru wrażeń, a więc także niesprzeczności systemu dedukcyjnego[8].

2.4 Kategoryczność systemu

Semantyczne rozumienie niesprzeczności jest związane ściśle z tzw. kategorycznością systemu.

D4.a System dedukcyjny (teoria) jest kategoryczny wtedy i tylko, gdy wszystkie jego modele są izomorficzne.

Mówienie o wszystkich modelach zakłada, że teoria ma modele, a to – zgodnie z **T8** – znaczy, że jest niesprzeczna. Pojęcie izomorfizmu modeli

---

[7] Twierdzenie **T7** – zwane twierdzeniem o istnieniu modelu – udowodnił K. Gödel w 1930 r. W dowodzie tego twierdzenia trzeba skorzystać z pojęć spełniania i prawdy rozszerzonych na formuły z symbolami funkcyjnymi i stałymi indywiduowymi oraz z uszczegółowień pojęcia zupełności. Pełny dowód tego twierdzenia jest np. w T. Batóg, *Podstawy logiki*, dz. cyt., s. 270–280; krótszy dowód w: A. Grzegorczyk, *Zarys logiki matematycznej*, dz. cyt., s. 269–271; G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt., s. 152–153 (w dowodach tych są odesłania do zakładanych w nich pojęć i twierdzeń – w niniejszych analizach pominiętych).

[8] Twierdzeniem Gödla-Malcewa nazywa się również semantyczne twierdzenie o zwartości: Teoria (system) *T* ma model *wtw*, gdy ma model każda teoria zawarta w *T* – zob. np. *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny*..., dz. cyt., s. 171. W monografii: G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt. jest dowód semantycznego twierdzenia o zwartości dla formuł KRZ (twierdzenie 32.20, s. 96–98) i dla wyrażeń WRP (twierdzenie 45.20, s. 156).

jest w tej definicji rozumiane zgodnie z definicjami izomorfizmu układów relacyjnych (**RIV.2: definicje **D28**); tu warto przypomnieć, że relacja ustalająca izomorfizm układów relacyjnych jest wzajemnie jednoznaczna, dlatego izomorficzność układów relacyjnych wymaga równoliczności ich dziedzin (**RIV.3: **T2**) oraz przytoczyć wynikające z tych prawidłowości twierdzenie ważne dla aktualnych rozważań.

($\mathcal{M}$**iz**$\mathcal{M}$') Jeżeli $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}'$ są izomorficznymi modelami systemu dedukcyjnego logiki pierwszego rzędu, to dla dowolnej formuły Φ danego systemu jest tak, że: $\Phi \in E(\mathcal{M})$ *wtw* $\Phi \in E(\mathcal{M}')$[9].

W kontekście tego twierdzenia widać lepiej, co znaczy kategoryczność: każde twierdzenie systemu jest prawdziwe we wszystkich (dowolnych dwóch) modelach danego systemu. Pojęcie kategoryczności jest więc uściśleniem wymogu, by aksjomaty systemu (i ich konsekwencje) jednoznacznie charakteryzowały dziedzinę systemu. Dlatego mówi się również, że teoria kategoryczna ma jeden model z dokładnością do izomorfizmu.

Pytanie o kategoryczność systemów logiki klasycznej uzyskuje jednoznaczną odpowiedź (negatywną) w kontekście twierdzeń udowodnionych przez L. Löwenheima, T. Skolema i A. Tarskiego:

T9.a Zbiór wyrażeń zdaniowych teorii pierwszego rzędu ma model wtedy i tylko, gdy ma model przeliczalny[10].

Zgodnie z tym twierdzeniem – którego dowód jest oparty na **T7** i **T8** – jeśli zbiór wyrażeń ma w ogóle jakiś model (tj. gdy jest niesprzeczny), to ma model przeliczalny; gdy ma model nieskończony, to ma model przeliczalnie nieskończony (tj. o dziedzinie równolicznej ze zbiorem $\mathcal{N}$ liczb naturalnych). Znaczy to, że twierdzenia np. teorii mnogości, w których mowa o mocach zbiorów nieprzeliczalnych (liczby kardynalne większe

---

9 Zob. tamże, s. 165, twierdzenie 48.2; por. także **RIV.2: **T23**.

10 Prawidłowość **T9.a** – zwana także dolnym twierdzeniem Löwenheima-Skolema – została udowodniona przed twierdzeniem Gödla o istnieniu modelu: dla skończonych zbiorów wyrażeń przez L. Löwenheima (w 1915 r.), dla dowolnych zbiorów wyrażeń przez T. Skolema (w r. 1919). Zob.: J. Woleński, *Epistemologia. Poznanie – prawda – wiedza – realizm*, dz. cyt., s. 232–235; T. Batóg, *Podstawy logiki*, dz. cyt., s. 282. Twierdzeniem Löwenheima-Skolema jest także nazywana implikacja prosta równoważności **T9.a** – zob. G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt. s. 155, gdzie są także uwagi historyczne, a w ich kontekście – terminologiczne dotyczące tego twierdzenia.

od $\aleph_0$), są prawdziwe także w modelu przeliczalnym (przeliczalnie nieskończonym). Dlatego twierdzenie to jest nazywane także paradoksem Löwenheima-Skolema.

Uogólnieniem **T9.a** jest następująca równoważność, zwana twierdzeniem Löwenheima-Skolema-Tarskiego:

T9.b Każdy system (teoria) pierwszego rzędu ma model przeliczalny wtedy i tylko, gdy ma model dowolnej mocy nieskończonej.

Implikację odwrotną tej równoważności – tj. twierdzenie: Jeśli teoria pierwszego rzędu ma model nieskończony, to ma model o dowolnej liczbie kardynalnej – udowodnił A. Tarski[11]. Z twierdzenia tego wynika m.in., że system sformułowany w języku przeliczalnie nieskończonym – jak KRZ i WRP – ma modele nieskończone, a wobec tego ma modele nieskończone dowolnej mocy (moc modelu to liczność jego dziedziny), a pośród nich nieskończone przeliczalne, tj. równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych $\mathcal{N}$, czyli mocy $\aleph_0$ (zob. **RIV.3).

Wobec twierdzeń **T9** jest oczywiste, że nie mogą być izomorficzne modele takich systemów, które da się sformułować w logice pierwszego rzędu – jak np. aksjomatyczna teoria mnogości i (elementarna) arytmetyka liczb naturalnych. Teorie takie bowiem, jako że mają modele nieskończone, mają także modele dowolnej mocy, a warunkiem koniecznym izomorficzności modeli jest równoliczność ich dziedzin. Kategoryczne są tylko te teorie zupełne, które mają model skończony, jak np. teoria pierwszego rzędu z identycznością (rozumianą „normalnie", tj. zgodnie z **RIII.2: **A1**, **T22**, **T23**) z dołączonym aksjomatem $(\wedge\, x, y)\ x = y$, który sprawia, że każdy jego model ma dziedzinę jednoelementową i jest izomorficzny z każdym innym modelem takiego systemu. Nieliczne są również teorie kategoryczne nielementarne (sformułowane w logice rzędów wyższych), np. teoria liczb naturalnych z tzw. aksjomatem indukcji, sformułowanym w języku drugiego rzędu: Zbiorem wszystkich liczb naturalnych jest każdy zbiór zawierający zero i zamknięty ze względu na działanie następnika[12].

Własnością systemu słabszą od kategoryczności jest tzw. kategoryczność w mocy.

---

[11] Twierdzenie to jest nazywane także górnym albo wstępującym twierdzeniem Löwenheima-Skolema-Tarskiego – zob. *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny...*, dz. cyt., s. 172.

[12] Zob. G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt., s. 165–166.

D4.b System (teoria) ***T*** jest kategoryczny w mocy *m* wtedy i tylko, gdy każde dwa modele tego systemu mocy *m* są izomorficzne.

Zostało okazane, że każda teoria kategoryczna sformułowana w języku pierwszego rzędu, która jest kategoryczna w dowolnej mocy nieprzeliczalnej, tj. w dziedzinie o liczności większej niż $\aleph_0$, jest kategoryczna we wszystkich mocach nieprzeliczalnych[13].

2.5 Pełność systemu

Pełność jest własnością systemu semantyczną, którą trzeba odróżniać od syntaktycznie określanej zupełności (***RI.2.4.2). Ogólnie można powiedzieć, że:

D5.a System jest pełny wtedy i tylko, gdy każde wyrażenie prawdziwe zapisane w języku tego systemu jest jego tezą.

Gdy natomiast mowa o systemach dedukcyjnych logiki klasycznej lub na logice opartych, wtedy można – pamiętając o tym, że twierdzenia logiki są prawdziwe w każdej dziedzinie niepustej, a systemy oparte na logice mogą mieć interpretacje w wielu dziedzinach – podane określenie uściślić.

D5.b System oparty na logice jest pełny wtedy i tylko, gdy każde wyrażenie zapisane w języku tego systemu i prawdziwe w każdym jego modelu jest jego tezą.

D5.c System logiki klasycznej jest pełny wtedy i tylko, gdy każde wyrażenie zapisane w języku tego systemu i prawdziwe w każdym zbiorze niepustym jest tezą tego systemu.

Systemami pełnymi są klasyczny rachunek zdań oraz węższy rachunek predykatów. Można zatem ogólnie powiedzieć, że pełny jest klasyczny rachunek logiczny. Jeśli chodzi o KRZ, to wiadomo, że wszystkie tezy KRZ są prawdziwe w każdej dziedzinie niepustej (**T1.2**), czyli są tautologiami (**T1.2’**). Da się okazać, że prawdziwa jest także implikacja odwrotna, tj.

T10 Każda tautologia KRZ jest tezą systemu KRZ.

[13] Twierdzenie to, zwane hipotezą (Jerzego) Łosia, zostało udowodnione przez M. Morleya w 1963 r. (zob. *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny…*, dz. cyt., s. 171).

Podobnie jak w przypadku dowodu twierdzenia **T.1.1** – podstawowego dla ogłoszenia prawidłowości **T1.2'** – i to rozumowanie jest przeprowadzone na gruncie systemu założeniowego KRZ przedstawionego w niniejszym opracowaniu (**RII.3). Dowód pełności tego systemu (podobnie jak innych systemów KRZ) jest oparty na prawidłowościach dotyczących sprowadzania formuł KRZ do postaci normalnej – koniunkcyjnej albo alternatywnej (***RI.1.3 i ***RI.1.4). Jak wiadomo, każde formuła KRZ jest sprowadzalna do koniunkcyjnej postaci normalnej (***RI.1.4: **T4.1**) oraz do alternatywnej postaci normalnej (***RI.1.4: **T4.2**).

W dowodzie twierdzenia **T10** warto skorzystać z następującego twierdzenia pomocniczego.

L3 Każda tautologia o koniunkcyjnej postaci normalnej jest tezą systemu założeniowego KRZ.

D o w ó d:
Niech
1. K jest tautologią o koniunkcyjnej postaci normalnej {zał.}.
Jako że każda formuła o koniunkcyjnej postaci normalnej jest koniunkcją n alternatyw elementarnych {***RI.1: **D5.b**, 2}, więc
2. $K = \ulcorner A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \urcorner$, gdzie A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ to alternatywa elementarna.
Ponieważ wiadomo, że dowolna formuła o koniunkcyjnej postaci normalnej jest tautologią wtedy i tylko, gdy tautologią jest każda z jej alternatyw elementarnych {***RI.2: **T20.b**}, więc skoro – zgodnie z założeniem – K jest tautologią, to
3. tautologią jest każda z alternatyw A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Można okazać, że:
(*) Każda prawdziwa alternatywa elementarna jest tezą systemu założeniowego KRZ.
Wiadomo, że
(1*) A jest prawdziwą alternatywą elementarną wtedy i tylko, gdy co najmniej jedna spośród jej zmiennych zdaniowych występuje i bez, i ze znakiem negacji {***RI.2: **T20.a**}.
Każdą prawdziwą alternatywę elementarną można zatem przedstawić w postaci
(2*) $A = \ulcorner \alpha \vee {\sim}\alpha \vee \ldots \urcorner$,
gdzie α jest zmienną występującą i bez, i ze znakiem negacji, której występowanie w A zapewnia ***RI.2: **T20.a**, a wykropkowanie

reprezentuje pozostałą część alternatywy elementarnej. Alternatywę $\ulcorner\alpha \vee \sim\alpha\urcorner$ można udowodnić w systemie KRZ na podstawie prawa wyłączonego środka, które jest tezą tego systemu {***RI.3: **T12**}, a z alternatywy $\ulcorner\alpha \vee \sim\alpha\urcorner$ można wyprowadzić $\ulcorner\alpha \vee \sim\alpha \vee \ldots\urcorner$, stosując regułę **DA**. Zatem $A = \ulcorner\alpha \vee \sim\alpha \vee \ldots\urcorner$ jest tezą systemu założeniowego KRZ.
Wobec prawidłowości (*) jest oczywiste, że
4. tezą systemu założeniowego KRZ jest każda z alternatyw A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, o których mowa w 3.
A wobec tego:
5. tezą tego systemu jest także koniunkcja $\ulcorner A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n\urcorner$ {**DK**: 4}, czyli tezą jest K {5, 2}, tj. dowolna tautologia o koniunkcyjnej postaci normalnej. ■
D o w ó d **T10**:
Zgodnie z założeniem **T10** niech:
1. wyrażenie Φ jest tautologią zapisaną w języku KRZ, czyli jest prawdziwe w każdej dziedzinie niepustej;
możne wtedy – na podstawie ***RI.1.4: **T4.1** – uznać, że:
2. istnieje taka koniunkcyjna postać normalna K, że $\ulcorner\Phi \Leftrightarrow K\urcorner$ jest tezą KRZ;
a przy tym, skoro tautologią jest Φ, to również:
3. K jest tautologią, tzn. jest prawdziwa w każdej niepustej dziedzinie.
Ponieważ K spełnia warunki, o których mowa w **L3** {2, 3}, więc:
4. K jest tezą systemu założeniowego KRZ.
A ponieważ $\ulcorner\Phi \Leftrightarrow K\urcorner$ jest tezą KRZ {2}, więc tezą systemu założeniowego KRZ jest również Φ {$\mathbf{RO}_{\Leftrightarrow}$: 2, 4}.
Skora dowolna tautologia KRZ, czyli – zgodnie z definicją **D2** – dowolne wyrażenie KRZ prawdziwe w każdej dziedzinie niepustej, jest tezą założeniowego systemu KRZ, to system tej jest pełny w znaczeniu zgodnym z **D5.c**.■

Natomiast podstawowe dla ogólnego okazania pełności klasycznego rachunku logicznego (KRZ i WRP) są następujące twierdzenia.

T11 Jeżeli zdanie Φ nie jest tezą logiki klasycznej, tj. $\Phi \notin L$, to istnieje niepusta dziedzina $\mathcal{M}$ taka, że $\ulcorner\sim\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$.

D o w ó d:
1. $\Phi \notin L$ {zał.}.
Niech
2. L_Φ jest zbiorem tych tylko tez logiki klasycznej, w których występują te same terminy co w zdaniu Φ {def.}.

Ponieważ zbiór tez klasycznego rachunku logicznego, tj. $L = Cn_{A_{\log},\, \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}}(\varnothing)$ {***RI.2: **D4.b”**}, jest systemem niesprzecznym {**W3**}, więc także:
3. zbiór $L_\Phi \subset L$ jest systemem niesprzecznym {***RI.2: **W5.1**}.
Jeśli Φ nie jest tezą w L {1}, to:
4. $\Phi \notin L_\Phi$,
a więc – zgodnie z ***RI.2: **T14** – także
5. zbiór $(L_\Phi \cup \{\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner\})$ jest niesprzeczny,
czyli – na podstawie **T8**:
6. istnieje dziedzina $\mathcal{M}$, która jest modelem dla zbioru $(L_\Phi \cup \{\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner\})$,
co jest równoznaczne z tym, że:
7. $(L_\Phi \cup \{\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner\}) \subset E(\mathcal{M})$ {**D3**};
a zatem: $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {**RIV.1: **T4**: 7}.■

Odwołując się do **T3**, a dokładniej – korzystając z faktu, że ogół zdań prawdziwych w modelu jest systemem niesprzecznym, można okazać, że jest prawdziwa implikacja odwrotna do **T1.2**.

T12 Jeśli zdanie Φ jest prawdziwe w każdej niepustej dziedzinie, to Φ jest tezą logiki klasycznej, tj. $\Phi \in L$.

Dowód:
Jeśli – zgodnie z założeniem:
1. dla dowolnej niepustej dziedziny $\mathcal{M}$ jest tak, że $\Phi \in E(\mathcal{M})$,
to jako że
2. $E(\mathcal{M})$ jest systemem niesprzecznym w sensie klasycznym {**T3**},
więc
3. dla dowolnej niepustej dziedziny $\mathcal{M}$ jest tak, że $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \notin E(\mathcal{M})$ {**D10.a1**},
czyli – równoważnie:
4 $\sim(\bigvee \mathcal{M})\ \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ {~V: 3},
co – na podstawie **T11** – prowadzi do wniosku, że:
Φ jest tezą logiki klasycznej, tj. $\Phi \in L$ {**TOL**: **T11**, 4}.■

Prawidłowości dotyczące związku między byciem tezą logiki a byciem zdaniem prawdziwym można zatem podsumować w następującym twierdzeniu, które jest bezpośrednim wnioskiem z **T1.2** oraz **T11**.

W5 Zdanie Φ jest tezą logiki klasycznej, tj. $\Phi \in L$, wtedy i tylko, gdy Φ jest prawdziwe w każdej dziedzinie niepustej.

Klasyczny rachunek logiczny (KRZ i WRP) jest więc systemem pełnym {**T12**, **D5.c**}, jako że zawiera wszystkie tautologie, tj. zdanie prawdziwe w każdej dziedzinie; a można także dodać – że tylko takie zdania (**T1.2**)[14]. Klasyczny rachunek logiczny zawiera więc ogół twierdzeń prawdziwych w dowolnej dziedzinie, co ujęte pragmatycznie znaczy, że prawa logiki klasycznej i oparte na nich reguły wnioskowania są powszechnie ważne. Wiąże się z tym ściśle własność, o której mówi się opisowo, że logika klasyczna nie wyróżnia żadnych stałych pozalogicznych albo że jest względem takich stałych neutralna. Inaczej można powiedzieć, że spełnialność praw logiki jest niezmiennicza względem stałych pozalogicznych, tj. stałych indywiduowych, predykatowych, funkcyjnych, a różnice w denotacji takich symboli stają się widoczne dopiero w kontekście założeń (aksjomatów) pozalogicznych, przyjmowanych na gruncie systemów wspartych na logice[15]. Jednakże każdy system, w którym da się sformułować (zinterpretować) arytmetykę liczb naturalnych z dodawaniem i mnożeniem, o ile jest niesprzeczny, to nie jest pełny, co znaczy, że istnieją zdania prawdziwe zapisane w języku takiego systemu, które nie są jego tezami, czyli są w nim niedowodliwe[16].

2.6 Pojęcie wynikania

Zdefiniowane w semantyce systemów dedukcyjnych pojęcie spełniania oraz wsparte na nim pojęcia prawdy i modelu pozwalają na ścisłe określenie semantycznego pojęcia wynikania, in. wynikania logicznego, wynikania semantycznego. Pojęcie to było stosowane lub zakładane w dotychczasowych rozważaniach, było także kontekstowo i w języku naturalnym definiowane. Kontekst definicyjny to twierdzenia dotyczące niezawodnych schematów wnioskowania: schemat niezawodny to taki, który zawsze od zdań prawdziwych (przesłanek) prowadzi do zdania (wniosku) prawdziwego. Obecnie pojęcie wynikania logicznego może być uściślone. Oto jego sformułowanie odnoszące się do zdań.

---

14 Twierdzenie o pełności węższego rachunku predykatów udowodnił K. Gödel w 1930 roku (o innych twierdzeniach udowodnionych przez Gödla zob. ***RIII.2).

15 Własność ta jest udowodniona i skomentowana np. w: A. Grzegorczyk, *Zarys logiki matematycznej*, dz. cyt. s. 196–203; T. Batóg, *Podstawy logiki*, dz. cyt., s. 158–163. Zob. także W.A. Pogorzelski, *Klasyczny rachunek kwantyfikatorów. Zarys teorii*, Warszawa 1981, s. 128–131.

16 Zob. ***RIII.1, gdzie jest omówione wzmiankowane tu ograniczenie oraz inne tzw. twierdzenia limitacyjne.

D6.a Zdanie Φ wynika logicznie ze zbioru zdań X wtedy i tylko, gdy każdy niepusty model dla X jest modelem dla Φ.

Stosując symbol $\models$ na oznaczenie relacji wynikania logicznego (semantycznego), można stwierdzenie „zdanie Φ wynika logicznie ze zbioru zdań X" wyrazić napisem „ $X \models \Phi$"[17]. Rozwijając określenie **D6.a** zgodnie z definicją modelu dla zbioru wyrażeń zdaniowych (**D3.a**) – która dotyczy również zbiorów zdań, także zbiorów jednoelementowych – można powiedzieć, że dane zdanie wynika z innych wtedy i tylko, gdy w każdej dziedzinie niepustej, w której są prawdziwe te inne zdania, jest też prawdziwe dane zdanie. Stosując skróty symboliczne do tego ostatniego wysłowienia, można je zapisać tak:

D6.a' $X \models \Phi$ wtedy i tylko, gdy $(\bigwedge \mathcal{M} \neq \varnothing)\ [X \subset E(\mathcal{M}) \Rightarrow \Phi \in E(\mathcal{M})]$.

W takim sformułowaniu widać wyraźniej, że uściślone pojęcie wynikania logicznego jest zgodne z używanym już określeniem: wniosek wynika logicznie z przesłanek (wynika semantycznie, jest ich konsekwencją semantyczną), jeśli jest wykluczone, by przesłanki były prawdziwe, a wniosek był fałszywy.

Definicję **D6.a** można uogólnić tak, by objąć nie tylko zdania, lecz także funkcje zdaniowe.

D6.b Wyrażenie zdaniowe Φ wynika logicznie ze zbioru wyrażeń X wtedy i tylko, gdy jest spełnione przez każdy ciąg przedmiotów w dowolnej dziedzinie, przez który są spełnione wszystkie wyrażenia zbioru X.

Mówić o ciągu przedmiotów, który jest tworzony z przedmiotów jakiejś dziedziny, można tylko w dziedzinie niepustej. Dlatego warunek niepustości nie jest również sformułowany w zapisie skróconym symbolami:

D6.b' Wyrażenie zdaniowe Φ wynika logicznie ze zbioru wyrażeń X, tj. $X \models \Phi$, wtedy i tylko, gdy
$(\bigwedge \mathcal{M} \bigwedge \{a_n\})\ [X \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})]$.

---

[17] Symbol $\models$ był już stosowany w ogólnych uwagach o własnościach systemów aksjomatycznych KRZ (**RI.4): napis „ $\models \Phi$" był w tamtym kontekście odczytywany jako „wyrażenie Φ jest prawdziwe", co zgodne z uściślonym tu, ogólniejszym znaczeniem tego symbolu.

Semantyczne pojęcie wynikania logicznego trzeba odróżniać od syntaktycznego pojęcia konsekwencji, choć pojęcia te są bardzo zbliżone. W zakresie klasycznego rachunku logicznego pojęcia te są równozakresowe, da się bowiem okazać, że prawdziwe jest następujące twierdzenie.

T13.a Wyrażenie zdaniowe Φ wynika logicznie (semantycznie) ze zbioru wyrażeń X wtedy i tylko, gdy jest konsekwencją logiczną (syntaktyczną) zbioru X.

Stosując symboliczne skróty, uzupełnione wskaźnikami wskazującymi na zawężenie do klasycznego rachunku logicznego, można to twierdzenie zapisać następująco:

T13.a’ $X \models_L \Phi$ wtedy i tylko, gdy $X \vdash_L \Phi$, tj. gdy $\Phi \in Cn_L(X)$.

D o w ó d T13a:

$\boxed{\rightarrow}$

Twierdzenie, że

1. Wyrażenie Φ wynika logicznie ze zbioru wyrażeń X {zał.}

jest – zgodnie z **D6.b’**– równoważne z:

2. $(\bigwedge \boldsymbol{\mathcal{M}} \bigwedge \{a_n\})\ [X \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})]$.

W kontekście tego założenia do sprzeczności prowadzi przypuszczenie, że:

3. $\Phi \notin Cn_L(X)$ {zdn.}.

Wynika z niego bowiem:

4. Zbiór wyrażeń $X \cup \{\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner\}$ jest niesprzeczny {***RI.2: **T14**, 2},

a jest tak – zgodnie z **T8** – wtedy i tylko, gdy dla zbioru tego istnieje model $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, co – zapisane według **D3** – znaczy, że

5. $(X \cup \{\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner\}) \subset E(\boldsymbol{\mathcal{M}})$,

czyli:

6. (i) $X \subset E(\boldsymbol{\mathcal{M}})$ oraz (ii) $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in E(\boldsymbol{\mathcal{M}})$ {**RIV.1: **T4**, 5}.

Ponieważ wiadomo na podstawie **T3**, że $E(\boldsymbol{\mathcal{M}})$ jest systemem niesprzecznym sensie klasycznym, więc z 6.(ii) – zgodnie z ***RI.2: **D10.a1** – wynika:

7. $\Phi \notin E(\boldsymbol{\mathcal{M}})$.

Stosując ***RII.1:**D3** do, odpowiednio, 6(i) oraz 7, można zatem uznać, że:

8. Każde wyrażenie zdaniowe zbioru X jest spełnione przez każdy ciąg $\{a_n\}$ w dziedzinie $\boldsymbol{\mathcal{M}}$
9. Istnieje taki ciąg $\{a_n\}$ w dziedzinie $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, że ${\sim}\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$,

a to znaczy, że:

10. Wyrażenie Φ nie wynika logicznie ze zbioru wyrażeń X {8, 9, **D6.b**}, co jednak jest sprzeczne z 1.

$\boxed{\leftarrow}$

Z założenia implikacji odwrotnej

1. $\Phi \in Cn_L(X)$ {zał.} oraz z założenia dodatkowego

   1.1 $\mathcal{M}$ jest dowolną dziedziną, a $\{a_n\}$ jest dowolnym ciągiem przedmiotów (wartościowaniem) w dziedzinie $\mathcal{M}$ takim, że

   $(\bigwedge \Psi \in X)$ $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$, tj. takim, że $X \subset \{\Psi\text{: } \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$

wynika:

   1.2 $Cn_L(X) \subset \{\Psi\text{: } \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ {**RO**: **L1'**, 1.1}.

Na podstawie (***RI.2: **T2')** można więc uznać, że:

   1.3 $Cn_L(Cn_L(X)) \subset Cn_L\{\Psi\text{: } \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$,

a ponieważ $Cn_L(X) \subset Cn_L(Cn_L(X))$ {***RI.2: **T1'**},

więc:

   1.4 $Cn_L(X) \subset Cn_L\{\Psi\text{: } \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}\}$,

co – wobec równości: $Cn_L\{\Psi\text{: } \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}\} = \{\Psi\text{: } \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}\}$ {**W1'**}, jest równoważne z:

   1.5 $Cn_L(X) \subset \{\Psi\text{: } \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}\}$.   .

Z założenia $\Phi \in Cn_L(X)$ i inkluzji 1.5 wynika

   1.6 $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$ {***RIV.1: **T4**}.

Zatem – wobec dowolności dziedziny $\mathcal{M}$ i ciągu $\{a_n\}$, o których mowa w założeniu 1.1 – można stwierdzić, że:

2. $(\bigwedge \mathcal{M} \bigwedge \{a_n\})$ $[X \subset \{\Psi\text{: } \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}\} \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}]$

{**D**$\bigwedge$: 1.1 $\Rightarrow$ 1.6},

co jest równoważne z twierdzeniem:

wyrażenie zdaniowe Φ wynika logicznie ze zbioru wyrażeń X {**D6.b'**, 2}.■

Odczytując **T13a**, trzeba pamiętać, że symbol Cn_L to skrót zapisu $Cn_{A_{\log},\, \mathbf{D}_{\mathbf{log}}}$, oznaczającego relację konsekwencji dla systemów logiki klasycznej (KRZ i WRP), tj. wywodzenia z aksjomatów logiki klasycznej ich konsekwencji wedle przyjętych w niej reguł inferencji (wyprowadzania). Zbiór $Cn_L(X)$ zatem to ogół konsekwencji wyprowadzonych z X na gruncie systemów logiki klasycznej (***RI.2: **D4.a'** i **D4.b'**). Systemy takie są pełne (w sensie określonym w **D5**), co zapewnia, że pojęcia wynikania logicznego (semantyczne) i konsekwencji logicznej (w sensie syntaktycznym) są dla takich systemów równozakresowe. Dlatego wiele twierdzeń okazujących własności operacji Cn i relacji $\vdash$ ma swoje odpowiedniki pośród twierdzeń semantycznych dotyczących relacji $\models$. Zestawione niżej prawidłowości są wnioskami z definicji dla Cn_L i $\vdash_L$ (***RI.2: definicje **D4**) oraz $\models_L$ (definicje **D6**) – oraz udowodnionych na ich podstawie twierdzeń (***RI.2: twierdzenia **T1'-T9'** i **L1.1-L1.5**, **T11.1'**, **T11.2'**). Na przykład:

W6.1 $\Phi \models_L \Phi$

oraz

$$\Phi \vdash_L \Phi$$

W6.2 $\models_L \Phi \Rightarrow X \models_L \Phi$

oraz

$$\vdash_L \Phi \Rightarrow X \vdash_L \Phi$$

W6.3 $(X \models_L \Phi \wedge \Phi \models_L \Psi) \Rightarrow X \models_L \Psi$

oraz

$$(X \vdash_L \Phi \wedge \Phi \vdash_L \Psi) \Rightarrow X \vdash_L \Psi$$

W6.4 $(X \models_L \Phi \wedge \Phi \models_L \ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner) \Rightarrow X \models_L \Psi$

oraz

$$(X \vdash_L \Phi \wedge \Phi \vdash_L \ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner) \Rightarrow X \vdash_L \Psi$$

W6.5 $X \models_L \Phi \Rightarrow (X \cup Y) \models_L \Phi$

oraz

$$X \vdash_L \Phi \Rightarrow (X \cup Y) \vdash_L \Phi$$[18].

Tak samo równoważność:

W6. 6 $\Phi \models_L \Psi \; wtw \; \models_L \ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner$

jest semantycznym (teoriomodelowym) odpowiednikiem syntaktycznego twierdzenia

$$\Phi \vdash_L \Psi \; wtw \; \vdash_L \ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner,$$

(którego implikacja prosta jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia o dedukcji ***RI.2: **T11.2**), a równoważność:

W6.7 $X \models_L \Phi \Leftrightarrow$ istnieje skończony podzbiór Y zbioru X taki, że $Y \models_L \Phi$,

jest teoriomodelowym analogonem twierdzenia ***RI.2: **T4'**, wyrażającego finitystyczność operacji Cn_L.

Jednakże w kontekście ogólnym – gdy mowa także o innych systemach dedukcyjnych, a więc gdy relacja Cn nie jest zawężona do relacji Cn_L, tj. wyprowadzania na gruncie klasycznego rachunku logicznego – zależność

[18] Zob. G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt., s. 53 i 66.

między relacją wynikania (semantycznego) i relacji konsekwencji (syntaktycznej) jest słabsza:

T13.b Jeżeli wyrażenie zdaniowe Φ jest konsekwencją syntaktyczną zbioru X, to Φ wynika logicznie (semantycznie) ze zbioru wyrażeń X.

Skrótowo:

T13.b' Jeżeli $X \vdash \Phi$, tj. jeśli $\Phi \in Cn(X)$, to $X \models \Phi$.

Dowód tej implikacji jest w pełni analogiczny do uzasadnienia implikacji $\boxed{\leftarrow}$ w dowodzie **T13.a**. Warto zauważyć, że przyjęte w dowodzie niewprost implikacji $\boxed{\rightarrow}$ założenie 3. $\Phi \notin Cn(X)$ nie doprowadzi w przypadku ogólnym, tj. dla relacji Cn, do sprzeczności, bo nie wynika zeń, że zbiór wyrażeń $X \cup \{\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner\}$ jest niesprzeczny, jako że nie ma gwarancji, że dany system dedukcyjny jest pełny[19].

Twierdzenia **T13** odnoszą się także do zdań, w tym także do wyrażeń, które są wprawdzie – jak twierdzenia (tezy) systemów dedukcyjnych – zapisywane jako formuły otwarte, lecz są rozumiane jako funkcje zdaniowe, których wszystkie zmienne są związane kwantyfikatorem ogólnym, czyli są rozumiane jako formuły zamknięte, tj. zdania (por. uwagi do ***RI.2: **T12**). Wiadomo przy tym, że jeśli formułę ze zmiennymi wolnymi można w ten sposób domknąć, to jest ona wyrażeniem prawdziwym w danej dziedzinie wtedy i tylko, gdy prawdziwa w tej dziedzinie jest odpowiadająca jej generalizacja (***RII.1: **T4**). Twierdzenia te obejmują ponadto funkcje zdaniowe otwarte, pojawiające się często w wierszach dowodów założeniowych, których w ten sposób nie można interpretować, a z których są wyprowadzalne, tj. wynikają logicznie, kolejne wiersze dowodowe. Da się przy tym okazać, że w zakresie zdań pojęcia wynikania określone w **D6.a** (dla zdań) oraz w **D6.b** (dla wyrażeń zdaniowych) są równoważne.

---

[19] Wyrażona w **T13.b** prawidłowość ma ważny wydźwięk filozoficzny i metalogiczny. Zgodnie z tym twierdzeniem są w systemach bogatszych (a „bogatszy" jest już system arytmetyki z dwoma działaniami) twierdzenia prawdziwe, które nie są tezami systemu, czyli są w nim niedowodliwe; **T13.b** potwierdza także, że pojęcie wynikania logicznego, zakładające pojęcie prawdziwości, jest ogólniejsze niż pojęcie konsekwencji (wyprowadzania) i tylko w zakresie prostych systemów (języków) pojęcia te są równozakresowe. Zob. J. Woleński, *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, dz. cyt., s. 170–172.

T14 Jeśli Φ jest zdaniem, a X jest zbiorem zdań, to Φ wynika logicznie z X w sensie określonym w **D6.a** wtedy i tylko, gdy wynika z tego zbioru zdań w sensie określonym w **D6.b**.

Dowód:

Zgodnie z **T14** i zapisami symbolicznymi w **D6.a'** i **D6.b'** do udowodnienia jest równoważność:

$(\bigwedge \mathcal{M})\ [X \subset E(\mathcal{M}) \Rightarrow \Phi \in E(\mathcal{M})] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\bigwedge \mathcal{M} \bigwedge \{a_n\})\ [X \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})]$,

przy czym – i to jest założenie przyjmowane w całym dowodzie – Φ jest zdaniem, a X jest zbiorem zdań (w dowodzie jest pomijany warunek niepustości, zaznaczany wcześniej napisem „$U \neq \varnothing$" lub „$\mathcal{M} \neq \varnothing$").

$\boxed{\rightarrow}$

1. $(\bigwedge \mathcal{M})\ [X \subset E(\mathcal{M}) \Rightarrow \Phi \in E(\mathcal{M})]$ {zał.}

 1.1 Niech $\mathcal{M}$ jest dowolną dziedziną, a $\{a_n\}$ dowolnym w niej ciągiem przedmiotów (wartościowaniem) takim, że: $X \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ {zd.}.

Da się okazać, że do sprzeczności prowadzi przypuszczenie:

  1.1.1 $\sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ {zd.}.

Wynika z niego bowiem:

  1.1.2 $\Phi \notin E(\mathcal{M})$,

bo wyrażenie prawdziwe jest spełnione przez każdy ciąg w $\mathcal{M}$ {***RII.1:**D3**},

  1.1.3 $\sim(X \subset E(\mathcal{M}))$ {**TOL**:1,1.1.2},

czyli, zgodnie z rozumieniem inkluzji (**RIV.1: **D2**) istnieje Ψ_1 takie, że

  1.1.4 (i) $\Psi_1 \in X$ oraz (ii) $\Psi_1 \notin E(\mathcal{M})$.

Ponieważ X jest zbiorem zdań {zał. dowodu}, więc równie Ψ_1 jest zdaniem; wiadomo także, że dowolne zdanie jest prawdziwe w dowolnej dziedzinie $\mathcal{M}$ wtedy i tylko, gdy istnieje w danej dziedzinie ciąg przedmiotów spełniających dane zdanie {***RII.1: **T5**} – co wobec 1.1.4(ii) prowadzi do wniosku, że:

  1.1.5 dla każdego ciągu $\{a_n\}_i$ z dziedziny $\mathcal{M}$, $i = 1, 2, \ldots$, jest tak, że $\sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi_1, \{a_n\}_i)$,

co znaczy, że także ciąg $\{a_n\}$, o którym mowa w 1.1, nie spełnia Ψ_1, tj.

  1.1.6 $\sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi_1, \{a_n\})$,

a to, wobec $X \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ {1.1} znaczy, że:

  1.1.7 $\Psi_1 \notin X$, co jest sprzeczne z 1.1.4(i).

Zatem:

1.2 $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ {1.1.1 $\Rightarrow$ sprz.}.

Ponieważ $\mathcal{M}$ jest dowolną dziedziną, a $\{a_n\}$ dowolnym w niej ciągiem, więc można ten fragment dowodu uogólnić:

$(\wedge\, \mathcal{M} \wedge \{a_n\})\, [X \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})]$

{**D**$\wedge$: 1.1 $\Rightarrow$ 1.2},

co kończy dowód implikacji prostej.

$\boxed{\leftarrow}$

1. $(\wedge\, \mathcal{M} \wedge \{a_n\})\, [X \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})]$ {zał.}

1.1 Niech $\mathcal{M}$ jest dowolną dziedziną taką, że: $X \subset E(\mathcal{M})$ {zd.}.

W kontekście tych założeń do sprzeczności wiedzie przypuszczenie:

1.1.1 $\Phi \notin E(\mathcal{M})$.

Ponieważ, zgodnie z założeniem dowodu, wyrażenie Φ jest zdaniem, więc – ponownie na podstawie {***RII.1: **T5**} – można uznać, że

1.1.2 dla każdego ciągu $\{a_n\}_i$ z dziedziny $\mathcal{M}$, $i = 1, 2, \ldots$: $\sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}_i)$,

czyli jest tak także dla ciągu $\{a_n\}$, o którym mowa w 1, tj.

1.1.3 $\sim\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$,

co implikuje – zgodnie z regułą **TOL**, zastosowaną do formuły uzyskanej z 1:

1.1.4 $\sim(X \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}\})$.

Ponieważ dla dowolnego zbioru $\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}_i)\}$ w dziedzinie $\mathcal{M}$ jest tak, że $E(\mathcal{M}) \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$ – bo w $E(\mathcal{M})$ są wyrażenia spełnione przez każdy ciąg z tej dziedziny, a w $\{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\}_i)\}$ są wyrażenia spełnione przez dowolny, lecz określony ciąg (por. uwagi poprzedzające **T2'**) – więc także:

1.1.5 $\sim(X \subset E(\mathcal{M}))$, co jest sprzeczne z 1.1.

Wobec tego:

1.2 $\Phi \in E(\mathcal{M})$ {1.1.1 $\Rightarrow$ sprz.}.

Po uogólnieniu – dopuszczalnym wobec 1.1 – można stwierdzić, że:

$(\wedge\, \mathcal{M})\, [X \subset E(\mathcal{M}) \Rightarrow \Phi \in E(\mathcal{M})]$ {**D**$\wedge$: 1.1 $\Rightarrow$ 1.2}.■

Definicja **D6.a** obejmuje także sytuacje wynikania zdania z nieskończonego zbioru zdań; natomiast w przypadku zbioru zdań skończonego prawdziwe jest następujące twierdzenie.

T15 Zdanie Φ wynika logicznie ze zdań $\{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n\}$ wtedy i tylko, gdy implikacja $\ulcorner(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n) \Rightarrow \Phi\urcorner$ jest podstawieniem jakiegoś prawa logicznego.

Dowód:
Twierdzenie:
1. zdanie Φ wynika logicznie ze zdań $\{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n\}$
jest równoważne z kolejnymi implikacjami:
2. $(\bigwedge \mathcal{M} \neq \emptyset)\ [\{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n\} \subset E(\mathcal{M}) \Rightarrow \Phi \in E(\mathcal{M})]$ {**D6.a'**, 1}
3. $(\bigwedge \mathcal{M} \neq \emptyset)\ [\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n \in E(\mathcal{M}) \Rightarrow \Phi \in E(\mathcal{M})]$ {**RIV.1: **T4**, 2}
4. $(\bigwedge \mathcal{M} \neq \emptyset)\ [\ulcorner \Psi_1 \wedge \Psi_2 \wedge \ldots \wedge \Psi_n \urcorner \in E(\mathcal{M}) \Rightarrow \Phi \in E(\mathcal{M})]$
{***RII.1: **L1a**, 3}
5. $(\bigwedge \mathcal{M} \neq \emptyset)\ [\ulcorner (\Psi_1 \wedge \Psi_2 \wedge \ldots \wedge \Psi_n) \Rightarrow \Phi \urcorner \in E(\mathcal{M})]$ {**L2.c**, 4}

Ostatnie twierdzenie – odczytane w kontekście **T12** i **W5** – znaczy, że: implikacja $\ulcorner (\Psi_1 \wedge \Psi_2 \wedge \ldots \wedge \Psi_n) \Rightarrow \Phi \urcorner$ jest podstawieniem jakiejś prawdy logicznej, tj. zdania logicznego prawdziwego w każdej niepustej dziedzinie, czyli podstawieniem jakiejś tezy logicznej (por. uwagi do ***RI.2: **T12**).■

Uzupełniając uwagi podsumowujące wyniki poprzedniego podrozdziału można stwierdzić, że pojęcia i metody semantyczne dają także możliwość potwierdzenia założeń zawartych w intuicyjnym pojęciu niezawodnych reguł wnioskowania. Da się udowodnić, że przyjęte w KRZ i WRP pierwotne reguły wnioskowania zawsze prowadzą od wyrażeń zdaniowych prawdziwych do prawdziwych (**T1.1**), a ponieważ da się również okazać, że niezawodne są reguły podstawiania i zastępowania (**RP**, $\mathbf{RZ}_{\Leftrightarrow}$, $\mathbf{RZ}_{=}$) oraz inne reguły wtórne stosowane w systemie założeniowym klasycznego rachunku logicznego (**RI.3 i ***RIII.2), więc można powiedzieć, że każda teza systemu uzyskana w wyniku zastosowania takich reguł jest prawdziwa w każdej dziedzinie niepustej (**T1.2**), tj. w każdej teorii, niezależnie od tego, czego dotyczy. Uściślenia semantyczne, a zwłaszcza pojęcie modelu dla zbioru/systemu wyrażeń (**D3**), dało także możliwość okazania, że jest spełniona zależność odwrotna. Mianowicie każda tautologia KRZ, tj. zdanie prawdziwe w każdej dziedzinie niepustej, jest tezą KRZ (**T10**); a ogólniej – jeśli zdanie jest prawdziwe w każdej dziedzinie niepustej, to jest tezą logiki klasycznej (**T12**), co znaczy, że klasyczny rachunek logiczny jest pełny, tj. zawiera wszystkie i tylko takie zdania, które są prawdziwe w każdej dziedzinie niepustej (**W5**). Znany jest także dowód tego, że tzw. bogatsze systemy dedukcyjne, tj. zawierające arytmetykę liczb naturalnych, o ile są niesprzeczne, to nie są pełne, co znaczy, że nie wszystkie zdania prawdziwe są ich tezami.

Pojęcie modelu jest podstawowe także w semantycznej charakterystyce niesprzeczności systemu oraz wynikania logicznego. Wiadomo, że koniecznym i wystarczającym warunkiem niesprzeczności jest istnienie modelu dla systemu zdań (**T8**); natomiast jeśli wynikanie jest zdefiniowane semantycznie, wtedy da się dowieść, że wyrażenie zdaniowe wynika ze zbioru wyrażeń zdaniowych wtedy i tylko, gdy jest konsekwencją logiczną wyrażeń danego zbioru (**T13**) – co znaczy, że w systemach logiki klasycznej syntaktyczne pojęcie wyprowadzenia (dowodu, konsekwencji) i semantyczne pojęcie wynikania logicznego są równozakresowe, a w dziedzinie zdań można okazać, że wynikanie logiczne danego zdania z innych zachodzi wtedy i tylko, gdy odpowiadająca mu implikacja jest podstawieniem jakiegoś prawa logicznego (**T15**), tj. spełnionego w dowolnej dziedzinie. W sytuacji ogólniejszej, niezawężonej do systemów logiki klasycznej, syntaktyczne pojęcie konsekwencji zakłada semantyczne pojęcie wynikania (**T13.b**). Warto ponownie podkreślić, że wszystkie te wyniki (i wiele innych) są oparte na pojęciu prawdziwości, uściślonym pojęciem spełniania (***RII.1: **D3**, **D2**)[20].

[20] Po raz kolejny widać, że A. Tarskiego definicje spełniania, prawdziwości i modelu są fundamentalne dla ścisłych badań semantycznych. W: J. Woleński, *Epistemologia. Poznanie – prawda – wiedza – realizm*, dz. cyt. są wyliczone i omówione ważniejsze twierdzenia semantyki, w których jest użyte pojęcie modelu (tamże, s. 232–235).

ROZDZIAŁ III

ZAGADNIENIA UZUPEŁNIAJĄCE

W kolejnych podrozdziałach są: omówione wybrane twierdzenia metalogiki zwane limitacyjnymi; zestawione własności syntaktyczne i semantyczne wybranych systemów dedukcyjnych; porównane metody definiowania i wykorzystania pojęcia modelu w klasycznych badaniach semantycznych (teoriomodelowych) z tzw. ujęciem teoriomnogościowym, stosowanym do opisu teorii empirycznych.

1. Twierdzenia limitacyjne

Za limitacyjne, tj. okazujące ograniczenia, można trafnie uznać wiele twierdzeń metalogiki[1]. Niektóre z nich, jak twierdzenie Lindenbauma (***RI.2: **T19**) i twierdzenia Löwenheima-Skolema-Tarskiego (***RII.2: **T9a**, **T9b**) zostały już omówione. Dlatego analizy zawarte w niniejszym podrozdziale są skupione na twierdzeniach sformułowanych przez K. Gödla, A. Tarskiego oraz A. Churcha, choć są w nich także uwagi o innych wynikach metalogiki, które można rozumieć limitacyjnie.

---

[1] Zob. np. J. Woleński, *O filozoficznym sensie metamatematycznych twierdzeń limitacyjnych*, „Wiadomości Matematyczne” 2009, t. 45, nr 2, s. 195–216; tenże, *Semantics and Truth*, dz. cyt., s. 238–240.

1.1 Twierdzenia Gödla

K. Gödel uzyskał wybitne wyniki nie tylko w dziedzinach matematyki i logiki, choć zwykle jego osiągnięcia są kojarzone z tymi dyscyplinami, a nawet wyłącznie z logiką[2]. Gdy jednak w opracowaniu z logiki mowa o limitacyjnych twierdzeniach Gödla, chodzi przede wszystkim o dwa wyniki okazujące ograniczenia metod formalnych, zwane twierdzeniami o niezupełności.

1.1.1 Oryginalne sformułowanie pierwszego z nich jest zgodne z poniższym twierdzeniem.

(G1) Każdy niesprzeczny system formalny, w którym da się udowodnić twierdzenia dotyczące podstawowych własności liczb naturalnych, jest niezupełny.

Inaczej mówiąc, system arytmetyki taki, jak system Peana (PA) o ile jest niesprzeczny, to jest niezupełny w sensie klasycznym (***RI.2.4.2: **D12.a1**), co znaczy, że istnieje (co najmniej jedno) zdanie języka tej teorii takie, że ani ono, ani jego zaprzeczenie nie jest w niej dowodliwe.

Współcześnie zwykle formułuje się to twierdzenie w jego wersji semantycznej – możliwej na gruncie Tarskiego teoriomodelowej teorii prawdy: w każdym takim systemie, o jakim mowa w **(G1)**, są takie zdania prawdziwe sformułowane w języku danego systemu, które nie są w nim dowodliwe (wyprowadzalne z jego aksjomatów). Jednakże oryginalny dowód tego twierdzenia był syntaktyczny i – co więcej – zakładał pojęcie niesprzeczności mocniejsze niż przyjmowane obecnie (***RI.2.4.1: **D12.a2**), mianowicie tzw. ω-niesprzeczności (niesprzeczności w sensie Gödla):

(*) System $\boldsymbol{T}$ jest ω-niesprzeczny wtedy i tylko, gdy dla dowolnej formuły Φ zapisanej w języku tego systemu:
jeśli $\vdash_T \Phi(0)$, $\vdash_T \Phi(1)$, $\vdash_T \Phi(2)$, ..., to $\vdash_T (\bigwedge x)\, \Phi(x)$.

---

[2] Znaczące wyniki opublikował także w dziedzinie kosmologii relatywistycznej, gdzie m.in. zaproponował oryginalne rozwiązanie równań pola grawitacyjnego OTW. Znaczenie teoretyczne tego wyniku polegało na tym, że rozwiązanie to zostało uzyskane przy tych samych co Einsteina założeniach co do ilości i rozkładu materii we Wschechświecie, a dawało model kosmologiczny całkowicie odmienny od einsteinowskiego modelu stacjonarnego, co obaliło przyjmowaną przez Einsteina zasadę (tzw. zasada Macha), że własności modelu są jednoznacznie określone przez takie założenia.

Inaczej, a równoważnie mówiąc, dla dowolnej formuły Φ zawierającej zmienną wolną x nie może być tak, by było na gruncie systemu $\boldsymbol{T}$ wyprowadzalne każde twierdzenie uzyskane w wyniku podstawienia za tę zmienną kolejno (nazw) stałych 0, 1, 2 itd., a nie było twierdzeniem systemu zdanie uzyskane w wyniku domknięcia danej formuły kwantyfikatorem dużym. System, który nie jest w tym sensie niesprzeczny, nazywa się ω-sprzecznym. W oryginalnym twierdzeniu (i dowodzie) Gödla jest zakładana ω-niesprzeczność (a także pojęcie rekurencyjności, które jest tu omówione w kolejnym paragrafie):

(G1*) Każdy ω-niesprzeczny system formalny, który ma rekurencyjnie definiowalny zbiór aksjomatów i reguł wyprowadzania i w którym da się udowodnić twierdzenia dotyczące podstawowych własności liczb naturalnych, jest nierozstrzygalny i niezupełny, tj. istnieje w nim taka formuła $(\bigwedge x)\ \Phi(x)$, że ani ona, ani jej negacja nie jest tezą systemu (system jest niezupełny w sensie Gödla)[3].

Własność ω-niesprzeczności jest silniejsza od niesprzeczności rozumianej klasycznie: każda ω-niesprzeczna teoria jest niesprzeczna, lecz nie odwrotnie[4]. Założenie o ω-niesprzeczności systemu było niezbędne do okazania, że nie jest w takim systemie wyprowadzalne zdanie $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner$. J. Rosser osłabił założenie ω-niezprzeczności do zwykłej niesprzeczności, czyli udowodnił mocniejsze (ogólniejsze) twierdzenie **(G1)**. Zgodnie z tym twierdzeniem nie istnieje sformalizowany system dedukcyjny o niesprzecznym układzie aksjomatów, w którym można udowodnić wszystkie prawdziwe zdania arytmetyki liczb naturalnych.

1.1.2 Twierdzeniem o wyraźnie limitacyjnej interpretacji jest tzw. drugie twierdzenia Gödla, a dokładniej – drugie twierdzenie Gödla o niezupełności, dotyczące oryginalnie systemów z aksjomatyką Peana.

---

3 Zob. np. G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt., s. 206. Gödel okazał, że dla każdego systemu zawierającego elementarną arytmetykę da się skonstruować zdanie, które o sobie samym stwierdza, że nie ma w tym systemie dowodu; jeśli system dedukcyjny jest niesprzeczny, to zdanie to jest prawdziwe, ale nie posiada dowodu (Gödel wykorzystał paradoks kłamcy). Zob także: S. Krajewski, *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne. Od mechanicyzmu do postmodernizmu*, Warszawa 2003.

4 Zob. np. J. Woleński, *Semantics and Truth*, dz. cyt., s. 236–238.

(G2) W systemie z aksjomatyką Peana jest formuła, którą można interpretować jako wyrażającą niesprzeczność tego systemu, a która nie jest w tym systemie dowodliwa.

Formuła, o której mowa, to zdanie wyrażające niesprzeczność uzyskane w wyniku zaproponowanej przez Gödla arytmetyzacji języka badanego systemu. Zgodnie z tym twierdzeniem dowolny dowód niesprzeczności systemu, w którym są sformułowane (ogólniej – są interpretowalne) aksjomaty arytmetyki Peana, wymaga założeń wykraczających poza daną teorię[5]. Twierdzenie to jest konsekwencją twierdzenia (**G1**), tj. o niezupełności arytmetyki.

Wysłowiając to twierdzenie swobodniej i ogólniej: dowodu niesprzeczności danego systemu nie można przeprowadzić na jego gruncie, a jedynie w teorii ogólniejszej, w której są mocniejsze środki dowodowe; z kolei dowód niesprzeczności tego mocniejszego systemu wymaga teorii jeszcze mocniejszej.

Wynik ten jest bardzo znaczący, okazuje bowiem, że dostatecznie bogate systemy dedukcyjne (o ile są niesprzeczne) nie dają podstaw dla okazania niesprzeczności samych siebie.

Z twierdzeń **(G1)** i **(G2)** wynika niemożność realizacji programu postulowanego przez D. Hilberta, by opracować formalny system dowodzenia twierdzeń obejmujący całą matematykę i poszukiwać w nim dowodów niesprzeczności dla całej matematyki (a więc także dla arytmetyki). Twierdzenia te bywają jednak interpretowane wadliwie (przesadnie). Na przykład (**G1**) jest często rozumiane jako dowód na to, że istnieją w matematyce twierdzenia nierozstrzygalne, choć zgodnie z tym twierdzeniem można jedynie głosić, że są twierdzenia matematyczne, których nie da się udowodnić na gruncie danego systemu dedukcyjnego, co znaczy także, że nie da się ująć wszystkich formalnych metod dowodowych w obrębie jednego systemu. Z kolei z **(G2)** nie wynika, że nie można w ogóle udowodnić niesprzeczności badanego systemu, lecz że nie da się tego zrobić na jego

[5] Zob.: np. G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt., s. 206–207; *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny…*, dz. cyt., s. 133–1344, 138. Szkic dowodu tego twierdzenia jest np. w: L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 377–384. O twierdzeniach limitacyjnych zob. J. Woleński, *Epistemologia. Poznanie – prawda – wiedza – realizm*, dz. cyt., s. 243–270; tenże, *O filozoficznym sensie metamatematycznych twierdzeń limitacyjnych*, dz. cyt.; tenże, *Semantics and Truth*, dz. cyt., s. 238–240.

gruncie[6]. Twierdzenia Gödla, okazujące ograniczenia metod formalnych, mają jednak także wydźwięk pozytywny: wynika z nich bowiem, że wyobraźnia matematyków w rozstrzyganiu twierdzeń nie może być zastąpiona przez metody algorytmiczne, np. przez dowodzenie komputerowe (dokładniej – może być zastąpiona, lecz tylko w bardzo wąskim zakresie).

Do twierdzeń Gödla o wydźwięku limitacyjnym bywa także zaliczane twierdzenie o pełności. Jest to wprawdzie twierdzenie, można rzec, pozytywne – głosi bowiem, że każda prawda logiki klasycznej (formuła spełniona w dowolnej dziedzinie) jest jej twierdzeniem, tj. ma w niej formalny dowód (zob. ***RII.2.4, zwłaszcza **W5**) – lecz pośrednio twierdzenie to rzeczywiście wskazuje na ograniczenie metod formalnych, mianowicie na zawężenie wymagania równozakresowości (praw i tez) do logiki pierwszego rzędu[7].

1.2 Twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności prawdy

Ponieważ mówienie o twierdzeniu Tarskiego jest, podobnie jak w przypadku K. Gödla, bardzo wieloznaczne, więc w tytule jest wskazany wynik, o który tu chodzi[8]. Ważnym uzupełnieniem Tarskiego definicji prawdy (zob. ***RII.1–2) było wykazanie, że w żadnym języku formalnym nie da się zdefiniować prawdziwości jego zdań. Wynik ten znany jest jako twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności prawdy:

6 Fakt, że została udowodniona niesprzeczność arytmetyki Peana (w 1936 roku przez Gentzena) nie przeczy **(G2)**, ponieważ metody zastosowane w tym dowodzie (tzw. indukcja pozaskończona) wykraczają poza formalne metody finitystycznej arytmetyki pierwszego rzędu.

7 Zob. J. Woleński, *O filozoficznym sensie metamatematycznych twierdzeń limitacyjnych*, dz. cyt., s. 198, gdzie w kontekście takiego uzasadnienia jest wzmiankowane twierdzenie Lindströma, zgodnie z którym systemy logiki klasycznej, tj. pierwszego rzędu, są najmocniejszymi teoriami spełniającymi ten wymóg (nie spełniają go teorie rzędów wyższych).

8 Osiągnięciom A. Tarskiego w dziedzinie semantyki jest poświęcona monografia J. Woleńskiego, *Semantics and Truth*, dz. cyt. (zwłaszcza s. 193–254); zob. także biogram naukowy A. Tarskiego, w: J. Woleński, *Tarski, Alfred*, w: A. Dąbrowski, M. Hoły-Łuczaj, A. Schumann i in., *Leksykon logików polskich 1900–1939*, dz. cyt., s. 330–347. Prace A. Tarskiego nt. teorii prawdy są zebrane w: A. Tarski, *Pisma logiczno-filozoficzne*, t. 1: *Prawda*, Warszawa 1995.

(T) Jeśli system $\boldsymbol{T}$ jest niesprzeczny, to nie jest w nim definiowalny zbiór zdań prawdziwych tego systemu.

Nawiązując do symboliki stosowanej w ***RII.1 – gdzie symbol „$E(\boldsymbol{\mathcal{M}})$" oznacza zbiór (zapisanych w języku J) wyrażeń prawdziwych w dziedzinie $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ (zbiór zwany także zawartością dziedziny $\boldsymbol{\mathcal{M}}$) – można zbiór zdań prawdziwych systemu $\boldsymbol{T}$ (zapisanych w jęyku tego systemu) oznaczyć symbolem „$E(\boldsymbol{T})$" oraz wypowiedzić powyższe twierdzenie krócej:

(T*) W żadnym niesprzecznym systemie $\boldsymbol{T}$ nie da się zdefiniować zbioru $E(\boldsymbol{T})$ jego wyrażeń prawdziwych.

Zgodnie z tym twierdzeniem można powiedzieć, że pojęcia prawdy, jako zrelatywizowanego do określonej interpretacji danego języka J systemu $\boldsymbol{T} = \langle A, \boldsymbol{D}\rangle$, nie da się uchwycić metodami formalnymi, tj. syntaktycznymi języka J tej teorii, pojęcie to jest poza jej metodami teoriodowodowymi[9]. Wprowadzenie pojęć niezbędnych do zdefiniowania zbioru $E(\boldsymbol{T})$ – tj. odmian pojęć spełniania, dziedziny i modelu – wymaga zbudowania metajęzyka MJ, w którym pojęcia te są definiowane, czyli wymaga pojęć i metod semantycznych. Pominąwszy szczegóły tej semantycznej (teoriomodelowej) procedury (zob. ***RII.1–2), tu wystarczy stwierdzić, że w determinowaniu ogółu $E(\boldsymbol{T})$ zdań prawdziwych te metajęzykowe pojęcia semantyczne „spotykają się" z syntaktycznymi wtedy dopiero, gdy trzeba spośród ogółu poprawnie zbudowanych formuł języka J wydzielić ogół tez systemu $\boldsymbol{T}$, tj. ogół $Cn_{\boldsymbol{D}}(A)$, i powiedzieć, że do $E(\boldsymbol{T})$ należą te tylko spośród tez, które są prawdziwe w każdym modelu dla $\boldsymbol{T}$ (czyli spełnione przez każdy ciąg przedmiotów czerpanych z uniwersum dowolnego modelu tej teorii). Definicja pojęcia prawdziwości właściwa dla (języka) danego systemu wymaga więc zastosowania pojęć i metod właściwych dla systemu (języka) mocniejszego (bogatszego).

Twierdzenie **(T)** jest jednym z najważniejszych twierdzeń metalogicznych, co nie od razu zostało dostrzeżone[10]. Porównując je z innymi twierdzeniami limitacyjnymi – dotyczącymi niezupełności (w różnych jej znaczeniach), niepełności, nierozstrzygalności (jest omówiona w kolejnym paragrafie), niekategoryczności itp. – można rzec, że wydźwięk

---

9 Zob.: J. Woleński, *O filozoficznym sensie metamatematycznych twierdzeń limitacyjnych*, dz. cyt., s. 202; zgodna z tą oceną jest także uwaga sformułowana w: W.A. Pogorzelski, *Klasyczny rachunek kwantyfikatorów...*, dz. cyt., s. 89.

10 Zob.: J. Woleński, *Semantics and Truth*, dz. cyt., s. 255–269.

limitacyjny twierdzenia Tarskiego o niedefiniowalności prawdy jest najmocniejszy. Twierdzenie to ujawnia bowiem, że w zakresie pojęcia prawdy (oraz pojęć w nim zakładanych, a także pochodnych) ograniczenie metod formalnych (syntaktycznych, teoriodowodowych) jest absolutne – w tym sensie, że niedefiniowalność prawdy dotyczy dowolnych systemów dedukcyjnych.

1.3 Teza i twierdzenie Churcha

Tak zwana teza Churcha jest kluczowa dla problematyki rozstrzygalności[11]. Rozstrzygalność rozumiana jako własność systemów dedukcyjnych została omówiona w ***RI.2.4.3, choć – zgodnie z zastrzeżeniem sformułowanym w punkcie wyjścia tamtych rozważań – nie zostały w nich użyte pojęcia niezbędne dla ścisłego ujęcia rozstrzygalności, tj. pojęcia obliczalności i rekurencyjności zbioru tez systemu. Celem najbliższych analiz jest poprawienie charakterystyki rozstrzygalności – w stopniu możliwym bez wykładania teorii funkcji rekurencyjnych i zakładanych w niej pojęć. Dlatego pojęcie rozstrzygalności zostanie przybliżone najpierw (a w sumie – przede wszystkim) bez powoływania się wprost na tezę zw. Churcha, która dla ścisłego badania rozstrzygalności jest dziś podstawowa, jako że daje podstawę dla udowodnienia twierdzeń o rozstrzygalności badanych systemów – m.in. twierdzenia Churcha[12].

W punkcie wyjścia docelowych uściśleń jest – przyjęte w dotychczasowych analizach (***RI.2.4.3) – rozumienie rozstrzygalności zakładające pojęcie metody efektywnej (skutecznej): metoda jest efektywna dla danego problemu, gdy w skończonej liczbie zgodnych z nią kroków prowadzi do jego rozwiązania, tj. do prawdziwej odpowiedzi na zadane pytanie; a gdy jest tak dla każdego problemu danej klasy zagadnień, to

---

[11] Tezie Churcha jest poświęcona monografia: A. Olszewski, J. Woleński, R. Janusz (red.), *Church's Thesis After 70 Years*, Frankfurt 2006.

[12] Niniejsze ujęcie jest wzorowane na zawartym w: G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt., s. 17–19, 176–205 , gdzie z kolei, jako źródło ścisłego ujęcia rekurencyjności (i rozstrzygalności), jest wskazana praca A. Grzegorczyka, *Fonctions Récursives*, Paris–Louvain 1961. Obszerne omówienie zagadnień rozstrzygalności jest w: A. Grzegorczyk, *Zarys logiki* matematycznej, dz. cyt., s. 337–484 oraz w: R. Murawski, *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla*, Poznań 2003.

jest metodą efektywną w danej klasie (dziedzinie). Ważne jest przy tym, że kolejne kroki są dokładnie opisane – dlatego mówi się o procedurze mechanicznej, algorytmicznej, o obliczaniu wyniku – oraz że jej stosowanie jest niezawodne, tj. z konieczności prowadzi do odpowiedzi prawdziwej, prowadzi jednoznacznie do prawidłowego wyniku.

Z pojęcia metody efektywnej wynika, że musi być opisana w jakimś języku, a przy tym jej opis musi być skończonym ciągiem wyrażeń danego języka – naturalnego (słów), mieszanego lub sztucznego (np. języka programowania) – w przeciwnym razie bowiem nie mogłaby być zastosowana nawet przez komputer o nieograniczonej mocy obliczeniowej. Opis metody jest formułowany w jakimś języku zinterpretowanym (tylko wtedy można mówić o opisie), którego słownik, dowolnie liczny, lecz skończony, może być wzbogacony o skończony zbiór nowych terminów, potrzebnych dla opisu danej metody. Dla potrzeb niniejszej argumentacji przyjmijmy, że $\boldsymbol{J}$ jest językiem uzyskanym w wyniku takiego wzbogacania o terminy czerpane z dostępnych języków (naturalnych, sztucznych, mieszanych) lub tworzonych dla potrzeb opisu metod efektywnych. Otóż da się łatwo okazać, że nawet w takim – w wyjaśnionym sensie – maksymalnym języku $\boldsymbol{J}$ nie da się opisać nieprzeliczalnie wielu metod efektywnych. Jest oczywiste, że nawet jeśliby słownik $\boldsymbol{S}$ języka $\boldsymbol{J}$ był sumą słowników S_1, S_2, … języków składowych J_1, J_2, …, to o ile słowniki te są skończone, to również $\boldsymbol{S}$ jest zasobem skończonym – a zwykle zasób trminów wykorzystywany do opisu metod jest (zdecydowanie) właściwym podzbiorem takiej możliwej, maksymalnej sumy. Opisy metod efektywnych są wobec tego skończonymi ciągami terminów czerpanych ze skończenie przeliczalnego słownika $\boldsymbol{S}$ – zwykle ciągami wieloelementowymi, dla ogólności niniejszego rozumowania przyjmijmy, że są to ciągi 1-elementowe, 2-elementowe itd. Otóż – jak wiadomo z kombinatoryki – liczba ciągów k-elementowych tworzonych z elementów zbioru skończonego też jest skończona[13]. W rozważanej tu sytuacji jest ona dana wzorem: $\|\boldsymbol{S}\|^k$, w którym $\|\boldsymbol{S}\|$ to liczność (liczba elementów) skończonego słownika $\boldsymbol{S}$, a k to długość (liczba wyrazów) ciągu. Wobec tego suma liczb ciągów, kolejno: 1-elementowych (takich jest dokładnie tyle, ile elementow w $\boldsymbol{S}$), 2-elementowych, …,

[13] Chodzi o liczbę wariacji z powtórzeniami, a zastosowanie tego wzoru zostało uzasadnione, gdy była mowa o liczbie wartościowań, zależnej od liczby wartości logicznych przyjętych w rachunku zdań i liczby argumentów w formule (rachunku zdań dwuwartościowego lub wielowartościowego – zob. **RI.1.2 oraz **RII.1).

‖***S***‖-elementowych – też jest skończona (co zrozumiałe, a przy tym zgodne z **RIV.3: **T9**). Na pewno jest więc tak, że liczba takich ciągów/opisów jest – by użyć przydatnego tu terminu – przeliczalna (w sensie określonym w RIV.3: **D7**). A skoro – przy przyjętym tu założeniu, że ***J*** jest językiem zinterpretowanym – jest wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie takich opisów metodom efektywnym, więc można uznać, że:

(C.1) Metod efektywnych jest przeliczalnie wiele.

Okazuje się, że wynik ten, uzyskany tu bez ścisłych dowodów, jest podstawowy dla uzasadnienia negatywnej odpowiedzi na pytanie o rozstrzygalności logiki pierwszego rzędu i wspartych na niej, bogatszych systemów dedukcyjnych. Aby zbliżyć analizy do systemów interesujących z punktu widzenia rozstrzygalności, tj. takich, w których są formułowalne twierdzenia arytmetyki liczb naturalnych, trzeba pojęcie metody efektywnej powiązać z pojęciem rozstrzygalności zbiorów liczb naturalnych. Mianowicie:

(C.2) Istnieją zbiory liczb naturalnych, które nie są:
a) efektywnie enumerowalne;
b) rozstrzygalne.

Twierdzenie to jest bezpośrednią konsekwencją **(C.1)**. Pośród metod efektywnych jest podzbiór skutecznych sposobów enumeracji zbiorów liczb naturalnych oraz rozstrzygania, czy dowolna liczba naturalna jest elementem jakiegoś (danego) zbioru. Każda metoda spośród tego podzbioru wyznacza dokładnie jedną enumerację i sposób rozstrzygania o należeniu liczb do danego zbioru. Skoro ogół metod efektywnych jest przeliczalny, to także jego podzbiór, o którym teraz mowa, jest przeliczalny (zgodnie z **RIV.3: **T9.a**). Natomiast podzbiorów ogółu liczb naturalnych ***N*** jest – jak wiadomo (**RIV.3: **W7b**) – nieprzeliczalnie wiele. Znaczy to, że relacja jedno-jednoznaczna wiążąca metody efektywne z podzbiorami zbioru ***N*** wyczerpie zbiór metod, a w klasie podzbiorów zbioru liczb naturalnych pozostaną zbiory niezwiązane tą relacją, tj. takie, które nie są efektywnie enumerowalne i nie są rozstrzygalne.

Wniosek ogłoszony w **(C.2)** może się wydawać niezgodny ze zdroworozsądkowymi przedstawieniami zbiorów liczb naturalnych. Komentując ten wynik (wyniki uzasadniające ten komentarz są w **RIV.3), trzeba przede wszystkim podkreślić, że chodzi o podzbiory zbioru liczb naturalnych ***N***, czyli o elementy zbioru potęgowego ***Pot*(*N*)**, o którym wiadomo, że jest zbiorem nieprzeliczalnie nieskończonym, o mocy większej niż $\|\mathcal{N}\| = \aleph_0$; a dokładniej: zbiory liczb naturalnych, o których mowa w **(C.2)**, muszą być nieskończone, ponieważ skończone podzbiory zbioru $\mathcal{N}$ są enumerowalne i rozstrzygalne. Wniosek **(C.2)**, zwłaszcza w jego wersji **a)**, brzmi jednak zaskakująco nawet dla nieskończonych zbiorów będących podzbiorami zbioru liczb naturalnych $\mathcal{N}$. Zbiory takie, jako podzbiory przeliczalnego zbioru $\mathcal{N}$, są bowiem przeliczalne, w każdym z nich da się wprowadzić dobre uporządkowanie relacją <, a mimo to, zgodnie z **(C.2)** nie dla każdego takiego zbioru istnieje skuteczny sposób wyliczenia jego elementów, a mówiąc ściślej – nie dla każdego istnieje funkcja jedno-jednoznaczna o dziedzinie $\mathcal{N}$ i przeciwdziedzinie identycznej z danym nieskończonym zbiorem[14].

Kolejnym krokiem na drodze do uchwycenia intuicyjnych pojęć metody efektywnej i zagadnienia rozstrzygalności jest uściślenie pojęcia obliczalności, osiągnięte docelowo uszczegółowieniami pojęcia rekurencyjności. Pojęcie rekurencyjności daje możliwość uściślenia pojęcia obliczalności, a tym samym pojęcia rozstrzygalności, skoro – zgodnie z przytoczonym już w ***RI.2.4.3 twierdzeniem: system jest rozstrzygalny wtedy i tylko, gdy zbiór jego tez jest obliczalny[15]. Określenia zmierzające do takiego uściślenia warto poprzedzić uwagą sformułowaną w komentarzu do **RIV.2.3.1: **D15.1** – funkcje rekurencyjne należą do klasy funkcji, których argumenty oraz wartości są liczbami naturalnymi. Podane niżej określenia dotyczą wyłącznie funkcji tej klasy.

(C.3) Funkcja n-argumentowa f jest:

(i) całkowita wtedy i tylko wtedy, gdy jej dziedziną jest zbiór wszystkich uporządkowanych n-tek liczb naturalnych, tj. gdy $D_{\mathrm{I}}(f) = \mathcal{N}^n$;

---

[14] Warunkiem koniecznym i wystarczającym, by zbiór $A \subset \mathcal{N}$ był rozstrzygalny jest efektywna enumerowalność zbioru A i jego dopełnienia A' do zbioru $\mathcal{N}$ (rozumiane jak w **RIV.1: **D9**). Równoważność ta nie jest niezbędna w niniejszych analizach (łatwy jej dowód jest w: G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt., twierdzenie 51.5, s. 178).

[15] Zob. L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 349, D19. Pojęcie rekurencyjności pojawiło się już w kontekście definicji indukcyjnych, in. – przez rekurencję (*R VII.1.3.2), oraz gdy była mowa o ciągach i funkcjach (**RIV.2.3.1).

(ii) obliczalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcją całkowitą i istnieje efektywna metoda obliczania wartości tej funkcji dla każdego elementu jej dziedziny.

W określeniu powyższym symbol $\mathcal{N}^n$ jest rozumiany zgodnie z **RIV.2: **D2.a2**, tj. oznacza *n*-członowy produkt (iloczyn kartezjański) zbioru $\mathcal{N}$. Zgodnie z tymi definicjami obliczalna funkcja jednoargumentowa to taka, której dziedziną jest zbiór $\mathcal{N}$ i da się obliczyć jej wartość dla każdej liczby naturalnej; obliczalna funkcja dwuargumentowa (działanie rozumiane wąsko) ma określoną wartość w $\mathcal{N}$ dla dowolnej pary czerpanej z $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ itd. Znane przykłady funkcji całkowitych i obliczalnych to jednoargumentowa funkcja następnika i dwuargumentowe funkcje dodawania i mnożenia.

W kontekście określeń **(C.3)** i wcześniejszych ustaleń da się okazać, że:

(C.4) **(i)** Funkcji obliczalnych jest nieskończenie, lecz tylko przeliczalnie wiele;

(ii) Istnieją nieobliczalne funkcje całkowite.

Jeśli chodzi o **(i)**, to jest oczywiste, że ciąg funkcji f_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ określony tak, że $f_i = x + i$ $(x \in \mathcal{N})$ jest nieskończony – co świadczy o tym, że funkcji obliczalnych określonych w zbiorze liczb naturalnycyh jest nieskończenie wiele. Z drugiej strony z **(C.1)** wynika, że funkcji takich jest tylko przeliczalnie wiele – a zatem jest ich nieskończenie, lecz przeliczalnie wiele. Natomiast **(ii)** ponownie wynika z tego, że jest nieprzeliczalnie wiele funkcji całkowitych (jako że nieprzeliczalnie wiele jest podzbiorów zbioru liczb naturalnych), a zgodnie z **(C.1)** metod efektywnych (obliczalnych) jest przeliczalnie wiele[16].

Ustalenia powyższe dają już podstawę do podjęcia – nadal w sposób nie w pełni ścisły – zagadnienia rozstrzygalności systemów dedukcyjnych zawierających arytmetykę liczb naturalnych. Chodzi o systemy – zwane akceptowalnymi – to znaczy systemy niesprzeczne, których formuły:

(i) są skończonymi ciągami symboli czerpanych ze skończonego słownika (alfabetu);

[16] W: G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt., twierdzenie 51.8, s. 179 jest podana (zdefiniowana) całkowita funkcja nieobliczalna (definicja ta jest następnie wykorzystana w dowodach twierdzeń, które niżej są jedynie omówione).

(ii) wyrażają prawa teorii liczb, dlatego są w nich wyrażenia denotujące dowolną liczbę naturalną.

A przy tym:

(a) formuły otwarte są tezami systemu wtedy i tylko, gdy mają domknięcie będące tezą;

(b) jest w systemie reprezentowany każdy rozstrzygalny zbiór liczb naturalnych[17].

Otóż da się okazać dwie znaczące prawidłowości. Po pierwsze:

(C.5) Każdy akceptowalny system arytmetyki jest nierozstrzygalny.

W dowodzie tego twierdzenia widać następującą zależność: jeśli system taki jest rozstrzygalny, to istnieje rozstrzygalny zbiór liczb naturalnych, który nie jest w nim reprezentowany, co znaczy, że system nie jest akceptowalny, jako że nie spełnia warunku (b); Jeśli natomiast system jest akceptowalny, to nie jest rozstrzygalny[18].
Prawidłowość druga:

(C.6) Każdy akceptowalny system arytmetyki, którego zbiór formuł jest rozstrzygalny i istnieje efektywna metoda ustalania, co jest dowodem w danym systemie, jest niezupełny.

Niezupełność, o której mowa w tym twierdzeniu – zwanym uogólnionym twierdzeniem Gödla – jest niezupełnością w sensie klasycznym (***RI.2.: **D12.a1**). Twierdzenie to trzeba rozumieć tak, że żaden system aksjomatyczny z rozstrzygalnym zbiorem aksjomatów nie może zawierać jako swoich tez wszystkich praw (prawdziwych twierdzeń) arytmetyki, a nie że nie ma systemu zawierającego ogół tych praw, wiadomo bowiem, że ogół tych praw sam tworzy stystem[19].

Tak zwana teza Churcha jest właściwie hipotezą uściślającą pojęcie efektywności rozumianej jako obliczalność, a tym samym pojęcie rozstrzygalności systemu zdefiniowanej jako obliczalność zbioru jego tez. Propozycja Churcha polega na sprowadzeniu ogółu funkcji obliczalnych

---

[17] Zbiór liczb naturalnych *X* jest reprezentowany w danym systemie, gdy jest w tym systemie formuła zawierająca jedną zmienną wolną, która po podstawieniu za zmienną każdej stałej denotującej jakiś element (liczbę) ze zbioru *X* jest tezą danego systemu (podstawienie za zmienną stałych czerpanych z *X* przekształca formułę w tezę) – zob. G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt., s. 180.

[18] Dowód tamże, s. 180–181.

[19] Zob. tamże, s. 183.

do klasy funkcji tzw. rekurencyjnych. Dokładniej mówiąc – na utożsamieniu (zakresowym) pojęcia funkcji (efektywnie) obliczalnej z pojęciem funkcji rekurencyjnej. Zachowując umowę, że nadal mowa wyłącznie o funkcjach określonych w zbiorze liczb naturalnych, można tezę Churcha wyrazić następująco:

(C7) Klasa funkcji obliczalnych jest tożsama z klasą funkcji rekurencyjnych[20].

Określenie to poprawia przybliżone wcześniej rozumienie skutecznej obliczalności tylko wtedy, gdy jest zrozumiałe (uściślone) pojęcie funkcji rekurencyjnych. Dla potrzeb niniejszych rozważań wystarczy powiedzieć, że w celu zdeterminowania klasy takich funkcji są najpierw wyliczone i określone tzw. wyjściowe funkcje rekurencyjne, tj. funkcje niewątpliwie obliczalne i całkowite, tj. określone – zgodnie z **(C.3i)** – dla wszystkich liczb naturalnych. W ich zestawie zawsze są np. jednoargumentowa funkcja następnika, określona wzorem $f(x) = x + 1$; dwuargumentowe funkcje sumy, iloczynu, potęgowania. Następnie są zdefiniowane operacje, które od funkcji obliczalnych prowadzą do funkcji obliczalnych, np. operacja składania funkcji rekurencyjnych. Wynikiem powtarzania takich operacji skończoną liczbę razy, rozpoczynającego się od funkcji rekurencyjnych wyjściowych, jest klasa wszystkich funkcji rekurencyjnych. Klasę tę można rozumieć (zgodnie z ***RI.1: **D4.b**, **D4.e**) jako minimalny zbiór zamknięty ze względu na określone operacje tworzenia funkcji pochodnych z danych funkcji wyjściowych obliczalnych[21]. Dowolny zbiór X liczb naturalnych jest określany jako rekurencyjny wtedy i tylko, gdy w klasie tej istnieje funkcja rekurencyjna określona dla każdego elementu sprawdzanego zbioru X. Ponieważ każda tak określona funkcja rekurencyjna jest obliczalna, więc uściślenie rozstrzygalności zbioru pojęciem obliczalności, a pojęcia obliczalności – zgodnie z tezą Churcha – rekurencyjnością, prowadzi do wniosku, że każdy zbiór rekurencyjny jest rozstrzygalny. Znaczy to np., że system jest rozstrzygalny, a zbiór sformułowanych w jego języku tez (także ciągów tez, czyli dowodów) – reprezentowanych w sposób

[20] Zob. np. J. Woleński, *Semantics and Truth*, dz. cyt., s. 136.

[21] Szersze omówienie pojęcia funkcji rekurencyjnej jest np. w: T. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt., s. 313–322. Klasa tak określonych funkcji rekurencyjnych jest identyczna m.in. z tzw. klasą funkcji obliczalnych Turinga oraz funkcji obliczalnych Markowa – zob. G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt., s. 187.

jedno-jednoznaczny liczbami naturalnymi (np. numerami Gödlowskimi) – jest rekurencyjny.

Korzystając z tezy Churcha, da się w sposób ścisły okazać, że jest prawdziwe, tak samo zwane, twierdzenie:

(C8) Logika pierwszego rzędu, tj. jakikolwiek system WRP (z identycznością lub bez), jest nierozstrzygalny.

Da się jednak udowodnić, że są rozstrzygalne pewne podsystemy (podzbiory tez) rachunku predykatów[22]. Zakładając tezę Churcha, można także okazać nierozstrzygalność każdego systemu arytmetyki liczb naturalnych z działaniami dodawania i mnożenia, w którym są reprezentowane (denotowane) wszystkie liczby naturalne i jest określone ogólne pojęcie liczby naturalnej. Ogólniej i dokładniej można powiedzieć, że każda (niesprzeczna) teoria, w której są reprezentowalne wszystkie zbiory rekurencyjne, jest istotnie nierozstrzygalna, tzn. jest nierozstrzygalna (w znaczeniu zgodnym z ***RI.2.4.3: **D13.a)** i każde jej niesprzeczne rozszerzenie również jest nierozstrzygalne (tamże, **D13.b**). W szczególności istotnie nierozstrzygalna jest arytmetyka Peana (udowodniono także wiele twierdzeń szczegółowych dotyczących nierozstrzygalności tej arytmetyki)[23].

2. Zestawienie własności wybranych systemów dedukcyjnych

Wskazane tytułem tego podrozdziału zestawienie wpisuje się dobrze w rozważania dotyczące ograniczenia metod formalnych. Można powiedzieć, że podsumowuje i uzupełnia to, co wiadomo z twierdzeń limitacyjnych o syntaktycznych i semantycznych własnościach wybranych systemów dedukcyjnych[24].

---

[22] Zob. tamże, s. 201–205, gdzie jest dowód twierdzenia Churcha (zakładający tezę Churcha) oraz są dowody rozstrzygalności pewnych podsystemów rachunku predykatów.

[23] Zob. tamże, s. 189–202 i 209, a także A. Olszewski, *Teza Churcha a twierdzenie Gödla*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 2000, nr 26, s. 59–65.

[24] W zestawieniu pominięto informację, że żaden z uwzględnionych w nim systemów nie jest kategoryczny (zob. ***RII.2.4) oraz że są znane różne ich niezależne (niektóre infinistyczne) aksjomatyki (zob. **RI.4, **RIV.4.2.2, ***I.2.4.4). Gdy mowa w nim o teoriach elementarnych, chodzi o takie, które da się sformułować w logice pierwszego rzędu, bez zakładania pojęć teorii zbiorów. Zestawienie jest wzorowane

System dedukcyjny	**Własności**
klasyczny rachunek zdań	niesprzeczny (w sensie klasycznym i Posta); niezupełny w sensie klasycznym (negacyjnie), zupełny w s. Posta; rozstrzygalny; pełny
jednoargumentowy rachunek predykatów pierwszego rzędu	niesprzeczny; niezupełny w sensie klasyczny i w sensie Posta; rozstrzygalny; pełny
wieloargumentowy rachunek predykatów pierwszego rzędu (WRP)	niesprzeczny; niezupełny w sensie klasycznym i w sensie Posta; nierozstrzygalny; pełny
rachunek predykatów pierwszego rzędu z identycznością	niesprzeczny; niezupełny w sensie klasyczny i w sensie Posta; nierozstrzygalny; pełny
elementarna teoria liczb z dodawaniem (arytmetyka Presburgera)	niesprzeczna; zupełna w s. klasycznym; rozstrzygalna
elementarna teoria liczb z mnożeniem (arytmetyka Skolema)	niesprzeczna; zupełna w s. klasycznym; rozstrzygalna
elementarna algebra liczb rzeczywistych z dodawaniem, mnożeniem, z każdą indywidualną liczbą naturalną, lecz bez ogólnego pojęcia (zbioru) liczb naturalnych	niesprzeczna; zupełna w s. klasycznym; rozstrzygalna
elementarna algebra z każdą indywidualną liczbą naturalną, lecz bez ogólnego pojęcia liczby naturalnej	niesprzeczna; zupełna w s. klasycznym; rozstrzygalna
elementarna teoria liczb z dodawaniem i mnożeniem, z każdą indywidualną liczbą naturalną i ogólnym pojęciem liczby naturalnej	niesprzeczna (dowód wykorzystujący zasadę indukcji pozaskończonej); nierozstrzygalna; niepełna

na: G. Hunter, *Metalogika*, dz. cyt., s. 208–209 oraz na: J. Woleński, *Semantics and Truth*, dz. cyt., s. 137–140; w pracach tych jest wiele uwag historycznych dotyczących głównych wyników badań metalogicznych (w monografii J. Woleńskiego zwłaszcza na s. xi–xix, 172–192, 255–269).

System dedukcyjny	Własności
teoria zbiorów Zermela-Fraenkla, teoria zbiorów von Neumanna-Bernaysa-Gödla	nie udowodniono niesprzeczności tych teorii; udowodniono, że jeśli są niesprzeczne, to są niezupełne i nierozstrzygalne

3. Pojęcie modelu w rekonstrukcjach teorii empirycznych

Omówione w ***RII.2.2, można powiedzieć – klasyczne rozumienie modelu, warto uzupełnić procedurą definiowania modelu stosowaną w opisie teorii empirycznych, w ujęciu zwanym teoriomnogościowym, oraz uwagami porównawczymi dotyczącymi tych ujęć. Jest to uzasadnione także tym, że w kontekście teorii empirycznych, w próbach ich zrekonstruowania wedle procedury teoriomodelowej widać, jak nasilają się ograniczenia metod formalnych przy próbach ich zastosowania do języków znacznie bogatszych niż języki systemów logiki i tzw. czystej matematyki.

3.1 Tzw. teoriomnogościowa charakterystyka modelu

W charakterystyce zw. teoriomnogościową podstawowe dla ogólnego określenia modelu jest pojęcie struktury logicznej[25]. Nim jednak zostanie

[25] Ujęcie zwane teoriomnogościowym jest bardziej znane pod nazwą strukturalnego lub strukturalistycznego, choć jest także stosowany termin „niezdaniowe ujęcie teorii". Pierwsza z tych nazw wskazuje na przyjęty w tym ujęciu opis teorii w języku teoriomnogościowym, a zwłaszcza na sposób reprezentowania teorii, zwany aksjomatyzacją przez zdefiniowanie predykatu teoriomnogościowego. Trzeci termin też wiąże się z tą metodą, bardziej jednak z opracowaną w tym ujęciu koncepcją teorii, które są rozumiane nie jako zbiory zdań, lecz jako struktury pojęciowe (w fizyce współczesnej – matematyczne) stosowane do formułowania twierdzeń. Nazwa „strukturalistyczne" obejmuje i metody, i opracowaną koncepcję teorii, trzeba jednak dodać, że chodzi o odmianę strukturalizmu zapoczątkowaną w pierwszej połowie lat pięćdziesiątych ub. stulecia, głównie przez P. Suppesa (zob.: J.J.C. McKinsey, A.C. Suggar, P. Suppes, *Axiomatic Foundations of Classical Particle Mechanics*, „Journal of Rational Mechanics and Analysis" 1953, t. 2, s. 253–272; P. Suppes, *Introduction to Logic*, New York 1957; tenże, *Set-theoretic Structures*

ono użyte, warto sformułować uwagi terminologiczne, które ułatwią prezentację podejścia zwanego teoriomnogościowym i porównanie go z teoriomodelowym[26].

Otóż termin „struktura logiczna" wskazuje na pojęcie znane z analiz dotyczących relacji, a zwłaszcza izomorfizmu relacji (**RIV.2.3.5), gdzie jednak, w prezentacji poświęconej relacjom, częściej niż „struktura" były używane nazwy „układ relacyjny", „system relacyjny", „struktura relacyjna", a zawężające „logiczna" nie było potrzebne, w kontekście opracowania poświęconego zagadnieniom czerpanym z logiki. Uwzględniając terminologię stosowaną w publikacjach, w których ujęcie teoriomnnogosciowe jest prezentowane lub (zwłaszcza) stosowane, również w niniejszej prezentacji częściej niż „systemy" i „układy" będzie używany termin „struktury relacyjne" lub „struktury"[27].

W dotychczasowych rozważaniach była mowa o strukturach postaci $<A, R_1, \ldots, R_n>$, a twierdzenia dotyczące izomorfizmu były sformułowane dla najprostszych układów relacyjnych, tj. o formie $<A, R>$. W prezentacji ujęcia teoriomnogościowego będzie jednak potrzebny ogólniejszy schemat

in Science, Stanford, CA 1967), a szerzej znaną od lat siedemdziesiątych dzięki pracom J. Sneeda (zwłaszcza monografii *The Logical Structure of Mathematical Physics*, Dordrecht 1971) oraz Stegmüllera (*The Structure and Dynamics of Theories*, New York 1976), który spopularyzował to ujęcie i skupił grupę filozofów nauki (m.in. W. Balzera, C.U. Moulinesa, G. Ludwiga), którzy je rozwinęli i zastosowali do rekonstrukcji wielu teorii empirycznych. Najważniejsze wyniki tych badań są w monografii: W. Balzer, C.U. Moulines, J. Sneed, *An Architectonic for Science. The Structuralist Program*, Dordrecht 1987, odsyłającej do wielu innych prac, w których ujęcie strukturalistyczne jest rozwijane lub stosowane do rekonstrukcji konkretnych teorii.

[26] W niniejszej prezentacji ujęcia teoriomnogościowego korzystam z moich prac: *Struktura, zmienność i postęp nauki. Ujęcie strukturalne*, Lublin 1990, s. 21–38; *Klasyczna koncepcja prawdziwości a strukturalne ujęcie teorii*, w: *Postacie prawdy*, t. 1, red. A. Jonkisz, W. Morszczyński, Cieszyn 1996, s. 151–177, a zwłaszcza *Ciągłość teoretycznych wytworów nauki. Ujęcie strukturalne*, Lublin 1998, s. 11–52.

[27] Zapowiadane tu pojęcie struktury, wykorzystane w ogólnej definicji modelu, jest szerzej omówione w: W. Balzer, C.U. Moulines, J. Sneed, *An Architectonic for Science...*, dz. cyt., s. 1–35, gdzie z kolei jako źródło jest wskazane: N. Bourbaki, *Elements of Mathematics. Theory of Sets*, Reading, MA 1968. Ujęcie rozwijane w niniejszym paragrafie jest ogólne, wprowadzane w nim pojęcia będą jednak ilustrowane przykładami czerpanymi z zastosowań ujęcia teoriomnogościowego do rekonstrukcji struktur związanych z teoriami fizykalnymi, co zostanie wykorzystane także w paragrafie kolejnym, zawierającym uwagi i oceny porównawcze.

struktury, tj. taki, w którym również pole systemu relacyjnego może nie być identyczne z pojedynczym zbiorem. Rozwinięte (uszczegółowione) zostanie również pojęcie typu relacyjnego, wprowadzone aksjomatem **RIV.2.3.5: **A1**, oznaczane jako ***tr***, a dla najprostszej struktury $<A, R>$ symbolem $|<A, R>|$.

Ostatnia uwaga dotyczy tego, że w ujęciu teoriomodelowym pojęcie modelu jest określone dla zbioru wyrażeń zdaniowych, a zwłaszcza dla zbioru uporządkowanego w postaci systemu dedukcyjnego (**D3**), natomiast w prezentacji ujęcia teoriomnogościowego będzie mowa o teoriach – co nie wyklucza systemów dedukcyjnych i nieuporządkowanych zbiorów wyrażeń zdaniowych – jako że zastosowania tego ujęcia dotyczą niemalże wyłącznie teorii, które nie są systemami dedukcyjnymi w sensie przyjętym w logice.

W kontekście tych uwag terminologicznych i porównawczych można stwierdzić, że podstawowe w ujęciu teoriomnogościowym jest pojęcie struktury zgodne ze schematem $<X_i; R_j>$, w którym pierwsza część to ciąg zbiorów, zwany zakresem (uniwersum, polem) struktury, a R_j to relacje określone na zbiorach X_i, zwane charakterystyką tego zakresu[28].

Ogólne pojęcie struktury nie jest ograniczone żadnymi warunkami co do liczby zbiorów X_i, ich liczności i ich elementów, ani co do liczby i rodzaju relacji R_j. Gdy natomiast nałoży się określone warunki ograniczające, wtedy można mówić o pewnych odmianach struktur – ich typach, rodzajach itd. – oraz, odpowiednio, o strukturach danego typu, rodzaju itd. Typ (odmiana) struktury to pewna własność – abstrakcyjny przedmiot α zwany, zgodnie z **RIV.2.3.5: **A1**, typem relacyjnym – wspólna dla pewnej klasy struktur. Na przykład dla wszystkich struktur ograniczonych warunkiem $<k; n>$ wspólne jest to, że są k-zakresowe, a ich charakterystyka obejmuje n relacji. Dlatego o dowolnej strukturze x mówimy, że jest strukturą typu $<k; n>$ *wtw* istnieją takie $X_1, \ldots, X_k$ i $R_1, \ldots, R_n$, że $x = <X_1, \ldots, X_k; R_1, \ldots, R_n>$. Przykładem struktur <3; 2> jest układ $<P, T, \mathcal{R}; v, m>$, związany z klasyczną mechaniką zderzeń (**CCP**), w którym P, T, $\mathcal{R}$ to zbiory, a v oraz m to relacje określone na tych zbiorach[29].

[28] Dla odróżnienia od ujęcia tradycyjnego, przyjętego również w niniejszej książce, kolejne definicje wprowadzane w ujęciu strukturalnym będą odrębnie numerowane i oznaczane dodatkowymi wskaźnikami: **s** (definicje struktury i pojęć pokrewnych) albo **m** (definicje odmian modeli).

[29] Teraz, gdy mowa ogólnie o strukturach, chodzi jedynie o ilustrację dla schematu $<k; n>$. W rekonstrukcjach konkretnych teorii empirycznych związane z nimi struktury

W dokładniejszym określeniu typu struktury są do warunków wskazanych schematem $<k; n>$ dodane informacje o relacjach $R_1, ..., R_n$. Mianowicie określając typ relacji R_i, $i = 1, ..., n$, trzeba podać ciąg operacji teoriomnogościowych wykonywanych na zbiorach $X_1, ..., X_k$, których wynikiem jest zbiór pochodny $\boldsymbol{X_i}$ taki, że prawdziwe jest twierdzenie: $R_i \in \boldsymbol{X_i}$. Na przykład dla relacji m wziętej ze struktur właściwych dla **CCP** – która to relacja jest w tej teorii interpretowana jako funkcja masy, a więc jest określona na zbiorze P punktów materialnych, a jej wartości należą do zbioru $\mathcal{R}$ – ciąg takich operacji jest prosty. Trzeba najpierw z zakresu $<P, T, \mathcal{R}>$ wybrać pierwszy ze zbiorów, następnie trzeci z nich, utworzyć iloczyn kartezjański $(P \times \mathcal{R})$ tych zbiorów, a w końcu zbiór potęgowy $Pot(P \times \mathcal{R})$ tego iloczynu. Ponieważ funkcja $m \subseteq (P \times \mathcal{R})$, więc jest prawdziwe twierdzenie: $m \in Pot(P \times \mathcal{R})$. Oznaczywszy ten ciąg operacji skrótem $\boldsymbol{o_m}$, można zbiór końcowy, otrzymany na podstawie wyjściowego zakresu $<P, T, \mathcal{R}>$ oznaczyć jako $\boldsymbol{o_m}<P, T, \mathcal{R}>$ $(= Pot(P \times \mathcal{R}))$. Dłuższe jest operacyjne określenie typu relacji prędkości v, rozumianej jako funkcja przypisująca punktom materialnym w danej chwili, czyli elementom zbioru $(P \times \mathcal{R})$, wektor prędkości wyznaczony przez trzy składowe, czyli przez element z $(\mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R})$; określenie to musi jednak prowadzić do zbioru $Pot((P \times \mathcal{R}) \times (\mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}))$, jako że określona teoriomnogościowo funkcja v jest elementem takiego zbioru. Podobnie jak w przypadku funkcji masy możemy więc napisać: $\boldsymbol{o_v}<P, T, \mathcal{R}> = Pot((P \times T) \times (\mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}))$. Typ, do jakiego należy struktura $<P, T, \mathcal{R}; v, m>$, jest więc określony schematem $<3; \boldsymbol{o_v}, \boldsymbol{o_m}>$, w którym jest informacja o liczbie zbiorów oraz o liczbie i rodzaju relacji.

Z myślą o zastosowaniu pojęcia modelu do rekonstruowania teorii empirycznych jest w tym ujęciu dokładniej opisany zakres struktury. Mianowicie zbiory X_i składające się na zakres struktury – dlatego zwane podstawowymi – są podzielone na takie, które mają na gruncie teorii interpretację empiryczną – te są zwane zbiorami właściwymi (dla zakresu stosowania danej teorii) – oraz zbiory pomocnicze. Na przykład w strukturze $<P, T, \mathcal{R}; v, m>$ zbiorami właściwymi są P oraz T, a pomocniczy jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$. Podział ten jest zaznaczany w schematach tak

są określane dokładniej, tj. także warunkami wskazującymi na ich empiryczną interpretację. W podanym przykładzie P jest rozumiany jako zbiór punktów materialnych (cząstek), T jest zbiorem punktów na osi czasu (chwil), a R jest zbiorem liczb rzeczywistych – zbiorem pomocniczym, potrzebnym do mówienia o wartościach funkcji prędkości v oraz funkcji masy m.

uszczegółowionych struktur: $<k, m; \boldsymbol{o}_1, \dots, \boldsymbol{o}_n>$ wskazuje, że w strukturach takiego typu jest k zbiorów właściwych, m zbiorów pomocniczych i n relacji typu $\boldsymbol{o}_1, \dots, \boldsymbol{o}_n$. Składniki $\boldsymbol{o}_1, \dots, \boldsymbol{o}_n$ tego schematu, określające typ relacji charakteryzujących zakres danej struktury, są nazywane $(k+m)$-typyfikacjami[30].

Ds.1 τ jest typem (struktury) *wtw* istnieją k, m oraz $\boldsymbol{o}_1, \dots, \boldsymbol{o}_n$ takie, że:
(1) $\tau = <k, m; \boldsymbol{o}_1, \dots, \boldsymbol{o}_n>$;
(2) k oraz m są liczbami naturalnymi;
(3) $\boldsymbol{o}_1, \dots, \boldsymbol{o}_n$ są $(k+m)$-typyfikacjami.

Typ jest abstrakcyjną własnością wspólną struktur pewnej klasy, na podstawie definicji typu można mówić o strukturach danego typu.

Ds.2 Jeżeli $\tau = <k, m; \boldsymbol{o}_1, \dots, \boldsymbol{o}_n>$ jest typem struktury, to x jest strukturą typu τ *wtw* istnieją $D_1, \dots, D_k$; $P_1, \dots, P_m$ oraz $R_1, \dots, R_n$ takie, że:
(1) $x = <D_1, \dots, D_k, P_1, \dots, P_m; R_1, \dots, R_n>$;
(2) $D_1, \dots, P_m$ są zbiorami;
(3) dla $i = 1, \dots, n$: $R_i \in \boldsymbol{o}_i <D_1, \dots, D_k, P_1, \dots, P_m>$[31].

Uszczegółowieniem pojęcia typu struktury, potrzebnym w strukturalistycznej (teoriomnogościowej) charakterystyce modelu teorii, jest pojęcie rodzaju struktury. Schemat rodzaju struktury zawiera dodatkowe informacje dotyczące zbiorów i relacji tworzących struktury danego typu.

W definicji rodzaju struktury (dowolnego typu τ) jest przyjęte następujące określenie:

(I) Formuła odnosząca się do pewnej struktury $<D_1, \dots, R_n>$ to taka, w której oprócz symboli teoriomnogościowych występuje co najmniej jeden spośród symboli $D_1, \dots, R_n$.

Ds.3 Jeżeli $\tau = <k, m; \boldsymbol{o}_1, \dots, \boldsymbol{o}_n>$ jest typem struktury, to:

(i) Σ jest rodzajem struktury typu τ *wtw* istnieją $A_1, \dots, A_s$ takie, że:
(1) $\Sigma = <k, m; \boldsymbol{o}_1, \dots, \boldsymbol{o}_n; A_1, \dots, A_s>$;

[30] Oryginalne nazwy to: *principal base sets* i *auxiliary base sets* oraz *typifications*; typyfikacjami są także nazywane formuły: $R_i \in \boldsymbol{o}_i(X_1, \dots, X_m)$. Zob. W. Balzer, C.U. Moulines, J. Sneed, *An Architectonic for Science...*, dz. cyt., s. 1–10, *DI1a*, *DI-2a*.

[31] Zob. tamże, s. 9, *DI-2a* i *DI2b*.

(2) dla $i = 1, ..., s$: A_i jest formułą odnoszącą się do pewnej struktury typu τ.

(ii) Σ jest rodzajem struktury *wtw* istnieje typ struktury τ taki, że Σ jest rodzajem struktury typu τ[32].

Przejście od abstrakcyjnych własności struktur do struktur rodzaju Σ jest oparte na kolejnej umowie notacyjnej, a trafniej jest powiedzieć – na kolejnej definicji pomocniczej:

(sp) „A_i $<D_1, ..., D_k, P_1, ..., P_m; R_1, ..., R_n>$" znaczy tyle, co „formuła A_i jest spełniona w strukturze $<D_1, ..., D_k, P_1, ..., P_m; R_1, ..., R_n>$"[33].

Ds.4 Jeżeli $\Sigma = <k, m; \boldsymbol{o_1}, ..., \boldsymbol{o_n}; A_1, ..., A_s>$ jest rodzajem struktury, to x jest strukturą rodzaju Σ *wtw* istnieją $D_1, ..., D_k, P_1, ..., P_m, R_1, ..., R_n$> takie, że:
(1) $x = <D_1, ..., D_k, P_1, ..., P_m; R_1, ..., R_n>$;
(2) $D_1, ..., P_m$ są zbiorami;
(3) dla $i = 1, ..., s$: A_i $<D_1, ..., D_k, P_1, ..., P_m; R_1, ..., R_n>$[34].

Formuły $A_1, ..., A_s$, wyróżniają struktury danego rodzaju spośród ogółu struktur danego typu – w tym znaczeniu, że w każdej strukturze danego rodzaju każda z tych formuł jest spełniona.

Pojęcie rodzaju struktury pozwala wyjaśnić, czym jest, wspomniany już, predykat teoriomnogościowy, którego definiowanie jest w tym ujęciu zwane aksjomatyzowaniem teorii.

Ds.5 Jeżeli $\Sigma = <k, m; \boldsymbol{o_1}, ..., \boldsymbol{o_n}; A_1, ..., A_s>$ jest rodzajem struktury, to $\boldsymbol{P_\Sigma}$ jest teoriomnogościowym predykatem odpowiadającym Σ *wtw* zakres predykatu $\boldsymbol{P_\Sigma}$ jest klasą wszystkich struktur rodzaju Σ.

Zgodnie z tą definicją, predykat $\boldsymbol{P_\Sigma}$ można prawdziwie orzec o każdej strukturze rodzaju Σ, czyli o strukturze, w której są spełnione formuły $A_1, ..., A_s$. Formuły pojawiające się w definicjach predykatów teoriomnogościowych związanych z daną teorią, zwane ogólnie aksjomatami, są dzielone na warunki formalne oraz rzeczowe. Warunki formalne, do których należą typyfikacje oraz tzw. charakteryzacje, wskazują na własności zbiorów podstawowych oraz relacji charakteryzujących zakres struktury.

32 Tamże, s. 10, *DI3*.

33 Tamże, s. 14–15.

34 Tamże, s. 14, *DI5*.

Typyfikacje, warto tu powtórzyć, to formuły o kształcie $R_i \in \boldsymbol{o_i} <D_1, \ldots, P_m>$ określające, za pośrednictwem operacji na zbiorach $D_1, \ldots, P_m$, typ poszczególnych relacji danej struktury. Prościej można powiedzieć, że wyznaczają pole (dziedzinę i przeciwdziedzinę) poszczególnych relacji. Z kolei charakteryzacje określają własności zbiorów podstawowych lub inne niż ich typ własności poszczególnych relacji wchodzących w skład struktury[35]. A przy tym w definicjach struktur właściwych dla konkretnych teorii empirycznych te dwa rodzaje warunków formalnych są często powiązane. Gdy na przykład wymaga się, by zbiór P w strukturze $<P, T, \mathcal{R}; v, m>$, był niepusty, to postulat ten jest charakteryzacją; twierdzenie, że $m \in Pot\,(P \times \mathcal{R})$ jest przykładem typyfikacji; lecz gdy mowa o m, że jest funkcją określoną na niepustym zbiorze P o wartościach w zbiorze $\mathcal{R}$ liczb rzeczywistych, to ten warunek formalny łączy oba te rodzaje aksjomatów. Natomiast warunki określające własności zbiorów pomocniczych (liczb naturalnych, rzeczywistych itd.) zwykle nie są formułowane wprost, zakłada się je w definicji predykatu i rozumie zgodnie z odpowiednimi teoriami matematycznymi, z których są czerpane.

Od formalnych warunki rzeczowe różni to, że ustalają one zależności między podstawowymi relacjami, a dokładniej: między wartościami dla funkcji $R_1, \ldots, R_n$ w zakresie $<D_1, \ldots, P_m>$. W przypadku teorii empirycznych zależności te są ich podstawowymi prawami, jak np. fundamentalne prawo mechaniki Newtonowskiej: $f = m \cdot a$ lub zasada zachowania pędu w **CCP**. Oceniając aksjomaty rzeczowe pod względem użytych w nich symboli, można powiedzieć, że syntaktycznie różnią się od formalnych tym, że zawierają co najmniej dwa symbole relacji podstawowych.

W poniższej definicji prawa są określone jako takie aksjomaty, które nie są ani typyfikacjami, ani charakteryzacjami.

Ds.6 Jeżeli $\Sigma = <k, m; \boldsymbol{o_1}, \ldots, \boldsymbol{o_n}; A_1, \ldots, A_s>$ jest rodzajem struktury, to dla $i = 1, \ldots, s$:

(i) A_i jest *typyfikacją wtw* istnieje $m+k$-typyfikacja $\boldsymbol{o_j}$ taka, że formuła A_i jest równokształtna z „$R \in \boldsymbol{o_j} <D_1, \ldots, P_m>$”, $1 \leq j \leq n$;

(ii) A_i jest *charakteryzacją wtw* oprócz symboli teoriomnogościowych i symboli zbiorów podstawowych zawiera symbol jednej tylko relacji;

[35] Por. tamże, s. 16–17.

(iii) A_i jest *prawem wtw* nie jest ani typyfikacją, ani charakteryzacją[36].

Na pojęciu struktury jest w omawianym ujęciu oparte definiowanie odmian modeli teorii. Najogólniejsze jest pojęcie modelu możliwego. Model możliwy jest rozumiany jako taka struktura (struktura danego rodzaju struktur jakiegoś typu), która jest określona wyłącznie przez aksjomaty formalne, czyli typyfikacje i charakteryzacje. Do danego rodzaju struktur jest również zrelatywizowane pojęcie zbioru modeli możliwych.

Ds.7

(i) x jest modelem możliwym dla Σ *wtw*:
(1) $\Sigma = <k, m; \boldsymbol{o_1}, ..., \boldsymbol{o_n}; A_1, ..., A_s>$ jest rodzajem struktury;
(2) x jest strukturą rodzaju Σ;
(3) dla $i = 1, ..., s$: A_i jest typyfikacją lub charakteryzacją.

(ii) $\mathbf{M_p}(\Sigma)$ jest zbiorem modeli możliwych rodzaju struktury Σ *wtw* $\mathbf{M_p}(\Sigma) = \{x: x$ jest modelem możliwym dla $\Sigma\}$[37].

By mówić o modelu możliwym teorii, trzeba najpierw związać pojęcie rodzaju struktury z pojęciem teorii:

Ds.8 $\Sigma = <k, m; \boldsymbol{o_1}, ..., \boldsymbol{o_n}; A_1, ..., A_s>$ jest rodzajem struktury teorii $\boldsymbol{T}$ *wtw* Σ jest takim rodzajem struktury, że wszystkie formuły $A_1, ..., A_s$ są aksjomatami teorii $\boldsymbol{T}$.

Na podstawie powyższej definicji można w tym ujęciu stwierdzić, że model możliwy teorii $\boldsymbol{T}$ to model możliwy rodzaju Σ związanego z teorią $\boldsymbol{T}$:

Dm.1

(i) x jest modelem możliwym teorii $\boldsymbol{T}$ *wtw* istnieje rodzaj struktury $\Sigma = <k, m; \boldsymbol{o_1}, ..., \boldsymbol{o_n}; A_1, ..., A_s>$ teorii $\boldsymbol{T}$ taki, że x jest modelem możliwym dla Σ.

---

[36] Tamże, s. 13–15.

[37] Por. tamże, s. 15–17, *DI7*, *DI8a*. Pojęcie modelu możliwego jest w cytowanej pracy określane dla rodzaju struktury, natomiast klasa modeli możliwych $\mathbf{M_p}(\boldsymbol{T})$, jak wynika z kontekstu – dla teorii $\boldsymbol{T}$. Takie niewprost przejście od rodzaju struktury do teorii utrudnia dostrzeżenie, że ogólne określanie modelu teorii wymaga odwołania się do pojęć, których pełne definicje oferuje teoria modeli.

(ii) $\mathbf{M_p}(\boldsymbol{T})$ jest zbiorem modeli możliwych teorii $\boldsymbol{T}$ *wtw* $\mathbf{M_p}(\boldsymbol{T}) = \{x\colon x$ jest modelem możliwym teorii $\boldsymbol{T}\}$.

Widoczne w **(D1-1)** powiązanie pojęcia rodzaju struktury Σ teorii $\boldsymbol{T}$ (**Dp1–8**) z pojęciem modelu możliwego względem Σ (**Dp1–7**) daje podstawy do wniosku, że model możliwy teorii $\boldsymbol{T}$ jest taką strukturą, w której są spełnione tylko te aksjomaty teorii $\boldsymbol{T}$, które są warunkami formalnymi, tj. typyfikacjami lub charakteryzacjami. Ilustracją tego, o czym mowa, jest wynik zastosowania **D1-1** do zdefiniowania modeli możliwych dla **CCP**.

$\mathbf{M_p}$**(CCP)**

(i) x jest modelem możliwym **CCP** *wtw* istnieją P, T, $\boldsymbol{\mathcal{R}}$, v oraz m takie, że:
(1) $x = \langle P, T, \boldsymbol{\mathcal{R}}, v, m\rangle$;
(2) P jest zbiorem niepustym i skończonym;
(3) T jest zbiorem dwuelementowym: $T = \{t_1, t_2\}$;
(4) $v\colon (P \times T) \to \boldsymbol{\mathcal{R}}^3$;
(5) $m\colon P \to \boldsymbol{\mathcal{R}}$ i dla każdego $p \in P$: $m(p) > 0$.

(ii) $\mathbf{M_p}$**(CCP)** jest zbiorem modeli możliwych **CCP** *wtw* $\mathbf{M_p}$**(CCP)** $= \{x\colon x$ jest modelem możliwym **CCP**$\}$.

Możliwe modele dla **CCP** podpadają pod ogólną definicję **D1-1** modelu możliwego. Jeśli bowiem $x \in \mathbf{M_p}$**(CCP)**, to istnieje rodzaj struktury teorii **CCP**, dla którego x jest modelem możliwym, a rodzajem tym jest $\Sigma = \langle 2, 1; \boldsymbol{o}_1, \boldsymbol{o}_2; A_1, \ldots, A_4\rangle$: liczby 2 i 1 wskazują, że we wszystkich strukturach tego rodzaju są 3 zbiory podstawowe (2 zbiory właściwe, 1 zbiór pomocniczy), $\boldsymbol{o}_1$ i $\boldsymbol{o}_2$ to 2+1-typyfikacje informujące, że te 3 zbiory są charakteryzowane przez 2 relacje, z których pierwsza jest elementem zbioru $Pot((1 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3))$, a druga elementem $Pot(1 \times 3)$, natomiast A_1, A_2, A_3, A_4 to warunki (2)–(5) sformułowane w definicji modelu możliwego dla **CCP**. W warunkach tych da się wskazać typyfikacje i charakteryzacje. W warunku (4) jest sformułowana typyfikacja dla v: $v \in Pot((P \times T) \times (\boldsymbol{\mathcal{R}} \times \boldsymbol{\mathcal{R}} \times \boldsymbol{\mathcal{R}}))$, odpowiadająca 2+1-typyfikacji $\boldsymbol{o}_1$, a jednocześnie jest w nim zawarta charakteryzacja – wyrażona symbolicznie – że v jest funkcją, czyli relacją jednoznaczną. W warunku (5) zawarta jest i typyfikacja: $m \in Pot(P \times \boldsymbol{\mathcal{R}})$, odpowiadająca 2+1-typyfikacji $\boldsymbol{o}_2$, i twierdzenie charakteryzujące relację m jako funkcję o wartościach dodatnich. „Czystymi” charakteryzacjami, odnoszącymi się do zbiorów podstawowych, są warunki (2) i (3). Ważne jest to, że każdy z warunków A_1, A_2, A_3, A_4 określa jedynie formalne własności zbiorów i relacji podstawowych, czyli że nie jest prawem[38].

Prawa teorii są postulowane w dziedzinach zastosowania możliwych. Jeśli prawa te są spełnione, to mówimy, że dziedzina (struktura) możliwa jest dziedziną rzeczywistą (realizacją) lub że jest modelem. W ujęciu strukturalnym pojęcie modelu i zbioru modeli jest określone najpierw dla rodzaju struktury.

Ds.9

(i) x jest modelem dla Σ *wtw*
(1) $\Sigma = <k, m; \boldsymbol{o}_1, ..., \boldsymbol{o}_n; A_1, ..., A_s>$ jest rodzajem struktury;
(2) x jest strukturą rodzaju Σ;
(3) dla pewnego $1 \leq i \leq s$: A_i jest prawem.

(ii) $\mathbf{M}(\Sigma)$ jest zbiorem modeli rodzaju struktury Σ *wtw* $\mathbf{M}(\Sigma) = \{x$: x jest modelem dla $\Sigma\}$.

Pojęcia zdefiniowane w **Dp1–9** da się powiązać z teorią $\boldsymbol{T}$ w sposób analogiczny do zastosowanego przy modelach możliwych:

Dm.2

(i) x jest modelem teorii $\boldsymbol{T}$ *wtw* istnieje rodzaj struktury $\Sigma = <k, m; \boldsymbol{o}_1, ..., \boldsymbol{o}_n; A_1, ..., A>$ teorii $\boldsymbol{T}$ taki, że x jest modelem dla Σ.

(ii) $\mathbf{M}(\boldsymbol{T})$ jest zbiorem modeli teorii $\boldsymbol{T}$ *wtw* $\mathbf{M}(\boldsymbol{T}) = \{x$: x jest modelem teorii $\boldsymbol{T}\}$.

Gdy do warunków spełnianych przez Σ będące rodzajem struktury teorii $\boldsymbol{T}$ (**Dp1–8**) dołączy się wymagania stawiane strukturze, która jest modelem rodzaju Σ (**Dp1–9**), wtedy jest oczywiste, że pośród warunków definiujących modele konkretnych teorii są ich prawa. Zbiory modeli reprezentują więc prawa teorii: spośród struktur danego rodzaju, tj. spośród modeli możliwych, prawa teorii wyróżniają takie struktury, w których prawa są spełnione. Przykłady podstawowych praw wydzielających modele z ogółu modeli możliwych to: druga zasada dynamiki Newtona (**CPM**), tzw. równania Lagrange'a (**LAG**), prawo określające, w jaki sposób entropia układu fizycznego w stanie równowagi termodynamicznej zależy

[38] Por. tamże, s. 27.

od jego energii, objętości i liczby molowej (**SETH**) itd.[39]; dla ilustracji i porównania z wcześniej wprowadzonymi pojęciami warto skonkretyzować pojęcie modelu ponownie do **CCP**.

M(**CCP**)

(i) x jest modelem **CCP** *wtw* istnieją P, T, $\mathcal{R}$, v oraz m takie, że:
(1) $x = \langle P, T, \mathcal{R}, v, m \rangle$;
(2) $x \in \mathbf{M_p}(\mathbf{CCP})$;
(3) $= \sum_{p \in P} m(p)v(p, t_1) = \sum_{p \in P} m(p)v(p, t_2)$.

(ii) **M**(**CCP**) jest *zbiorem modeli* **CCP** *wtw* **M**(**CCP**) = {x: x jest modelem **CCP**}[40].

Warunek (3) zawęża pojęcie modelu możliwego dla **CCP** do pojęcia modelu dla tej teorii. Warunek ten nie jest ani typyfikacją, ani charakteryzacją (por. **Dp1–6**), lecz prawem. Wobec tego istnieje rodzaj struktury, dla którego struktura spełniająca warunki (1)–(3) jest modelem; pojęcie modelu dla **CCP** podpada więc pod ogólne określenie modelu (**D1–2**). Warto też raz jeszcze podkreślić, że warunek (3) jest sformułowaniem tzw. prawa zachowania pędu tylko w kontekście określonej interpretacji zbiorów i relacji podstawowych w **CCP**, tj. takiej interpretacji, w której P reprezentuje zbiór mas punktowych, elementy t_1 i t_2 zbioru T są rozumiane jako chwile przed i po zderzeniu mas punktowych, v jest funkcją przypisującą punktom materialnym prędkość w chwilach t_1 i t_2, a wartości funkcji m to wartości dla ich masy[41].

3.2 Ujęcie teoriomodelowe vs teoriomnogościowe

Teoriomnogościowe (strukturalistyczne) ujęcie modelu teorii zostało wyżej celowo przedstawione tak, by łatwiej było dostrzec podstawowe

[39] Por. tamże, s. 25–27, 133, 151, 158.

[40] Tamże, s. 27.

[41] Takie interpretacyjne warunki, właściwe dla teorii empirycznych, nie należą do aksjomatów teorii, choć powinno się je uznawać za współdefiniujące teorię. Ich odpowiednikami w teoriach rozumianych tradycyjnie są tzw. reguły korespondencji, natomiast w ujęciu strukturalnym są uwzględnione, gdy mowa o zakresie teorii tzw. zamierzonym, tj. o zbiorze dziedzin zastosowania teorii wyznaczonym w praktyce naukowej.

zbieżności obu tych ujęć[42]. Podobieństwa są widoczne zwłaszcza na poziomie ogólnego opisu modeli i teorii, natomiast różnice uwidaczniają się na etapie stosowania obu tych ujęć do rekonstrukcji i prezentacji konkretnych teorii.

Pobieżny ogląd obu tych ujęć może prowadzić do oceny, że droga do pojęcia modelu teorii jest w podejściu strukturalistycznym znacznie dłuższa niż w teoriomodelowym. Trzeba jednak pamiętać, że zwięzła definicja ***RII.2: **D3** pojęcia modelu jest osadzona w kontekście pojęć prawdziwości, spełniania i interpretacji – tu wyliczonych w kolejności odwrotnej do ich definiowania. Gdy rozwinie się te pojęcia, zakładane w definicji **D3**, wtedy ukaże się wyraźniej odpowiedniość między oboma tymi procedurami definiowania pojęcia modelu.

Streszczając ujęcie teoriomodelowe, które trafnie można także nazwać klasycznym czy tradycyjnym (zapoczątkowane przez A. Tarskiego), można kolejno stwierdzić, że:

(i) dziedzina $\mathcal{M}$ jest modelem – wyrażenia zdaniowego, zbioru lub systemu dedukcyjnego takich wyrażeń – wtedy i tylko, gdy wyrażenia są w danej dziedzinie prawdziwe (**D3**);

(ii) wyrażenie Φ jest prawdziwe w dziedzinie $\mathcal{M} = \langle U, R_1, R_2, \ldots, R_k \rangle$, tj. $\Phi \in E(\mathcal{M})$, wtedy i tylko, gdy jest spełnione przez każdy ciąg przedmiotów czerpanych z U (przez każde wartościowanie) {***RII.1: **D3**};

(iii) rdzeniem pojęcia spełniania jest twierdzenie, że proste wyrażenie zdaniowe $\ulcorner P_i(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t})\urcorner$ jest w dziedzinie $\mathcal{M}$ spełnione przez ciąg (wartościowanie) $\{a_n\}$, tj. $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner P_i(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t})\urcorner, \{a_n\})$, wtedy i tylko, gdy $R_i(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t})$ – dla złożonych wyrażeń zdaniowych spełnianie jest definiowane zgodnie z rozumieniem stałych logiki klasycznej {***RII.1.1: **D2**};

(iv) W formule $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner P_i(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t})\urcorner, \{a_n\})$ dziedzina $\mathcal{M}$ jest wynikiem interpretacji f_J danego języka J oraz wyrażeń zdaniowych (ich zbioru,

[42] Prezentacje strukturalnego ujęcia teorii rozpoczynają się zazwyczaj od definicji tzw. elementu teoretycznego. Zbiory modeli i modeli możliwych, określone bez odwołania do pojęcia struktury i uwag towarzyszących takiemu definiowaniu, pojawiają się w takich definicjach jako składniki tzw. rdzenia elementu teoretycznego (drugim składnikiem jest zasięg empiryczny rdzenia rozumiany nie jak w teorii modeli jako uniwersum, w którym prawa teorii są spełnione, lecz pragmatycznie – jako zbiór dziedzin, w których teoria jest stosowana w sposób „zamierzony"). Zaproponowane w cytowanej monografii, a tu zwięźle przedstawione, definiowanie składników rdzenia oparte na pojęciu struktury ułatwia nie tylko porównanie tego ujęcia z tradycyjnym, tj. zdaniowym i teoriomodelowym, lecz także odniesienie (interpretację) podstawowych pojęć ujęcia strukturalnego w dziedzinie teorii empirycznych.

systemu) sformułowanych w J, która symbolom pozalogicznym języka J przypisuje jednoznacznie ich odpowiedniki (denotaty) w $\mathcal{M}$;
(v) funkcja interpretowania (denotowania) f_J jest określona na zbiorze symboli pozalogicznych danego języka J, a jej wartościami są w zbiorze U: relacje (wartości f_J dla symboli predykatywnych), funkcje (wartości dla symboli funkcyjnych) i przedmioty (wartości dla nazw indywiduowych); na przykład symbolom predykatów P_1, P_2, P_3, ... odpowiadają w danej interpretacji relacje R_1, R_2, R_3, ..., a przy tym jeśli predykat jest jednoargumentowy, to jego interpretantem (denotatem) jest podzbiór zbioru U, gdy jest dwuargumentowy, to jego odniesieniem jest dwuargumentowa relacja, czyli podzbiór iloczynu kartezjańskiego $U \times U$ itd.
(vi) ścisłe, indukcyjne określenie spełniania – a więc także prawdy i modelu – jest możliwe, o ile język J jest sformalizowany, bo tylko wtedy da się określić budowę jego formuł elementarnych i strukturalne reguły budowania formuł złożonych z elementarnych, a definiowanie modelu dla teorii $\boldsymbol{T}$ rozumianej jako system dedukcyjny wymaga aksjomatyzacji teorii $\boldsymbol{T}$ dokonanej w zbudowanym języku formalnym J[43].

Natomiast wyżej rozwiniętą procedurę definiowania pojęcia modelu w ujęciu strukturalistycznym można przedstawić – ponownie w porządku odwrotnym do kolejności definiowania – w takich punktach (indeks s wskazuje na to ujęcie):
$(\mathrm{i})_s$ Model (właściwy) dla teorii $\boldsymbol{T}$ to model dla rodzaju struktury teorii $\boldsymbol{T}$ {**Dm.2**}, czyli taki model możliwy dla $\boldsymbol{T}$, w którym są spełnione jej prawa (aksjomaty rzeczowe, empiryczne) {**Ds.8**, **Dm.1**, **Ds.9**, **Dm.2**};
$(\mathrm{ii})_s$ Model możliwy teorii $\boldsymbol{T}$ to model możliwy struktury rodzaju Σ związanego z $\boldsymbol{T}$, tj. takiego rodzaju, w którym formuły $A_1, ..., A_s$ są aksjomatami danej teorii $\boldsymbol{T}$ {**Ds.8**, **Dm.1**};
$(\mathrm{iii})_s$ Model możliwy dla Σ to struktura rodzaju Σ, w której są spełnione warunki formalne spośród $A_1, ..., A_s$, tj. typyfikacje i charakteryzacje {**Ds.7**};
$(\mathrm{iv})_s$ Strukturą rodzaju $\Sigma = <k, m; \boldsymbol{o}_1, ..., \boldsymbol{o}_n; A_1, ..., A_s>$ jest $<D_1, ..., D_k, P_1, ..., P_m; R_1, ..., R_n>$ taka, że dla $i = 1, ..., s$: $A_i <D_1, ..., D_k, P_1, ..., P_m; R_1, ..., R_n>$, czyli taka, w której są spełnione wszystkie formuły $A_1, ..., A_s$>, jako że:
$(\mathrm{v})_s$ $A_i <D_1, ..., D_k, P_1, ..., P_m; R_1, ..., R_n>$ to skrót dla „formuła A_i jest spełniona w strukturze $<D_1, ..., D_k, P_1, ..., P_m; R_1, ..., R_n>$” {**sp**};

[43] Por. A. Tarski, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, dz. cyt., s. 110–111, 114–116; W. Stegmüller, *The Structuralist View of Theories. A Possible Analogue of Bourbaki Programme in Physical Science*, Berlin 1979, s. 3–7.

$(vi)_s$ Rodzaj $\Sigma = <k, m; \boldsymbol{o}_1, \ldots, \boldsymbol{o}_n; A_1, \ldots, A_s>$ struktur w obrębie typu $\tau = <k, m; \boldsymbol{o}_1, \ldots, \boldsymbol{o}_n>$ jest wyróżniony tym, że do struktur danego rodzaju odnoszą się formuły $A_1, \ldots, A_s$ {**Ds.3**};
(vii) Formuła odnosząca się do pewnej struktury $<D_1, \ldots, R_n>$ to taka, w której oprócz symboli teoriomnogościowych występuje co najmniej jeden spośród symboli „D_1", ..., „R_n" {**I**};
(viii) wyjściowe w tej procedurze definicyjnej jest pojęcie struktury określonego typu $\tau = <k, m; \boldsymbol{o}_1, \ldots, \boldsymbol{o}_n>$, czyli struktury $<D_1, \ldots, D_k, P_1, \ldots, P_m; R_1, \ldots, R_n>$; której charakterystyka jest zgodna z charakterystyką τ {**Ds.1**, **Ds.2**}.

Porównując kroki (vi)–(i) procedury tradycyjnej z punktami $(viii)_s$–$(i)_s$ ujęcia strukturalnego łatwo jest dostrzec, że:

– interpretacji języka J odpowiadają kroki $(vii)_s$ i $(vi)_s$, a bezpośrednio nawiązuje do tego pojęcia określenie (**I**);
– pojęcie spełniania jest wprowadzone w tej procedurze określeniem (**sp**), wykorzystanym w punktach (vii) i (vi);
– w procedurze teoriomnogościowej nie pojawia się wprawdzie pojęcie prawdziwości – czyli nie ma bezpośrednich odpowiedników dla punktów (i) i (ii) oraz zbioru $E(\mathcal{M})$ wyrażeń prawdziwych w dziedzinie – lecz jest ono zakładane, ponieważ warunek (**sp**) spełniania formuły w strukturze trzeba rozumieć tak, że formuła jest spełniona dla dowolnych elementów zbiorów zasadniczych danej struktury, czyli dla każdego wartościowania, w sensie uściślonym w ujęciu teoriomodelowym, co znaczy, że formuła ta jest w danej strukturze prawdziwa[44]. W obu tych ujęciach są określane tak samo rozumiane modele, podejścia te różnią się stosowaną do tego procedurą, a mówiąc dokładniej: w ujęciu zwanym teoriomnogościowym jest zakładane to samo pojęcie modelu, które jest w sposób ścisły zdefiniowane w teorii zapoczątkowanej przez A. Tarskiego.

[44] Wniosek o zależności ujęcia strukturalnego od pojęć kluczowych dla podejścia teoriomodelowego uzasadniłem także w artykule *Klasyczna koncepcja prawdziwości a strukturalne ujęcie teorii*, dz. cyt., s. 169–170; w artykule tym ujęcie strukturalne jest porównywane nie tylko z teoriomodelowym w sensie Tarskiego, lecz także z innymi ujęciami semantycznymi. O tym, że znaczenie wyników Tarskiego nie jest ograniczone do prostych języków sformalizowanych, zob. J. Woleński, *Języki sformalizowane a prawda*, w: *Alfred Tarski: dedukcja i semantyka*, red. J. Jadacki, Warszawa 2003, s. 67–76.

Jest zatem uzasadnione twierdzenie, że kroki $(\text{vii})_s$–$(\text{i})_s$ mają odpowiedniki w punktach (v)–(i). Zasadnicza różnica polega jednak na tym, że nie ma w ujęciu teoriomnogościowym odpowiednika punktu (vi), tj. nie ma formalizacji języka *J* ani rozumianej standardowo aksjomatyzacji teorii ***T*** w języku sformalizowanym. Zamiast niej jest tzw. aksjomatyzacja przez definicję predykatu teoriomnogościowego, polegająca na tym, że w niesformalizowanym języku teorii mnogości jest określony orzecznik, którego zakres jest klasą wszystkich struktur rodzaju właściwego dla teorii ***T*** (**Ds.5**), tj. struktur, w których są spełnione aksjomaty teorii (**Ds.8**, **Dm.1**). Są przy tym wyróżniane rodzaje modeli teorii zależne od tego, które spośród aksjomatów są wybrane jako warunki definiujące odpowiadający im predykat: w definicji predykatu, którego zakresem jest ogół modeli możliwych, są uwzględnione wyłącznie aksjomaty formalne, określające własności zbiorów i relacji danej struktury (**Ds.7**, **Ds.7**, **Dm.1**); w definicjach predykatów wytyczających klasę modeli są ponadto uwzględnione wymagania rzeczowe, czyli prawa danej teorii. W ujęciu strukturalnym są ponadto odróżniane pojęcia i prawa zakładane w danej teorii, przejęte w niej z teorii poprzedzających oraz pojęcia i prawa specyficzne dla danej teorii ***T***. Te pierwsze są reprezentowane klasą $\mathbf{M}_{\mathbf{pp}}(\boldsymbol{T})$ tzw. częściowych modeli możliwych, pełna aparatura pojęciowa danej teorii klasą $\mathbf{M}_{\mathbf{p}}(\boldsymbol{T})$ jej modeli możliwych, a prawa podstawowe – ogółem $\mathbf{M}(\boldsymbol{T})$ modeli teorii *T*. Inne jeszcze pojęcia, definiowane na podstawie pojęcia modelu możliwego, są używane w teoriomnogościowej prezentacji praw pochodnych teorii. Chodzi o tzw. ogólne ograniczenia (*constrains*, **C**), wyrażające związki między wartościami funkcji (praw podstawowych) w różnych zastosowaniach teorii, np. prawidłowość, że wartość funkcji masy jest taka sama dla tego samego ciała niezależnie od układu empirycznego, który jest opisywany w mechanice klasycznej, i powiązania (*links*, **L**), oddające relacje danej teorii z teoriami otaczającymi w niej zakładanymi. Wszystkie rodzaje modeli są relatywizowane do teorii, choć samo pojęcie teorii jest określane dopiero na podstawie pojęcia modelu. Przy tym między pojęciem modeli (różnych odmian modeli) a definicją teorii empirycznej pośredniczy pojęcie tzw. elementu teoretycznego (*theory-element*), przedstawianego schematem $<\boldsymbol{K}, \boldsymbol{I}>$. W schemacie tym obok tzw. teoretycznego rdzenia $\boldsymbol{K} = <\mathbf{M}_{\mathbf{p}}, \mathbf{M}, \mathbf{M}_{\mathbf{pp}}, \mathbf{C}, \mathbf{L}>$, reprezentującego podstawowe pojęcia i prawa teorii, jest uwzględniony zakres ***I*** jej zastosowań, rozumiany w tym ujęciu pragmatycznie, tj. jako zbiór tych tylko układów empirycznych (zjawisk), do których uczeni stosują daną teorię. Teorie są w tym ujęciu definiowane jako uporządkowane zbiory elementów teoretycznych, związki między teoriami – odmiennymi lub dziejowymi wersjami danej teorii – są sprowadzone do relacji miedzy zbiorami elementów teoretycznych itd.

Jest oczywiste, że także w ujęciu strukturalnym jest niezbędny wcześniejszy wgląd w zawartość i strukturę teorii, rozpoznanie stosowanych w niej pojęć swoistych i zapożyczonych oraz przyjmowanych w niej praw. Jednakże nie jest do tego niezbędna aksjomatyzacja teorii w języku sformalizowanym, od której musi się rozpocząć definiowanie modelu w ujęciu tradycyjnym. Z uwagi na to, że teoria jest w podejściu standardowym definiowana jako ogół konsekwencji logicznych aksjomatów i jest identyfikowana z podzbiorem wyrażeń sformalizowanego języka, w którym aksjomaty są sformułowane, trafne jest nazywanie tego sposobu prezentacji teorii wewnątrzjęzykowym lub formalnojęzykowym. Taki sposób definiowania teorii wpływa z kolei na rozumienie jej odniesień: możliwego zakresu, który jest utożsamiany z jedną dziedziną, wskazaną w wyniku semantycznej interpretacji teorii, oraz zakresu rzeczywistego, identyfikowanego z modelem teorii, tj. dziedziną, w której są spełnione jej prawa. Gdy takie rozumienie dziedziny jest przenoszone z teorii dedukcyjnych na teorie fizykalne, tj. zmatematyzowane teorie empiryczne, wtedy ten warunek konieczny, tj. bycia modelem w sensie ścisłym, jest uzupełniany zasadami interpretacji empirycznej podstawowych pojęć teorii, lecz z uwagi na ten konieczny wymóg trafne jest nazywanie tego sposobu wyznaczania dziedziny (zasięgu) teorii – teoriomodelowym[45].

[45] Teoriomodelowe rozumienie zasięgu teorii jako jednego uniwersum obiektów charakteryzowanego przez zespół ustalonych pojęć i praw teorii jest przeciwstawiane tzw. koncepcjom wieloaplikacyjnym lub wieloreferencjalności, w których mowa – jak w ujęciu tu opisywanym – o wielu dziedzinach empirycznych, tj. układach obiektów, do których uczeni stosują odpowiednie uszczegółowienia ogólnych pojęć i praw teorii (por. np. R. Wójcicki, *Teorie w nauce. Wstęp do logiki, metodologii i filozofii nauki*, cz. 1, Warszawa 1991, s. 73). Stosowany w ujęciu strukturalistycznym sposób opisu zamierzonego zasięgu jest przez Stegmüllera nazywany semantyką nieformalną lub „fizyczną" (zob. W. Stegmüller, *The Structuralist View of Theories...*, dz. cyt., s. 8, 11), tj. zmierzającą do wskazania tych tylko dziedzin empirycznych, do których stosują teorię uczeni – przeciwstawioną semantyce „niefizycznej" (formalnej), która zmierza do ogólnego zdefiniowania modeli, w których są spełnione prawa teorii. Zob. J. Sneed, *The Logical Structure of Mathematical Physics*, dz. cyt., s. 27–28, 64, 112–113, 260, 262–263, 267–273; W. Stegmüller, *The Structure and Dynamics of Theories*, dz. cyt., s. 69–71, 170–177; tenże, *A Combined Approach to the Dynamics of Theories*, „Theory and Decision" 1978, t. 9, s. 49–50; tenże, *The Structuralist View of Theories...*, dz. cyt., s. 3–14, 25–28;

Porównując oba te ujęcia z ogólnej perspektywy, można powiedzieć, że w ujęciu tradycyjnym najpierw jest definiowana teoria, a następnie jej model, a w ujęciu strukturalnym kolejność jest odwrotna[46]. Różnica między oboma tymi ujęciami jest widoczna zwłaszcza wtedy, gdy są pominięte kroki (viii)$_s$–(iii)$_s$ wyżej rozwiniętej procedury ogólnego definiowania modeli teorii, tj. gdy rozpoczyna się teoriomnogościową prezentację teorii od zdefiniowania odmian jej modeli, bez ujawniania zakładanych w tych definicjach pojęć opartych na pojęciach struktury, interpretacji i spełniania. A jest tak zawsze, gdy są w ujęciu strukturalnym rekonstruowane konkretne teorie.

Znaczące różnice między tymi ujęciami są widoczne na poziomie ich stosowania do rekonstrukcji konkretnych teorii – tym wyraźniej, im bardziej prezentowana teoria odbiega od aksjomatyzowalnych w logice klasycznej. Warto spojrzeć najpierw na prostą teorię, która ilustruje bardziej opisane wyżej zbieżności między oboma ujęciami niż zapowiadane różnice.

Oto tradycyjna aksjomatyzacja teorii grup w odpowiednio wzbogaconym języku WRP z identycznością.

(**G**)

A1 $(\bigwedge x, y, z)\ x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$

A2 $(\bigwedge x, y)\ (\bigvee z)\ x = y \circ z$

A3 $(\bigwedge x, y)\ (\bigvee z)\ x = z \circ y$.

Jedyny pozalogiczny symbol tej teorii, tj. $\circ$, oznacza działanie określone na parach elementów czerpanych ze wskazanego w określonej interpretacji zbioru U i o wartościach w tym zbiorze, czyli: $\circ$: $(U \times U) \rightarrow U$.

W. Balzer, C.U. Moulines, J. Sneed, *An Architectonic for Science...*, dz. cyt., s. 1–94; R. Wójcicki, *Metodologia formalna nauk empirycznych. Podstawowe pojęcia i zagadnienia*, Wrocław 1974, s. 26–32, 96–112, 183–186; tenże, *Topics in the Formal Methodology of Empirical Sciences*, Dordrecht–Wrocław 1979, s. 49. Por. także T.S. Kuhn, *Theory-change as Structure-change: Comments on the Sneed Formalism*, „Erkenntnis" 1976, t. 10, nr 2, s. 182–183; M. Przełęcki, *A Set-theoretic Versus a Model Theoretic Approach to the Logical Structure of Empirical Theories*, „Studia Logica" 1974, t. 33, s. 103–104.

[46] Por. R. Wójcicki, Review of *An Architectonic for Science; The Structuralist Program*, by W. Balzer, C.U. Moulines, & J.D. Sneed, „Studia Logica" 1990, t. 49, nr 1, s. 153–155; tenże, *Teorie w nauce...*, dz. cyt., s. 68–71; M. Przełęcki, *A Set-theoretic Versus a Model Theoretic Approach to the Logical Structure of Empirical Theories*, dz. cyt., s. 91–112; W. Stegmüller, *The Structuralist View of Theories...*, dz. cyt., s. 4.

Aksjomaty te są spełnione np. gdy U jest zbiorem liczb naturalnych, a działanie $\circ$ jest rozumiane jako mnożenie lub jako dodawanie.

Odpowiednikiem teoriomnogościowym tej aksjomatyki jest następująca definicja:

($\mathbf{G_s}$) x jest grupą wtedy i tylko, gdy istnieją U oraz $\circ$ takie, że:
(1) $x = \langle U, \circ \rangle$;
(2) U jest zbiorem niepustym;
(3) $\circ$ jest funkcją: $(U \times U) \rightarrow U$;
(4) dla każdego $a, b, c \in U$: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$;
(5) dla każdego $a, b \in U$ istnieje $e \in U$: $a = (b \circ e)$;
(6) dla każdego $a, b \in U$ istnieje $e \in U$: $a = (e \circ b)$.

Warunki definiujące (1)–(3) to warunki formalne charakteryzujące zbiór podstawowy i funkcję $\circ$, a wymogi (4)–(6) to prawa tej teorii – łączności działania $\circ$, istnienia jego modułu prawostronnego i lewostronnego – odpowiadające aksjomatom A1–A3. W zakresie predykatu teoriomnogościowego „ ... jest grupą" są wszystkie struktury spełniające warunki (1)–(6), czyli modele teorii grup, Na przykład takie, jak $< \mathcal{N}, \cdot >$ i $< \mathcal{N}, + >$, które mogą być także wskazane jako interpretacje semantyczne aksjomatycznej teorii grup i uznane za jej modele, jako że dla dowolnego wartościowania czerpanego z $\mathcal{N}$ aksjomaty A1–A3 są spełnione dla tych działań, czyli są w tych dziedzinach prawdziwe.

W przypadku takich teorii jak teoria grup porównywane tu ujęcia są bardzo zbliżone, dlatego że prezentacja tak prostych teorii, których język nie odbiega znacząco od sformalizowanych już systemów logiki klasycznej, jest stosunkowo łatwa. Choć i dla tak prostych teorii widać, że definiowanie modeli teorii jest prostsze w ujęciu strukturalnym, jako że są one utożsamiane z elementami zakresu zdefiniowanego predykatu – tu predykatu „ ... jest grupą". Sytuacja zmienia się jednak wraz z nasilającymi się trudnościami w formalizacji języka rekonstruowanej teorii, co widoczne zwłaszcza przy próbie tradycyjnego ujmowania teorii empirycznych, których języki odbiegają znacznie od sformalizowanego języka rachunku predykatów, w którym prostsze teorie są zwykle aksjomatyzowane. Ponadto, obok przeszkody w postaci wymaganej aksjomatyzacji w języku sformalizowanym, trzeba w rekonstruowaniu takich teorii uwzględnić istotne dla ich zrozumienia warunki empirycznej interpretacji. Na przykład w rekonstrukcji klasycznej mechaniki punktów materialnych **(CPM)** do wymagań formalnych, dotyczących elementów struktur, do których teoria ta może być stosowana – tj. zbiorów podstawowych P, T i pomocniczych $\mathcal{R}$, $\mathcal{N}$ oraz podstawowych relacji, tj. określonych na tych zbiorach funkcji s położenia, m masy i f siły – trzeba dodać warunki, że P to zbiór mas punktowych, T to ogół chwil (punktów czasowych), S punktów w przestrzeni, interpretując symbole s, m i f jako funkcje położenia, masy i siły – po czym dołączyć prawa podstawowe, wiążące wartości dla tych funkcji, które wydzielają zbiór modeli dla tej teorii spośród ogółu jej modeli możliwych. Układ podstawowych pojęć i warunków dla prostej termodynamiki procesów równowagowych (**SETH**) tworzą funkcje objętości, liczby molowej, energii i entropii, określone na zbiorze stanów systemu fizycznego, zbiorze (indeksów) substancji chemicznych i potrzebnych zbiorach pomocniczych; pośród podstawowych pojęć właściwych dla możliwych modeli mechaniki Lagrange'a (**LAG**) są stopnie swobody i współrzędne uogólnione, w miejsce punktów materialnych i położenia, o których mowa w interpretacji **CPM** itp.[47]

Formalnojęzykowe i teoriomodelowe metody ujęcia tradycyjnego sprawiają, że prezentacja teorii empirycznych jest w nim znacznie trudniejsza, o ile w ogóle możliwa i warta podjęcia. Wprawdzie wpychanie konkretnej teorii w schemat stosowany w ujęciu strukturalnym również wymaga pokonania związanych z tym trudności – spowodowanych przede wszystkim koniecznością tłumaczenia na język teoriomnogościowy różnorodnych twierdzeń, funkcjonujących, nie zawsze wyraźnie, w teoriach[48] – lecz rekonstrukcje teoriomnogościowe są znacznie dogodniejsze, a przy tym

[47] W monografii: W. Balzer, C.U. Moulines, J. Sneed, *An Architectonic for Science...*, dz. cyt. są ponadto podane przykłady modeli możliwych wielu innych teorii, np. ekonomii wymiany czystej (*pure exchange economy*), której modele możliwe są wyznaczone m.in. przez pojęcia (funkcje) ceny i użyteczności, stosowane do zbioru osób lub grup ludzkich i zbioru towarów – zob. tamże, np. s. 24–25, 29–30, 128, 151–152, 156. Zob. także W. Balzer, *The Proper Reconstruction of Pure Exchange Economics*, „Erkenntnis" 1985, t. 23, nr 2, s. 185–200.

[48] W ujęciu tym są uwzględniane także inne niż zwykle wyróżniane twierdzenia istotne dla określenia teorii, na przykład wyżej już wspomniane tzw. ograniczenie i powiązania międzyteoretyczne, co wymaga przebadania wielu zastosowań rekonstruowanych teorii i rozległego ich kontekstu teoretycznego. Por. J. Sneed, *The Logical Structure of Mathematical Physics*, dz. cyt., s. 67–72, 170; W. Stegmüller, *Accidential ('Non-substantial') Theory-Change and Theory Dislodgement: To What Extent Logic Can Contribute to a Better Understanding of Certain Phenomena in the Dynamics of Theories*, „Erkenntnis" 1976, t. 10, nr 2, s. 73–78, 113; C.U. Moulines, *A Logical Reconstruction of Simple Equilibrium Thermodynamics*, „Erkenntnis" 1975, t. 9, nr 1, s. 116–125, 128; W. Balzer, C.U. Moulines, J. Sneed, *An*

w zakresie teorii empirycznych są naturalniejsze, w tym sensie, że mniej niż formalnojęzykowe zniekształcają oryginalne sformułowania takich teorii[49].

Różnica w skuteczności obu tych ujęć zaznacza się wyraźnie w liczbie teorii zaksjomatyzowanych na oba te sposoby. Ogłaszane w filozofii i metodologii nauk koncepcje teorii empirycznych odwołujące się do pojęć teorii modeli trudno jest wesprzeć przykładami teorii empirycznych przedstawionych metodami teoriomodelowymi, wymagającymi aksjomatyzacji teorii i definiowania modeli dla teorii (aksjomatów) sformułowanych w języku formalnym[50]. Natomiast wiele jest udanych teoriomnogościowych rekonstrukcji teorii empirycznych, relacji między nimi, ich rozwoju i osiąganego w nim postępu[51].

Architectonic for Science..., dz. cyt., s. 46–47, 57–73, 99, 105–106, 135, 139–147, 153–154, 159.

49 Zob. W. Stegmüller, *The Structuralist View of Theories...*, dz. cyt., s. 44–49; R. Wójcicki, *Teorie w nauce...*, cz. 1, dz. cyt., s. 68–75.

50 Zob. A. Tarski, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, dz. cyt., s. 91–116. W zmatematyzowanych teoriach empirycznych korzysta się z działów matematyki (np. równań różniczkowych, analizy tensorowej, teorii macierzy), które nie zostały sformalizowane w żadnym języku, dlatego tradycyjnych aksjomatyzacji teorii fizykalnych jest niewiele, a uznana za najlepszą, podana przez Montagua aksjomatyka mechaniki newtonowskiej jest bardzo złożona. Zob.: R. Montague, *Deterministic Theories*, w: *Formal Philosophy. Selected Papers of Richard Montague*, red. R.H. Thomason, New Haven 1974, s. 303–359; I. Niiniluoto, *The Growth of Theories: Comments on the Structuralist Approach*, w: *Theory Change, Ancient Axiomatics, and Galileo's Methodology. Proceedings of the 1978 Pisa Conference on the History and Philosophy of Science*, t. 1, red. J. Hintikka, D. Gruender, E. Agazzi, Dordrecht 1981, s. 5; W. Stegmüller, *The Structuralist View of Theories...*, dz. cyt., s. 5–7.

51 Porównując wyniki obu ujęć, W. Stegmüller ocenił, że właściwie zestawia się coś, co jest i gwałtownie przyrasta, z czymś, czego praktycznie nie ma (por. tamże, s. 3–7). Wiele strukturalistycznych rekonstrukcji teorii empirycznych jest w: W. Balzer, C.U. Moulines, J. Sneed, *An Architectonic for Science...*, dz. cyt. Rozwinięcie tego ujęcia odpowiednie dla badania rozwoju, ciągłości i postępu nauki jest zaproponowane w: A. Jonkisz, *Struktura, zmienność i postęp nauki...*, dz. cyt., s. 273–359; tenże, *Ciągłość teoretycznych wytworów nauki...*, dz. cyt. i tenże, *On Relative Progress in Science*, w: *On Comparing and Evaluating Scientific Theories*, red. A. Jonkisz, L. Koj, Amsterdam, 2000, s. 199–234, a syntetyczny opis wcześniejszych kierunków badań i wyników ujęcia strukturalnego jest m.in. w: tenże, *Klasyczna koncepcja prawdziwości a strukturalne ujęcie teorii*, dz. cyt., s. 52–153 oraz tenże, *Ciągłość teoretycznych wytworów nauki...*, dz. cyt., s. 11–12. Od czasu sformułowanych wówczas ocen i podsumowań liczba skutecznych rekonstrukcji i innych wyników osiągniętych w ujęciu strukturalnym na pewno wzrosła, choć tempo jego rozwoju i nasilenie związanych z nim dyskusji są dziś wyraźnie mniejsze.

ZAKOŃCZENIE

Zagadnienia podjęte w rozważaniach mieszczą się w metalogice rozumianej wąsko, tj. ograniczonej do syntaktyki i semantyki systemów dedukcyjnych. A przy tym zawarte w książce wyniki dotyczą przede wszystkim systemów logiki klasycznej, tj. KRZ i WRP, na których były skupione rozważania wcześniejszych części (zwłaszcza drugiej) całego opracowania[1].

Tytułowy podział zagadnień na syntaktyczne i semantyczne, zgodny z przyjmowanym w logice, jest wyraźnie widoczny w pierwszych dwóch rozdziałach, stanowiących rdzeń tej książki. Rozważania w nich zawarte mają podobną strukturę: najpierw są wprowadzone – w podrozdziale pierwszym każdego z tych rozdziałów – pojęcia i metody niezbędne dla charakterystyki systemów dedukcyjnych, zawartej w podrozdziale drugim.

W rozdziale poświęconym zagadnieniom syntaktyki są najpierw omówione: (I.1.1) kryteria i metody sprawdzania poprawności składniowej wyrażeń systemów formalnych; (I.1.2) pojęcia zbioru zamkniętego i własności dziedziczonej ze względu na określone działania; (I.1.3) definicje i twierdzenia dotyczące postaci normalnych formuł KRZ; oraz (I.1.4) metody dowodzenia twierdzeń syntaktycznych, w których są wykorzystane definicje indukcyjne i sprowadzanie wyrażeń do postaci normalnej. Ustalenia te są wykorzystane w podrozdziale I.2: (2.1) do ogólnej charakterystyki systemów dedukcyjnych, pojęcia dowodu i tezy systemu dedukcyjnego; (2.2) w prezentacji podstawowych wyników (twierdzeń) dotyczących relacji konsekwencji, zwieńczonej (2.3) twierdzeniem o dedukcji. W ostatniej części tego podrozdziału (2.4) są przedstawione podstawowe wyniki dotyczące syntaktycznych własności systemów dedukcyjnych: niesprzeczności, zupełności, rozstrzygalności i niezależność aksjomatów.

[1] A. Jonkisz, *Zagadnienia semiotyki logicznej i ogólnej metodologii nauk*, dz. cyt.; *Zagadnienia logiki formalnej i ogólnej teorii mnogości*, dz. cyt.

W prezentacji tej są uwzględnione: (2.4.1) odmiany (syntaktycznego) pojęcia niesprzeczności (niesprzeczność zw. negacyjną, niesprzeczność zw. absolutną) oraz twierdzenia podstawowe dla sprawdzania niesprzeczności systemów metodą cechy dziedziczonej (w klasie działań właściwych dla danego systemu) oraz metodą interpretacji (danego, badanego systemu w systemie niesprzecznym); (2.4.2) odmiany (syntaktycznego) pojęcia zupełności (zupełność klasyczna, zw. negacyjną i zupełność w sensie Posta) i ważne w tym kontekście twierdzenia o rozszerzeniach systemu niesprzecznego (**T18**), m.in. o istnieniu rozszerzenia niesprzecznego i zupełnego (twierdzenie, zw. też lematem, Lindenbauma – **T19**); (2.4.3) pojęcie rozstrzygalności systemu i efektywne metody rozstrzygania dla KRZ (sprowadzania do postaci normalnej i matrycowa); (2.4.4) pojęcie niezależności aksjomatów i twierdzenia podstawowe dla okazywania tej własności (**T21–T22**).

Wyjściowe dla podjęcia zagadnień semantycznych są, zdefiniowane po raz pierwszy przez A. Tarskiego, pojęcia spełniania i prawdy. Ścisłe definicje spełniania (RII.1: **D2**) i prawdziwości, a dokładniej – ogółu $E(\mathcal{M})$ zdań prawdziwych w dziedzinie $\mathcal{M}$ (RII.1: **D3.a–b**) są fundamentem semantycznej charakterystyki systemów dedukcyjnych. Zostały one wykorzystane (w RII.2) do: (2.1) uzasadnienia twierdzeń mówiących o prawdziwości wyrażeń złożonych (**T1.1**, **T1.2**) i własnościach systemów twierdzeń prawdziwych (**T2**, **T3**, **W1–W3**); (2.2) określenia odmian pojęcia modelu (zbioru wyrażeń zdaniowych, systemu aksjomatycznego); (2.3) uzasadnienia zależności między istnieniem modelu a niesprzecznością systemu (**T5**, **T6**), podsumowanych twierdzeniem (Gödla-Malcewa) o równoważności własności niesprzeczności i posiadania modelu (**T8**); (2.4) zdefiniowania odmian pojęcia kategoryczności (**D4.a–b**) i ważnych dla teorii pierwszego rzędu twierdzeń (Skolema-Löwenheima i Tarskiego) o związku (równoważnościowym) między posiadaniem modelu a posiadaniem modelu przeliczalnego i modelu dowolnej mocy (**T9.a–b**); (2.5) zdefiniowania pojęcia pełności systemu (**D5**) oraz uzasadnienia twierdzeń (Gödla) o pełności logiki klasycznej (**T10–T12**, **W5**); (2.6) zdefiniowania pojęcia wynikania logicznego (konsekwencji semantycznej), uzasadnienia twierdzeń (**T13–T15**) mówiących o związkach między relacją konsekwencji syntaktycznej (implikowania) i semantycznej (wynikania logicznego) oraz zestawienia analogicznych własności obu tych relacji (**W6.1–W6.7**).

Rozdział trzeci nie jest powiązany definicyjnie i dowodowo z wynikami wcześniejszymi, choć opiera się na wcześniejszych ustaleniach. Są w nim omówione, głównie nieformalnie, wybrane zagadnienia uzupełniające wcześniejsze wyniki. W podrozdziale (III.1) są sformułowane i skomentowane te twierdzenia zwane limitacyjnymi, które nie zostały uwzględnione w głównym toku rozważań, mianowicie: (1.1) twierdzenia Gödla o niezupełności i o niedowodliwości niesprzeczności, a w tym kontekście jego rozumienie niesprzeczności i zupełności; (1.2) twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności prawdy; oraz (1.3) Churcha teza (utożsamienie funkcji obliczalnych z rekurencyjnymi) i twierdzenie (o nierozstrzygalności logiki pierwszego rzędu (WRP). W III.2 są zestawione syntaktyczne i semantyczne własności wybranych systemów dedukcyjnych, a III.3 zawiera analizy porównujące klasyczne (Tarskiego) ujęcie teoriomodelowe z definiowaniem pojęcia modelu w ujęciu zwanym teoriomnogościowym (in. strukturalistycznym), wykorzystywanym w rekonstruowaniu teorii empirycznych.

Jeśli chodzi o ocenę wyników zawartych w książce, to powtórzę usprawiedliwienie aktualne również w tej części opracowania. Otóż zostały w niej uwzględnione wyniki wybrane spośród podstawowych zagadnień syntaktyki i semantyki systemów dedukcyjnych. Dlatego nie można oczekiwać, by zostały omówione wszystkie zagadnienia uznawane za podstawowe, a tym bardziej problemy i wyniki nowe. Oryginalności i pewnych zalet można się w tej książce doszukiwać jedynie w prezentacji i omówieniach znanych rezultatów: w układzie zagadnień, definicji i twierdzeń, w ich sformułowaniach zapisanych w jednolitej notacji (symbolice), komentarzach i przykładach, a także w niektórych dowodach. Wybiórczość jest okolicznością usprawiedliwiającą także to, że nie ma w książce wielu zagadnień i wyników, których można by oczekiwać, odczytując jej tytuł. Dotyczy to na przykład pominięcia niektórych dowodów, braku ścisłego (syntaktycznego i semantycznego) ujęcia definicji, zagadnień reprezentowalności i rozstrzygalności, obszerniejszych niż zamieszczone uwag o systemach nieelementarnych oraz komentarzy filozoficznych (filozoficzne znaczenie wyników logiki) i dotyczących dziejów logiki (odesłania do opracowań z historii logiki też nie są liczne).

*

Ostatnie uwagi dotyczą także całego trzyczęściowego opracowania zagadnień logiki, które zamyka niniejsza książka. Dostrzegam wyraźnie pewne niedostatki i braki, jednak ich usunięcie wymagałoby osobnego, monograficznego (nie encyklopedycznego) opracowania różnych działów szeroko rozumianej logiki – zarówno tych znanych, od dawna wykładanych i nadal rozwijanych, jak i najnowszych – obejmującego także dyscypliny pokrewne, takie jak filozofia logiki i jej historia (przy czym odrębna i obszerna część opracowania historycznego dotyczyłaby logiki rozwijanej w Polsce). Wykonanie takiego zadania przekracza możliwości pojedynczych badaczy, a nawet ośrodków i dlatego potrzebny byłby zespół specjalistów z różnych dziedzin logiki, pracujących w ramach odpowiednio dofinansowanego programu.

BIBLIOGRAFIA

Zestawione są wyłącznie publikacje cytowane w niniejszej książce.

Ajdukiewicz K., *Logika pragmatyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975.

Balzer W., Moulines C.U., Sneed J., *An Architectonic for Science. The Structuralist Program*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1987.

Balzer W., *The Proper Reconstruction of Pure Exchange Economics*, „Erkenntnis" 1985, t. 23, nr 2, s. 185–200.

Batóg T., *Podstawy logiki*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Adama Mickiewicza, Poznań 2003.

Borkowski L., *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, Towarzystwo Naukowe Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego, Lublin 1991.

Bourbaki N., *Elements of Mathematics. Theory of Sets*, Addison-Wesley, Reading, MA 1968.

Grayling A.C., *An Introduction to Philosophical Logic*, Blackwell, Oxford 1997.

Grayling A.C., *Philosophical Logic, the Philosophy of Logic, Philosophy and Logic*, w: tegoż, *An Introduction to Philosophical Logic*, Blackwell, Oxford 1997, s. 1–11.

Grzegorczyk A., *Fonctions Récursives*, Gauthier-Villars, Nauvelaerts, Paris–Louvain 1961.

Grzegorczyk A., *Zarys logiki matematycznej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1981.

Hunter G, *Metalogika*, tłum. B. Stanosz, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1982.

Jonkisz A., *Ciągłość teoretycznych wytworów nauki. Ujęcie strukturalne*, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin 1998.

Jonkisz A., *Klasyczna koncepcja prawdziwości a strukturalne ujęcie teorii,* w: *Postacie prawdy*, t. 1, red. A. Jonkisz, W. Morszczyński, Filia Uniwersytetu Śląskiego w Cieszynie, Cieszyn 1996, s. 151–177.

Jonkisz A., *On Relative Progress in Science,* w: *On Comparing and Evaluating Scientific Theories*, red. A. Jonkisz, L. Koj, Rodopi, Amsterdam, 2000, s. 199–234.

Jonkisz A., *Struktura, zmienność i postęp nauki. Ujęcie strukturalne,* Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin 1990.

Jonkisz A., *Zagadnienia logiki formalnej i ogólnej teorii mnogości,* Wydawnictwo Naukowe Akademii Ignatianum w Krakowie, Kraków 2024.

Jonkisz A., *Zagadnienia semiotyki logicznej i ogólnej metodologii nauk,* Wydawnictwo Naukowe Akademii Ignatianum w Krakowie, Kraków 2023.

Krajewski S., *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne. Od mechanicyzmu do postmodernizmu*, Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa 2003.

Kuhn T.S., *Theory-change as Structure-change: Comments on the Sneed Formalism*, „Erkenntnis" 1976, t. 10, nr 2, s. 179–199.

Logika formalna. Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki, red. W. Marciszewski, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1987.

Łukasiewicz J., *Sylogistyka Arystotelesa z punktu widzenia współczesnej logiki formalnej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1988.

McKinsey J.J.C., Suggar A.C., Suppes P., *Axiomatic Foundations of Classical Particle Mechanics*, „Journal of Rational Mechanics and Analysis" 1953, t. 2, s. 253–272.

Montague R., *Deterministic Theories,* w: *Formal Philosophy. Selected Papers of Richard Montague*, red. R.H. Thomason, Yale University Pres, New Haven 1974, s. 303–359.

Moulines C.U., *A Logical Reconstruction of Simple Equilibrium Thermodynamics*, „Erkenntnis" 1975, t. 9, nr 1, s. 101–130.

Murawski R., *Filozofia matematyki i logiki w Polsce międzywojennej,* Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 2011.

Murawski R., *Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Adama Mickiewicza, Poznań 2003.

Niiniluoto I, *The Growth of Theories: Comments on the Structuralist Approach*, w: *Theory Change, Ancient Axiomatics, and Galileo's Methodology. Proceedings of the 1978 Pisa Conference on the History and Philosophy of Science*, t. 1, red. J. Hintikka, D. Gruender, E. Agazzi, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1981, s. 3–47.

Olszewski A., *Teza Churcha a twierdzenie Gödla*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 2000, nr 26, s. 59–65.

Olszewski A., Woleński J., Janusz R. (red.), *Church's Thesis After 70 Years*, Ontos Verlag, Frankfurt 2006.

Pogorzelski W.A., *Klasyczny rachunek kwantyfikatorów. Zarys teorii*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1981.

Pogorzelski W.A., *Klasyczny rachunek zdań. Zarys teorii*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975.

Przełęcki M., *A Set-theoretic Versus a Model Theoretic Approach to the Logical Structure of Empirical Theories*, „Studia Logica" 1974, t. 33, s. 91–112.

Sneed J., *The Logical Structure of Mathematical Physics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1971.

Stegmüller W., *A Combined Approach to the Dynamics of Theories*, „Theory and Decision" 1978, t. 9, s. 39–75.

Stegmüller W., *Accidential ('Non-substantial') Theory-Change and Theory Dislodgement: To What Extent Logic Can Contribute to a Better Understanding of Certain Phenomena in the Dynamics of Theories*, „Erkenntnis" 1976, t. 10, nr 2, s. 147–178.

Stegmüller W., *The Structuralist View of Theories. A Possible Analogue of Bourbaki Programme in Physical Science*, Springer, Berlin 1979.

Stegmüller W., *The Structure and Dynamics of Theories*, Springer, New York 1976.

Suppes P., *Introduction to Logic*, Van Nostrand, New York 1957.

Suppes P., *Set-theoretic Structures in Science*, Stanford University, Stanford, CA 1967.

Tarski A., *Pisma logiczno-filozoficzne*, t. 1: *Prawda*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995.

Tarski A., *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Warszawa 1933.

Woleński J., *Epistemologia*, t. 3: *Prawda i realizm*, Aureus, Kraków 2003.

Woleński J., *Epistemologia. Poznanie – prawda – wiedza – realizm*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2014.

Woleński J., *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1985.

Woleński J., *Języki sformalizowane a prawda,* w: *Alfred Tarski: dedukcja i semantyka*, red. J. Jadacki, Wydawnictwo Naukowe Semper, Warszawa 2003, s. 67–76.

Woleński J., *Lindenbaum, Adolf*, w: A. Dąbrowski, M. Hoły-Łuczaj, A. Schumann, K. Szocik, J. Woleński, *Leksykon logików polskich 1900–1939*, Copernicus Center Press, Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Kraków, Rzeszów 2022, s. 203–208.

Woleński J., *O filozoficznym sensie metamatematycznych twierdzeń limitacyjnych*, „Wiadomości Matematyczne" 2009, t. 45, nr 2, s. 195–216.

Woleński J., *Semantics and Truth*, Springer, Cham 2019.

Woleński J., *Tarski, Alfred*, A. Dąbrowski, M. Hoły-Łuczaj, A. Schumann, K. Szocik, J. Woleński, *Leksykon logików polskich 1900–1939*, Copernicus Center Press, Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Kraków, Rzeszów 2022, s. 330–347.

Wójcicki R., *Metodologia formalna nauk empirycznych. Podstawowe pojęcia i zagadnienia*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, Wrocław 1974.

Wójcicki R., Review of *An Architectonic for Science; The Structuralist Program*, by W. Balzer, C.U. Moulines, & J.D. Sneed, „Studia Logica" 1990, t. 49, nr 1, s. 153–155.

Wójcicki R., *Teorie w nauce. Wstęp do logiki, metodologii i filozofii nauki*, cz. 1, Instytut Filozofii i Socjologii Polskiej Akademii Nauk, Warszawa 1991.

Wójcicki R., *Topics in the Formal Methodology of Empirical Sciences*, D. Reidel Publishing Company, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Dordrecht–Wrocław, 1979.

DEFINICJE, TWIERDZENIA, SCHEMATY

Zestawione są wyłącznie numerowane w tekście definicje i twierdzenia oraz schematy reguł wnioskowania – uporządkowane zgodnie z kolejnością rozdziałów i podrozdziałów książki.

***RI. Pojęcia i zagadnienia syntaktyczne

***RI.1 Formuły rachunków logicznych

1.1 Kategorie syntaktyczne i poprawność składniowa formuł

D1 Dowolne formuły f_1 oraz f_2 języka niezinterpretowanego $J = <S, G>$ należą do tej samej kategorii składniowej wtedy i tylko, gdy dla dowolnej składniowo poprawnej formuły zdaniowej F tego języka, w której występuje jedna z formuł f_1 oraz f_2, jest tak, że po jej zastąpieniu drugą z tych formuł uzyskana w wyniku formuła F' jest składniowo poprawną formułą zdaniową języka J.

D2

(i) Φ jest wyrażeniem 1. rzędu KRZ wtedy i tylko, gdy Φ jest zmienną zdaniową;
(ii) Φ jest wyrażeniem k-tego rzędu wtedy i tylko, gdy istnieją takie wyrażenia Φ_1 i Φ_2 rzędów niższych od k, że Φ jest identyczne z: $\ulcorner{\sim}\Phi_1\urcorner$ albo z jednym spośród wyrażeń: $\ulcorner\Phi_1 \wedge \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1 \vee \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1 \veebar \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1 \Downarrow \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1/\Phi_2\urcorner$ itd.;
(iii) Φ jest wyrażeniem KRZ wtedy i tylko, gdy istnieje taka liczba naturalna n, że Φ jest wyrażeniem n-tego rzędu KRZ.

D3

(i) Φ jest wyrażeniem 1. rzędu WRP wtedy i tylko, gdy Φ jest zmienną zdaniową lub wyrażeniem postaci $\ulcorner P(x_1, \dots, x_n)\urcorner$;

(ii) Φ jest wyrażeniem k-tego rzędu wtedy i tylko, gdy istnieją wyrażenia WRP Φ_1 i Φ_2 rzędów niższych od k takie, że Φ jest identyczne z : $\ulcorner\sim\Phi_1\urcorner$ albo z jednym spośród wyrażeń: $\ulcorner\Phi_1 \wedge \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1 \vee \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1 \veebar \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1 \Downarrow \Phi_2\urcorner$, $\ulcorner\Phi_1 / \Phi_2\urcorner$ itd.; albo Φ jest formułą postaci $(\bigwedge \alpha)\ \Phi_1$ lub $(\bigvee \alpha)\ \Phi_1$, w której α występuje w Φ_1 i Φ_2 jako zmienna indywiduowa;

(iii) Φ jest wyrażeniem WRP wtedy i tylko, gdy istnieje taka liczba naturalna n, że Φ jest wyrażeniem n-tego rzędu WRP.

1.2 Zbiory formuł zamknięte ze względu na określone działania

D4.a Zbiór A jest zamknięty ze względu na n-argumentową funkcję f ($zam(A, f)$) wtedy i tylko, gdy:
$(\bigwedge x_1, x_2, \dots, x_n \in A)\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$;

D4.b Zbiór A jest zamknięty ze względu na klasę $\boldsymbol{F}$ funkcji ($zam(A, \boldsymbol{F})$) wtedy i tylko, gdy jest zamknięty ze względu na każdą funkcję tej klasy;

D4.c Własność W jest dziedziczna ze względu na n-argumentową funkcję f ($inh(W, f)$) wtedy i tylko, gdy:

$(\bigwedge x_1, x_2, \dots, x_n)\ [(W(x_1) \wedge W(x_2) \wedge \dots \wedge W(x_n)) \Rightarrow W(f(x_1, x_2, \dots, x_n))]$;

D4.d Własność W jest dziedziczna ze względu na klasę $\boldsymbol{F}$ funkcji ($inh(W, \boldsymbol{F})$) wtedy i tylko, gdy jest dziedziczna ze względu na każdą funkcję tej klasy.

D4.e $x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ wtedy i tylko, gdy $(\bigwedge B)\ [(A \subset B \wedge zam(B, \boldsymbol{D})) \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in B]$.

L1 $A \subset Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$.

L2 Jeżeli $A \subset B \wedge zam(B, \boldsymbol{D}))$, to $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D}) \subset B$.

L3 $zam(Z_{\min}(A, \boldsymbol{D}), \boldsymbol{D})$.

L4 $Z_{\min}(Z_{\min}(A, \boldsymbol{D}), \boldsymbol{D}) \subset Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$.

L5 Jeżeli $A \subset B$, to $Z_{\min}(A, \boldsymbol{D}) \subset Z_{\min}(B, \boldsymbol{D})$.

L6.a $inh(W, f)$ wtedy i tylko, gdy $zam(\{x\colon W(x)\}, f)$.

L6.b $inh(W, \boldsymbol{F})$ wtedy i tylko, gdy $(\bigwedge f \in \boldsymbol{F})$ $zam(\{x\colon W(x)\}, f)$.

T1 Jeżeli $(\bigwedge x \in A)$ $W(x)$ oraz $inh(W, \boldsymbol{F})$, to $(\bigwedge x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{F}))$ $W(x)$.

1.3 Postacie normalne

D5.a Alternatywa elementarna to n-członowa ($n \geq 1$) alternatywa zmiennych lub ich negacji.

D5.b Koniunkcyjna postać normalna to n-członowa ($n \geq 1$) koniunkcja alternatyw elementarnych.

D5.c Koniunkcyjna postać normalna jakiegoś wyrażenia jest kanoniczna (wyróżniona) wtedy i tylko, gdy występują w niej wyłącznie zmienne danego wyrażenia, a przy tym każda zmienna danego wyrażenia występuje (w postaci zanegowanej lub niezanegowanej) w każdej alternatywie będącej członem tej koniunkcyjnej postaci normalnej.

L7.a Alternatywa alternatyw elementarnych jest alternatywą elementarną.

L7.b Koniunkcja koniunkcyjnych postaci normalnych jest koniunkcyjną postacią normalną.

D6.a Koniunkcja elementarna to n-członowa ($n \geq 1$) koniunkcja zmiennych lub ich negacji.

D6.b Alternatywna postać normalna to n-członowa ($n \geq 1$) alternatywa koniunkcji elementarnych.

D6.c Alternatywna postać normalna jakiegoś wyrażenia jest kanoniczna (wyróżniona) wtedy i tylko, gdy występują w niej wyłącznie zmienne danego wyrażenia, a przy tym każda zmienna danego wyrażenia występuje (w postaci zanegowanej lub niezanegowanej) w każdym członie tej alternatywnej postaci normalnej.

1.4 Dowodzenie twierdzeń o formułach rachunków logicznych

1.4.1 Wykorzystanie zasady indukcji

T2 $x \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ wtedy i tylko, gdy $(\bigvee C)$ $C_{A,\,\boldsymbol{D}}(x)$, tj. gdy istnieje skończony ciąg, którego ostatnim wyrazem jest x oraz którego każdy wyraz albo należy do A, albo jest uzyskany z wcześniejszych wyrazów tego ciągu jako wynik zastosowania do nich któregoś z działań klasy ***D***.

T3 Jeżeli $x \in Z_{min}(A, \boldsymbol{D})$, to istnieją: skończony podzbiór B zbioru A i skończony podzbiór ***D'*** klasy ***D***, takie że $x \in Z_{min}(B, \boldsymbol{D}')$.

1.4.2 Sprowadzanie do postaci normalnej

T4.1 Dowolna formuła Φ klasycznego rachunku zdań jest sprowadzalna do koniunkcyjnej postaci normalnej, sprowadzalna, tzn. że istnieje taka koniunkcyjna postać normalna K, że równoważność $\ulcorner \Phi \Leftrightarrow K \urcorner$ jest tezą KRZ.

L8 Negacja alternatywy elementarnej jest sprowadzalna do koniunkcyjnej postaci normalnej.

L9 Alternatywa n-członowa ($n \geq 1$) koniunkcyjnych postaci normalnych jest sprowadzalna do koniunkcyjnej postaci normalnej.

L10 Negacja koniunkcyjnej postaci normalnej jest sprowadzalna do koniunkcyjnej postaci normalnej.

L11 Każde wyrażenie KRZ, w którym oprócz symboli zmiennych są użyte wyłącznie symbole negacji, koniunkcji i alternatywy (nie ma symboli innych spójników) jest sprowadzalne do koniunkcyjnej postaci normalnej.

T4.2 Dowolne wyrażenie Φ klasycznego rachunku zdań jest sprowadzalne do alternatywnej postaci normalnej A, sprowadzalne, tzn. że równoważność $\ulcorner \Phi \Leftrightarrow A \urcorner$ jest tezą KRZ.

***RI.2 Systemy dedukcyjne: pojęcia i własności syntaktyczne

2.1 Systemy dedukcyjne

2.1.2 Współczesne ujęcie systemów dedukcyjnych

D1 System aksjomatyczny to uporządkowana para $<A, \boldsymbol{D}>$, w której A to zbiór aksjomatów, a ***D*** to zbiór działań wnioskowania.

D2 Zbiór tez systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$ jest to najmniejszy zbiór zawierający zbiór A i zamknięty ze względu na klasę ***D*** działań wnioskowania.

D3.1 Ciąg wyrażeń C jest dowodem wyrażenia Φ w systemie $<A, \boldsymbol{D}>$ (tj.: $dow_{A,\,\boldsymbol{D}}(C, \Phi)$) wtedy i tylko, gdy C jest skończonym ciągiem wyrażeń, którego wyrazem ostatnim jest Φ, a każdy wyraz należy do A lub jest uzyskany w wyniku zastosowania któregoś z działań klasy $\boldsymbol{D}$ do wcześniejszych wyrazów tego ciągu.

D3.2 Formuła Φ jest tezą systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$ wtedy i tylko, gdy istnieje dowód formuły Φ w systemie $<A, \boldsymbol{D}>$, tj. gdy $(\bigvee C)\ dow_{A,\,\boldsymbol{D}}(C, \Phi)$.

W1 Formuła $\Phi \in Z_{\min}(A, \boldsymbol{D})$ – tj. najmniejszego zbioru zawierającego zbiór A i zamkniętego ze względu na zbiór $\boldsymbol{D}$ działań wnioskowania – wtedy i tylko, gdy $(\bigvee C)\ dow_{A,\,\boldsymbol{D}}(C, \Phi)$.

2.2 Pojęcie konsekwencji

D4.a Zbiór konsekwencji zbioru wyrażeń X w systemie aksjomatycznym $<A, \boldsymbol{D}>$ jest to najmniejszy zbiór zawierający zbiór $(A \cup X)$ i zamknięty ze względu na klasę działań wnioskowania $\boldsymbol{D}$, tj.: $Cn_{A,\,\boldsymbol{D}}(X) = Z_{\min}((A \cup X), \boldsymbol{D})$.

D4.b Formuła Φ jest konsekwencją (jest wyprowadzalna z) wyrażeń zbioru X na gruncie systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$ wtedy i tylko, gdy istnieje skończony ciąg C wyrażeń, którego wyrazem ostatnim jest Φ, a każdy wyraz albo należy do zbioru $(A \cup X)$, albo jest uzyskany w wyniku zastosowania któregoś z działań klasy $\boldsymbol{D}$ do wcześniejszych wyrazów tego ciągu – tj.: $\Phi \in Cn_{A,\,\boldsymbol{D}}(X) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\bigvee C)\ C_{(A \cup X),\,\boldsymbol{D}}(\Phi)$.

W2 Formuła $\Phi \in Cn_{A,\,\boldsymbol{D}}(X)$ wtedy i tylko, gdy $(\bigvee C)\ dow_{A \cup X,\,\boldsymbol{D}}(C, \Phi)$.

D4.a’ $Cn_{A_{\mathrm{log}},\,\boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}}(X) = Z_{\min}((A_{\mathrm{log}} \cup X), \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}})$.

D4.b’ $\Phi \in Cn_{A_{\mathrm{log}},\,\boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}}(X) \Leftrightarrow (\bigvee C)\ C_{(A_{\mathrm{log}} \cup X),\,\boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}}(\Phi)$.

D4.a” $Cn_L(\varnothing) = Z_{\min}(A_{\mathrm{log}}, \boldsymbol{D}_{\mathbf{log}})$.

D4.b” $\Phi \in Cn_L(\varnothing) \Leftrightarrow (\bigvee C)\ C_{A\mathrm{log},\,\boldsymbol{D}\mathbf{log}}(\Phi)$.

T1 $X \subset Cn_{A,\,\boldsymbol{D}}(X)$.

T2 Jeżeli $X \subset Y$, to $Cn_{A,\,\boldsymbol{D}}(X) \subset Cn_{A,\,\boldsymbol{D}}(Y)$.

T3 $Cn_{A,\,\boldsymbol{D}}(Cn_{A,\,\boldsymbol{D}}(X)) \subset Cn_{A,\,\boldsymbol{D}}(X)$.

T4 Jeżeli $\Phi \in Cn_{A,\,\boldsymbol{D}}(X)$, to istnieje skończony podzbiór B zbioru A taki, że $\Phi \in Cn_{B,\,\boldsymbol{D}}(X)$.

T1’ $X \subset Cn_L(X)$.

T2’ Jeżeli $X \subset Y$, to $Cn_L(X) \subset Cn_L(Y)$.

T3’ $Cn_L(\mathrm{Cn}_L(X)) \subset Cn_L(X)$.

T4’ Jeżeli $\Phi \in Cn_{A_{\mathrm{log}},\,\boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}}(X)$, to istnieje skończony podzbiór B zbioru A taki, że $\Phi \in Cn_{B_{\mathrm{log}},\,\boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}}(X)$.

W2’ Formuła $\Phi \in Cn_L(X)$ wtedy i tylko, gdy $(\bigvee C)\ dow_{A_{\mathrm{log}} \cup X,\,\boldsymbol{D}_{\mathbf{log}}}(C, \Phi)$.

T5’ $\ulcorner \Phi \Rightarrow \Psi \urcorner \in Cn_L(X)$ wtedy i tylko, gdy $\Psi \in Cn_L(X \cup \{\Phi\})$.

T6’ $S \subset Cn_L\{\Phi, \sim\Phi\}$.

T7’ $(Cn_L\{\Phi\} \cap Cn_L\{\sim\Phi\}) \subset L$.

T8’ $Cn_L\{\Phi, \Psi\} = Cn_L\{\Phi \wedge \Psi\}$.

T9’ $(Cn_L\{\Phi\} \cap Cn_L\{\Psi\}) = Cn_L\{\Phi \vee \Psi\}$.

D4.c Zbiór tez systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$ to zbiór $Cn_{A,\,\boldsymbol{D}}(A)$,

D5.a $X \in \boldsymbol{Sys}$ wtedy i tylko, gdy $Cn(X) \subset X$.

D5.b $X, Y \in \boldsymbol{Sys}$ oraz $X \subset Y$ i $X \neq Y$, to system Y jest rozszerzeniem systemu X.

W3.a $X \in \boldsymbol{Sys}$ wtedy i tylko, gdy $Cn(X) = X$;

W3.b $Cn(X) \in \boldsymbol{Sys}$.

T10 Jeśli $X, Y \in \boldsymbol{Sys}$, to $(X \cap Y) \in \boldsymbol{Sys}$.

D6 Zbiory wyrażeń X oraz Y są równoważne, tj. $\Leftrightarrow(X, Y)$ wtedy i tylko, gdy $Cn(X) = Cn(Y)$.

D7 Zbiór wyrażeń A jest aksjomatyką zbioru wyrażeń X wtedy i tylko, gdy $A \subset X$ oraz $\Leftrightarrow(A, X)$.

W4 A jest aksjomatyką zbioru X wtedy i tylko, gdy $A \subset X$ oraz $Cn(A) = Cn(X)$.

D8 Zbiór wyrażeń X jest aksjomatyzowalny wtedy i tylko, gdy istnieje jego aksjomatyka.

2.3 Twierdzenie o dedukcji

T11.1 Jeżeli $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n\text{-}1} \vdash_L \Phi_n$, to $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n\text{-}2} \vdash_L \ulcorner\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Phi_n\urcorner$;

T11.2 Jeżeli $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n\text{-}1} \vdash_L \Phi_n$, to $\vdash_L \ulcorner\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow (\ldots \Rightarrow (\Phi_{n\text{-}1} \Rightarrow \Phi_n)\ldots)\urcorner$.

D9.a Ciąg wyrażeń $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k$ jest wyprowadzeniem w systemie L wyrażenia Ψ z wyrażeń $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ wtedy i tylko, gdy: ostatnim wyrazem ciągu jest wyrażenie wyprowadzane ($\Psi_k = \Psi$), a każdy wyraz należy do $(A_L \cup \{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\})$ lub jest uzyskany w wyniku zastosowania do wcześniejszych wyrazów tego ciągu reguły odrywania lub reguły dołączania kwantyfikatora ogólnego zastosowanej do zmiennych, które nie są wolne w wyrażeniach $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k$.

D9.b $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \vdash_L \Psi$ wtedy i tylko, gdy istnieje w systemie L wyprowadzenie wyrażenia Ψ z wyrażeń $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$.

L1.1 Jeśli $\vdash_L \Psi$, to $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \vdash_L \Psi$.

L1.2 Jeśli $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Psi \Rightarrow \Omega\urcorner, \Psi$, to $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \vdash_L \Omega$.

L1.3 Jeśli $\Psi \in \{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\}$, to $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Omega \Rightarrow \Psi\urcorner$.

L1.4 Jeśli $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Psi_1 \Rightarrow (\Psi_2 \Rightarrow \Psi_3)\urcorner, \ulcorner\Psi_1 \Rightarrow \Psi_2\urcorner$, to $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Psi_1 \Rightarrow \Psi_3\urcorner$.

L1.5 Jeśli $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Psi \Rightarrow \Omega\urcorner$ i zmienna α nie jest wolna w żadnym z wyrażeń $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, to $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \vdash_L \ulcorner\Psi \Rightarrow (\bigwedge \alpha)\, \Omega\urcorner$.

T11.1’ Jeżeli $\Psi \in Cn_L(X \cup \{\Phi\})$, to $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in Cn_L(X)$.

T11.2’ Jeżeli $\Psi \in Cn_L(X \cup \{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\})$, to $\ulcorner\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow (\ldots \Rightarrow (\Phi_n \Rightarrow \Psi)\ldots)\urcorner \in Cn_L(X)$.

T12.a Jeżeli $\vdash_{L+} \Phi$, tj. Φ jest tezą systemu opartego na klasycznym rachunku logicznym o aksjomatach pozalogicznych A_s, to istnieją takie aksjomaty $A_1, A_2, \ldots A_n \in A_s$, że implikacja $\ulcorner(\bigwedge \ldots)\, [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi\urcorner$ jest tezą logiczną, tj. $\vdash_L \ulcorner(\bigwedge \ldots)\, [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi\urcorner$.

T12.b Jeżeli $\vdash_L \ulcorner(\bigwedge \ldots)\, [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi\urcorner$, tj. istnieją aksjomaty $A_1, A_2, \ldots A_n \in A_s$, takie że implikacja $\ulcorner(\bigwedge \ldots)\, [A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi\urcorner$ jest tezą logiczną, to Φ jest tezą systemu opartego na klasycznym rachunku logicznym o aksjomatach pozalogicznych, tj. $\vdash_{L+} \Phi$.

T12 Φ jest tezą systemu L^+ opartego na klasycznym rachunku logicznym o aksjomatach pozalogicznych A_s, tj. $\vdash_{L+} \Phi$, wtedy i tylko, gdy istnieją takie aksjomaty specyficzne $A_1, A_2, \dots A_n \in A_s$ tego systemu, że implikacja $\ulcorner(\bigwedge \dots)\ [A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi\urcorner$ jest tezą logiczną, tj. $\vdash_L \ulcorner(\bigwedge \dots)\ [A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n] \Rightarrow \Phi\urcorner$.

2.4 Własności systemów aksjomatycznych

2.4.1 Niesprzeczność

D10.a1 Zbiór wyrażeń zdaniowych X jest niesprzeczny wtedy i tylko, gdy nie istnieje Φ takie, że $\Phi \in Cn(X) \wedge \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn(X)$;

D10.a2 System $<A, \boldsymbol{D}>$ jest niesprzeczny wtedy i tylko, gdy ${\sim}(\bigvee \Phi \in S_{<A, \boldsymbol{D}>})\ [\Phi \in Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A) \wedge \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A)]$.

D10.a1' Zbiór wyrażeń zdaniowych X jest sprzeczny wtedy i tylko, gdy istnieje Φ takie, że $\Phi \in Cn(X) \wedge \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn(X)$;

D10.a2' System $<A, \boldsymbol{D}>$ jest sprzeczny wtedy i tylko, gdy $(\bigvee \Phi \in S_{<A, \boldsymbol{D}>})\ [\Phi \in Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A) \wedge \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A)]$.

T13 Zbiór wyrażeń zdaniowych X jest niesprzeczny wtedy i tylko, gdy niesprzeczny jest zbiór $Cn_L(X)$.

T14 Jeśli zdanie $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \notin Cn_L(X)$, to zbiór $(X \cup \{\Phi\})$ jest niesprzeczny w sensie określonym w **D10.a1**.

T15.1 Zbiór wyrażeń zdaniowych X jest niesprzeczny w znaczeniu określonym w **D10.a1** wtedy i tylko, gdy niesprzeczny w tym samym sensie jest każdy jego skończony podzbiór;

T15.2 System $<A, \boldsymbol{D}>$ jest niesprzeczny w znaczeniu określonym w **D10.a2** wtedy i tylko, gdy niesprzeczny w tym samym sensie jest każdy system $<A', \boldsymbol{D}>$ taki, że A' jest skończonym podzbiorem A.

W5.1 Jeżeli zbiór formuł Y jest niesprzeczny oraz $X \subset Y$, to X jest niesprzeczny.

W5.2 Jeżeli $X_1, X_2, X_3, \dots$ jest nieskończonym ciągiem zbiorów formuł zdaniowych niesprzecznych w znaczeniu określonym w **D10.a1** oraz ciąg ten jest wstępujący, tzn. $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$, to suma X wyrazów tego ciągu jest zbiorem niesprzecznym w tym samym sensie.

D10.b1 Zbiór wyrażeń zdaniowych X jest niesprzeczny wtedy i tylko, gdy $\sim(\bigwedge \Phi \in S)\ \Phi \in Cn(X)$;

D10.b2 System $<A, \boldsymbol{D}>$ jest niesprzeczny wtedy i tylko, gdy $\sim(\bigwedge \Phi \in S_{<A, \boldsymbol{D}>})\ \Phi \in Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A)$.

W6 System $<A, \boldsymbol{D}>$ jest niesprzeczny wtedy i tylko, gdy $Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A) \subset S_{<A, \boldsymbol{D}>} \neq Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A)$.

D10.b2' System $<A, \boldsymbol{D}>$ jest sprzeczny wtedy i tylko, gdy $(\bigwedge \Phi \in S_{<A, \boldsymbol{D}>})\ \Phi \in Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A)$, tj. gdy $S_{<A, \boldsymbol{D}>} = Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A)$.

T16.a Jeśli istnieje własność W, która przysługuje każdemu aksjomatowi systemu $<A, \boldsymbol{D}>$ i jest dziedziczona ze względu na klasę działań $\boldsymbol{D}$, tj. $inh(W, \boldsymbol{D})$, oraz W nie przysługuje wyrażeniom sprzecznym, to system ten jest niesprzeczny w sensie zdefiniowanym w **D10.a2**.

T16.b Jeśli istnieje własność W, która przysługuje każdemu aksjomatowi systemu $<A, \boldsymbol{D}>$ i jest dziedziczona ze względu na klasę działań $\boldsymbol{D}$, tj. $inh(W, \boldsymbol{D})$, oraz istnieje $\Phi \in S_{<A, \boldsymbol{D}>}$ takie, że $\sim W(\Phi)$, to system ten jest niesprzeczny w sensie zdefiniowanym w **D10.b2**.

D11 System aksjomatyczny T ma interpretację w systemie aksjomatycznym T' wtedy i tylko, gdy istnieje takie przyporządkowanie terminom pierwotnym systemu T terminów (pierwotnych lub zdefiniowanych) systemu T', że po zastąpieniu terminów pierwotnych systemu T przez przyporządkowane im terminy T' jest tak, że:
1. aksjomaty systemu T są przekształcane w tezy systemu T';
2. reguły pierwotne systemu T są przekształcane w reguły systemu T'.

D11' Jeśli systemy aksjomatyczne T i T' są oparte na tym samym rachunku logicznym, to T ma interpretację w systemie aksjomatycznym T' wtedy i tylko, gdy tłumaczenie każdego aksjomatu systemu T jest tezą systemu T'.

W7 Jeśli system aksjomatyczny T ma interpretację w systemie T', to tłumaczenie każdej tezy systemu T – uzyskane w wyniku fundującego interpretację przyporządkowania terminów systemu T terminom systemu T' – jest tezą w systemie T'.

T17.a Jeśli system aksjomatyczny T ma interpretację w systemie aksjomatycznym T' oraz system T' jest niesprzeczny w sensie określonym w **D10.a2**, to również system T jest w tym sensie niesprzeczny.

T17.b Jeśli system aksjomatyczny T ma taką interpretację w systemie aksjomatycznym T', że każde wyrażenie zdaniowe systemu T' jest tłumaczeniem pewnego wyrażenia zdaniowego systemu T oraz system T' jest niesprzeczny w sensie określonym w **D10.b2**, to również system T jest w tym sensie niesprzeczny.

2.4.2 Zupełność

D12.a1 System aksjomatyczny $<A, \boldsymbol{D}>$ jest zupełny (w sensie klasycznym) wtedy i tylko, gdy dla każdego zdania $\Phi \in S_{<A, \boldsymbol{D}>}$ jest tak, że: $\Phi \in Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A) \vee \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A)$.

D12.a2 Zbiór X formuł zdaniowych języka J jest w tym języku zupełny (w sensie klasycznym) wtedy i tylko, gdy dla każdego zdania Φ tego języka jest tak, że: $\Phi \in Cn_L(X) \vee \ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in Cn_L(X)$.

D12.b System aksjomatyczny $<A, \boldsymbol{D}>$ jest zupełny w sensie Posta wtedy i tylko, gdy dla każdego $\Phi \in S_{<A, \boldsymbol{D}>}$ jest tak, że: $\Phi \in Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A) \vee Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A \cup \{\Phi\}) = S_{<A, \boldsymbol{D}>}$.

T18. Jeśli system Y jest rozszerzeniem systemu X oraz:

a X jest systemem zupełnym w sensie klasycznym, to Y jest systemem sprzecznym w sensie określonym w **D10.a'**;

b X jest systemem zupełnym w sensie Posta, to Y jest systemem sprzecznym w sensie określonym w **D10.b2'**.

T19 Jeżeli X jest niesprzecznym zbiorem formuł zdaniowych języka J (w sensie **D10.a1**), to istnieje w tym języku niesprzeczny i zupełny system Y, który jest rozszerzeniem zbioru X, tj. $X \subset Y$.

2.4.3 Rozstrzygalność

D13.a System X jest rozstrzygalny wtedy i tylko, gdy dla dowolnej formuły zapisanej w języku tego systemu istnieje skuteczny sposób (algorytm) ustalania, czy formuła Φ jest tezą systemu X, tj. czy $\Phi \in Cn(X)$.

D13.b System X jest istotnie nierozstrzygalny wtedy i tylko, gdy X jest nierozstrzygalny i każde jego niesprzeczne rozszerzenie jest nierozstrzygalne.

T20.a Alternatywa elementarna jest tautologią KRZ wtedy i tylko, gdy spośród użytych w niej symboli zmiennych zdaniowych co najmniej jeden występuje i bez znaku negacji, i z negacją.

T20.b Formuła o koniunkcyjnej postaci normalnej jest tautologią KRZ wtedy i tylko, gdy tautologią jest każda z jej alternatyw elementarnych.

D14. **a** Matrycą logiczną jest układ $<A, W; \boldsymbol{F}>$, w którym A to zbiór wartości matrycy, $W \subset A$ jest zbiorem wartości wyróżnionych, a $\boldsymbol{F} = \{f_1, \ldots, f_k\}$ to funkcje matrycy, których argumenty i wartości należą do zbioru A.

b Wartościowaniem w matrycy $<A, W; \boldsymbol{F}>$ jest każda funkcja, która odwzorowuje zbiór zmiennych zdaniowych w zbiór wartości A.

D15. **a** Tautologią matrycy logicznej $<A, W; \boldsymbol{F}>$ w określonym przyporządkowaniu funkcji z klasy $\boldsymbol{F}$ funktorom rachunku zdań jest formuła zdaniowa, która dla każdego wartościowania przyjmuje wartość wyróżnioną tej matrycy, wyliczoną zgodnie z funkcjami definiującymi w danym przyporządkowaniu funktory występujące w tej formule.

b Matryca logiczna M jest przy określonym przyporządkowaniu jej funkcji funktorom rachunku zdań R adekwatna względem tego rachunku wtedy i tylko, gdy zbiór tez rachunku R jest identyczny ze zbiorem tautologii matrycy M przy tym przyporządkowaniu.

c Rachunek zdań R jest n-wartościowy wtedy i tylko, gdy n jest najmniejszą liczbą taką, że istnieje n-wartościowa matryca logiczna M adekwatna względem rachunku R.

D16 $\Phi \in Cn_M(X)$ wtedy i tylko, gdy Φ przybiera wartość wyróżnioną matrycy M dla każdego wartościowania, w którym wszystkie wyrażenia zbioru X uzyskują wartość wyróżnioną tej matrycy.

2.4.4 Niezależność aksjomatów

D17. **a** Wyrażenie Φ jest na gruncie systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$ niezależne od zbioru wyrażeń X wtedy i tylko, gdy Φ nie jest na gruncie tego systemu konsekwencją zbioru wyrażeń X, tj. $\Phi \notin Cn_{<A,\, \boldsymbol{D}>}(X)$.

b Zbiór wyrażeń X jest na gruncie systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$ niezależny wtedy i tylko, gdy na gruncie tego systemu żadne z wyrażeń zbioru X nie jest konsekwencją pozostałych wyrażeń tego zbioru, tj. $(\bigwedge \Phi \in X)\ \Phi \notin Cn_{<A,\, \boldsymbol{D}>}(X - \{\Phi\})$.

T21 Jeśli istnieje własność W, która przysługuje wszystkim wyrażeniom należącym do zbioru $\{A \cup X\}$, $inh(W, \boldsymbol{D})$ oraz W nie przysługuje wyrażeniu Φ, to wyrażenie Φ jest na gruncie systemu $<A, \boldsymbol{D}>$ niezależne od zbioru wyrażeń X.

T21' Jeśli istnieje własność W, która przysługuje wszystkim aksjomatom należącym do $(A - \{\Phi\})$ i $inh(W, \boldsymbol{D})$, a W nie przysługuje aksjomatowi Φ, to aksjomat Φ jest na gruncie systemu $<A, \boldsymbol{D}>$ niezależny od pozostałych aksjomatów tego systemu.

T22 Jeżeli wyrażenie $\ulcorner {\sim}\Phi \urcorner$ jest konsekwencją niesprzecznego w sensie **D10.a2** zbioru wyrażeń $X \cup \{\Phi\}$, to wyrażenie Φ jest niezależne od wyrażeń zbioru X.

L2 Jeżeli $\ulcorner {\sim}\Phi \urcorner \in Cn(X \cup \{\Phi\})$ i zbiór wyrażeń $X \cup \{\Phi\}$ jest niesprzeczny w znaczeniu określonym w **D10.a2**, to $\Phi \notin Cn(X)$.

***RII. Pojęcia i zagadnienia semantyczne

***RII.1. Pojęcia spełniania i prawdy

1.1 Spełnianie

D1 Zbiór S wyrażeń poprawnie zbudowanych jest to najmniejszy spośród zbiorów S' spełniających następujące warunki:

1. do zbioru S' należy każde wyrażenie postaci $\ulcorner P_i(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t}) \urcorner$;

2. jeśli Φ i Ψ należą do zbioru S', to do zbioru tego należą również wyrażenia: $\ulcorner {\sim}\Phi \urcorner$, $\ulcorner \Phi \wedge \Psi \urcorner$, $\ulcorner \Phi \vee \Psi \urcorner$, $\ulcorner \Phi \Rightarrow \Psi \urcorner$, $\ulcorner \Phi \Leftrightarrow \Psi \urcorner$, ..., $\ulcorner (\bigwedge x_j)\ \Phi \urcorner$, $\ulcorner (\bigvee x_j)\ \Phi \urcorner$.

D2. **1** $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner P_i(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t})\urcorner, \{a_n\})\ wtw\ R_i(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_t})$;

2 **a** $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner, \{a_n\})\ wtw\ {\sim}\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$;

b $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \wedge \Psi\urcorner, \{a_n\})\ wtw\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \wedge \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$;

c $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \vee \Psi\urcorner, \{a_n\})\ wtw\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \vee \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$;

d $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner, \{a_n\})\ wtw\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$;

e $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner\Phi \Leftrightarrow \Psi\urcorner, \{a_n\})\ wtw\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}) \Leftrightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})$;

f $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigwedge x_i)\ \Phi\urcorner, \{a_n\})\ wtw\ (\bigwedge a \in U)\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}(a_i/a))$;

g $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\ulcorner(\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner, \{a_n\})\ wtw\ (\bigvee a \in U)\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\}(a_i/a))$.

T1 Jeśli $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t}\}$ jest zbiorem wszystkich zmiennych wolnych wyrażenia Φ oraz $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są dowolnymi ciągami przedmiotów ze zbioru U dziedziny $\mathcal{M}$, które nie różnią się wyrazami o wskaźnikach $j_1, j_2, \ldots, j_t$, tj. $a_{j_1} = b_{j_1}, a_{j_2} = b_{j_2}, \ldots, a_{j_t} = b_{j_t}$, to:

$\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{b_n\})$.

T2 Jeśli wyrażenie Φ jest zdaniem oraz $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są dowolnymi ciągami przedmiotów ze zbioru U dziedziny $\mathcal{M}$, to $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$ wtedy i tylko, gdy $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{b_n\})$.

T3 Jeśli wyrażenie Φ jest zdaniem oraz zbiór U dziedziny $\mathcal{M}$ jest niepusty, to: $(\bigvee \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})\ wtw\ (\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$.

1.2 Pojęcie prawdy

D3. **a** Wyrażenie zdaniowe Φ jest prawdziwe w dziedzinie $\mathcal{M} = \langle U, R_1, R_2, \ldots, R_k\rangle$, tj. $\Phi \in E(\mathcal{M})$, wtedy i tylko, gdy wyrażenie Φ jest spełnione w $\mathcal{M}$ przez każdy ciąg przedmiotów czerpanych z U, tj. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$.

b Wyrażenie Φ klasycznego systemu logicznego jest prawdziwe w dziedzinie U wtedy i tylko, gdy wyrażenie Φ jest spełnione przez każdy ciąg przedmiotów z U, tj. $(\bigwedge \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})\ \mathbf{sp}_U(\Phi, \{a_n\})$.

L1.

a $\ulcorner\Phi \wedge \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})\ wtw\ \Phi \in E(\mathcal{M}) \wedge \Psi \in E(\mathcal{M})$;

b Jeżeli $(\Phi \in E(\mathcal{M}) \vee \Psi \in E(\mathcal{M}))$, to $\ulcorner\Phi \vee \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$;

c Jeżeli $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$, to $(\Phi \in E(\mathcal{M}) \Rightarrow \Psi \in E(\mathcal{M}))$;

d Jeżeli $\ulcorner\Phi \Leftrightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$, to $(\Phi \in E(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \Psi \in E(\mathcal{M}))$.

L2. Jeżeli Φ i Ψ są zdaniami, to:

a $\ulcorner\Phi \wedge \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ *wtw* $\Phi \in E(\mathcal{M}) \wedge \Psi \in E(\mathcal{M})$;

b $\ulcorner\Phi \vee \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ *wtw* $(\Phi \in E(\mathcal{M}) \vee \Psi \in E(\mathcal{M}))$;

c $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ *wtw* $(\Phi \in E(\mathcal{M}) \Rightarrow \Psi \in E(\mathcal{M}))$;

d $\ulcorner\Phi \Leftrightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ *wtw* $(\Phi \in E(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \Psi \in E(\mathcal{M}))$.

T4 Jeśli Φ jest wyrażeniem o zmiennych wolnych $x_1, x_2, \ldots, x_t$, to $\Phi \in E(\mathcal{M})$ wtedy i tylko, gdy $\ulcorner(\bigwedge x_1, x_2, \ldots, x_t)\ \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$.

T5 Jeśli Φ jest zdaniem i $\mathcal{M} = <U, R_1, R_2, \ldots, R_k>$ jest dziedziną niepustą, tj. $U \neq \varnothing$, to $\Phi \in E(\mathcal{M})$ wtedy i tylko, gdy $(\bigvee \{a_n\} \in U^{\mathcal{N}})$ $\mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})$.

T6 Jeśli dziedzina $\mathcal{M} = <U, R_1, R_2, \ldots, R_k>$ jest niepusta, to: $\sim(\Phi \in E(\mathcal{M}) \wedge \ulcorner\sim\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M}))$.

T7 Jeśli Φ jest zdaniem i $\mathcal{M} = <U, R_1, R_2, \ldots, R_k>$ jest dziedziną niepustą, to

a $\Phi \in E(\mathcal{M}) \vee \ulcorner\sim\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$;

b $\Phi \notin E(\mathcal{M})$ wtedy i tylko, gdy $\ulcorner\sim\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$.

***RII. 2. Systemy dedukcyjne – charakterystyka semantyczna

2.1 Prawdziwość twierdzeń i własności systemu twierdzeń prawdziwych

D1. **a** Wyrażenie Φ opartego na logice systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$ jest prawdziwe wtedy i tylko, gdy jest prawdziwe w każdej dziedzinie $\mathcal{M}$ tego systemu.

b Wyrażenie Φ klasycznego rachunku logicznego jest prawdziwe wtedy i tylko, gdy jest prawdziwe w każdej dziedzinie $\mathcal{M}$ niepustej.

T1.1 Jeśli Φ i Ψ są wyrażeniami zdaniowymi i $\mathcal{M} = <U, R_1, R_2, \ldots, R_k>$ jest dziedziną niepustą, to:

a Jeżeli $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ oraz $\Phi \in E(\mathcal{M})$, to $\Psi \in E(\mathcal{M})$;

b $\ulcorner\Phi \wedge \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ *wtw* $\Phi \in E(\mathcal{M})$ oraz $\Psi \in E(\mathcal{M})$;

c $\ulcorner\Phi \Leftrightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ *wtw* $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ i $\ulcorner\Psi \Rightarrow \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$;

d Jeżeli $\ulcorner\Phi \vee \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ oraz $\Phi \notin E(\mathcal{M})$, to $\Psi \in E(\mathcal{M})$;

e Jeżeli $\Phi \in E(\mathcal{M})$, to $\ulcorner\Phi \vee \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$;

f Jeżeli $\ulcorner(\bigwedge x_i)\urcorner\ \Phi \in E(\mathcal{M})$, to $\ulcorner\Phi(x_i/\beta)\urcorner \in E(\mathcal{M})$;

g Jeżeli $\Phi \in E(\mathcal{M})$ i x_i nie jest zmienną wolną w założeniach dowodu, to $\ulcorner(\bigwedge x_i)\ \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$;

h Jeżeli $\ulcorner\Phi(x_i/\beta)\urcorner \in E(\mathcal{M})$, to $\ulcorner(\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$;

i.1 Jeżeli $\ulcorner(\bigvee x_i)\ \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$, to $\ulcorner\Phi(x_i/\tau_{\beta_1}, \ldots, {}_{\beta_n})\urcorner \in E(\mathcal{M})$;

i.2 Jeżeli $\ulcorner Z \Rightarrow (\bigvee x_1)\ \Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ i $\ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner \in E(\mathcal{M})$ oraz x_i nie jest zmienną wolną w Z, tj. w założeniach dowodu, ani w Ψ, to $\Psi \in E(\mathcal{M})$.

T1.2 Wszystkie tezy klasycznego rachunku logicznego są prawdziwe w każdej niepustej dziedzinie.

D2 Wyrażenie Φ jest tautologią klasycznego rachunku logicznego wtedy i tylko, gdy jest prawdziwe w każdej dziedzinie niepustej, tj. gdy $(\bigwedge \mathcal{M})\ \Phi \in E(\mathcal{M})$,

T1.2' Wszystkie tezy klasycznego rachunku logicznego są tautologiami, tj. są prawdziwe w każdej dziedzinie niepustej.

T2 $Cn_L(E(\mathcal{M})) \subset E(\mathcal{M})$.

L1 Jeżeli $X \subset E(\mathcal{M})$, to $Cn_L(X) \subset E(\mathcal{M})$,

W1 $Cn_L(E(\mathcal{M})) = E(\mathcal{M})$.

W2 $E(\mathcal{M}) \in \boldsymbol{Sys}$

T2' $Cn_L\{\Psi: \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \subset \{\Psi: \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$.

L1' Jeżeli $X \subset \{\Psi: \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$, to $Cn_L(X) \subset \{\Psi: \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$.

W1' $Cn_L\{\Psi: \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} = \{\Psi: \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\}$.

W2' $\{\Psi: \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \in \boldsymbol{Sys}$.

T3 $E(\mathcal{M})$ jest systemem w sensie klasycznym niesprzecznym i zupełnym.

W3 Zbiór L tez klasycznego rachunku logicznego jest systemem w sensie klasycznym niesprzecznym i zupełnym.

2.2 Pojęcie modelu

D3. Dziedzina $\mathcal{M}$ jest modelem:

a dla zbioru wyrażeń zdaniowych X wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{M}$ jest dziedziną niepustą i $X \subset E(\mathcal{M})$;

b dla systemu $<A, \boldsymbol{D}>$ wtedy i tylko, gdy $\mathcal{M}$ jest dziedziną niepustą i $\mathcal{M}$ jest modelem dla zbioru $T_{<A,\ \boldsymbol{D}>}$ tez tego systemu, tj. wtedy i tylko, gdy $T_{<A,\ \boldsymbol{D}>} \subset E(\mathcal{M})$.

W4 Dziedzina $\mathcal{M}$ jest modelem opartego na logice systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$ wtedy i tylko, gdy $\mathcal{M}$ jest dziedziną niepustą oraz $Cn_{A, \boldsymbol{D}}(A) \subset E(\mathcal{M})$.

L2 $Cn_L(A) \subset E(\mathcal{M})$ wtedy i tylko, gdy $A \subset E(\mathcal{M})$.

T4 Dziedzina $\mathcal{M}$ jest modelem opartego na logice systemu aksjomatycznego $<A, \boldsymbol{D}>$ wtedy i tylko, gdy $A \subset E(\mathcal{M})$.

2.3 Semantyczne rozumienie niesprzeczności

T5 Jeśli istnieje model dla zbioru wyrażeń zdaniowych X, to zbiór X jest niesprzeczny.

T6 Jeśli istnieje model dla zbioru aksjomatów systemu $<A, \boldsymbol{D}>$, to system ten jest niesprzeczny.

T7 Każdy niesprzeczny zbiór wyrażeń zdaniowych ma model przeliczalny.

T8 Zbiór wyrażeń zdaniowych X jest niesprzeczny wtedy i tylko, gdy istnieje model dla zbioru X.

2.3 Kategoryczność systemu

D4.a System dedukcyjny (teoria) jest kategoryczny wtedy i tylko, gdy wszystkie jego modele są izomorficzne.

($\mathcal{M}$iz$\mathcal{M}$') Jeżeli $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}'$ są izomorficznymi modelami systemu dedukcyjnego logiki pierwszego rzędu, to dla dowolnej formuły Φ danego systemu jest tak, że: $\Phi \in E(\mathcal{M})$ *wtw* $\Phi \in E(\mathcal{M}')$.

T9.a Zbiór wyrażeń zdaniowych teorii pierwszego rzędu ma model wtedy i tylko, gdy ma model przeliczalny.

T9.b Każdy system (teoria) pierwszego rzędu ma model przeliczalny wtedy i tylko, gdy ma model dowolnej mocy nieskończonej.

D4.b System (teoria) $\boldsymbol{T}$ jest kategoryczny w mocy m wtedy i tylko, gdy każde dwa modele tego systemu mocy m są izomorficzne.

2.4 Pełność systemu

D5.a System jest pełny wtedy i tylko, gdy każde wyrażenie prawdziwe zapisane w języku tego systemu jest jego tezą.

D5.b System oparty na logice jest pełny wtedy i tylko, gdy każde wyrażenie zapisane w języku tego systemu i prawdziwe w każdym jego modelu jest jego tezą.

D5.c System logiki klasycznej jest pełny wtedy i tylko, gdy każde wyrażenie zapisane w języku tego systemu i prawdziwe w każdym zbiorze niepustym jest tezą tego systemu.

T10 Każda tautologia KRZ jest tezą systemu KRZ.

L3 Każda tautologia o koniunkcyjnej postaci normalnej jest tezą systemu założeniowego KRZ.

T11 Jeżeli zdanie Φ nie jest tezą logiki klasycznej, tj. $\Phi \notin L$, to istnieje niepusta dziedzina $\mathcal{M}$ taka, że $\ulcorner{\sim}\Phi\urcorner \in E(\mathcal{M})$.

T12 Jeśli zdanie Φ jest prawdziwe w każdej niepustej dziedzinie, to Φ jest tezą logiki klasycznej, tj. $\Phi \in L$.

W5 Zdanie Φ jest tezą logiki klasycznej, tj. $\Phi \in L$, wtedy i tylko, gdy Φ jest prawdziwe w każdej dziedzinie niepustej.

2.6. Pojęcie wynikania

D6.a Zdanie Φ wynika logicznie ze zbioru zdań X wtedy i tylko, gdy każdy niepusty model dla X jest modelem dla Φ.

D6.a' $X \models \Phi$ wtedy i tylko, gdy $(\bigwedge \mathcal{M} \neq \emptyset)\ [X \subset E(\mathcal{M}) \Rightarrow \Phi \in E(\mathcal{M})]$.

D6.b Wyrażenie zdaniowe Φ wynika logicznie ze zbioru wyrażeń X wtedy i tylko, gdy jest spełnione przez każdy ciąg przedmiotów w dowolnej dziedzinie, przez który są spełnione wszystkie wyrażenia zbioru X.

D6.b' Wyrażenie zdaniowe Φ wynika logicznie ze zbioru wyrażeń X, tj. $X \models \Phi$, wtedy i tylko, gdy
$(\bigwedge \mathcal{M} \bigwedge \{a_n\})\ [X \subset \{\Psi\colon \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Psi, \{a_n\})\} \Rightarrow \mathbf{sp}_{\mathcal{M}}(\Phi, \{a_n\})]$.

T13.a Wyrażenie zdaniowe Φ wynika logicznie (semantycznie) ze zbioru wyrażeń X wtedy i tylko, gdy jest konsekwencją logiczną (syntaktyczną) zbioru X.

T13.a' $X \models_L \Phi$ wtedy i tylko, gdy $X \vdash_L \Phi$, tj. gdy $\Phi \in Cn_L(X)$.

W6.1 $\Phi \models_L \Phi$
oraz

$\Phi \vdash_L \Phi$

W6.2 $\models_L \Phi \Rightarrow X \models_L \Phi$
oraz

$\vdash_L \Phi \Rightarrow X \vdash_L \Phi$

W6.3 $(X \models_L \Phi \wedge \Phi \models_L \Psi) \Rightarrow X \models_L \Psi$
oraz

$(X \vdash_L \Phi \wedge \Phi \vdash_L \Psi) \Rightarrow X \vdash_L \Psi$

W6.4 $(X \models_L \Phi \wedge \Phi \models_L \ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner) \Rightarrow X \models_L \Psi$
oraz

$(X \vdash_L \Phi \wedge \Phi \vdash_L \ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner) \Rightarrow X \vdash_L \Psi$

W6.5 $X \models_L \Phi \Rightarrow (X \cup Y) \models_L \Phi$
oraz

$X \vdash_L \Phi \Rightarrow (X \cup Y) \vdash_L \Phi$.

W6. 6 $\Phi \models_L \Psi$ *wtw* $\models_L \ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner$
oraz

$\Phi \vdash_L \Psi$ *wtw* $\vdash_L \ulcorner\Phi \Rightarrow \Psi\urcorner$,

W6.7 $X \models_L \Phi \Leftrightarrow$ istnieje skończony podzbiór Y zbioru X taki, że $Y \models_L \Phi$,

T13.b Jeżeli wyrażenie zdaniowe Φ jest konsekwencją syntaktyczną zbioru X, to Φ wynika logicznie (semantycznie) ze zbioru wyrażeń X.

T13.b’ Jeżeli $X \vdash \Phi$, tj. jeśli $\Phi \in Cn(X)$, to $X \models \Phi$.

T14 Jeśli Φ jest zdaniem, a X jest zbiorem zdań, to Φ wynika logicznie z X w sensie określonym w **D6.a** wtedy i tylko, gdy wynika z tego zbioru zdań w sensie określonym w **D6.b**.

T15 Zdanie Φ wynika logicznie ze zdań $\{\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_n\}$ wtedy i tylko, gdy implikacja $\ulcorner(\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_n) \Rightarrow \Phi\urcorner$ jest podstawieniem jakiegoś prawa logicznego.

***RIII. Zagadnienia uzupełniające

1. Twierdzenia limitacyjne

1.1 Twierdzenia Gödla

(G1) Każdy niesprzeczny system formalny, w którym da się udowodnić twierdzenia dotyczące podstawowych własności liczb naturalnych, jest niezupełny.

(*) System ***T*** jest ω-niesprzeczny wtedy i tylko, gdy dla dowolnej formuły Φ zapisanej w języku tego systemu:
jeśli $\vdash_{\boldsymbol{T}} \Phi(0)$, $\vdash_{\boldsymbol{T}} \Phi(1)$, $\vdash_{\boldsymbol{T}} \Phi(2)$, ..., to $\vdash_{\boldsymbol{T}} (\bigwedge x)\ \Phi(x)$.

(G1*) Każdy ω-niesprzeczny system formalny, który ma rekurencyjnie definiowalny zbiór aksjomatów i reguł wyprowadzania i w którym da się udowodnić twierdzenia dotyczące podstawowych własności liczb naturalnych, jest nierozstrzygalny i niezupełny, tj. istnieje w nim taka formuła $(\bigwedge x)\ \Phi(x)$, że ani ona, ani jej negacja nie jest tezą systemu (system jest niezupełny w sensie Gödla).

(G2) W systemie z aksjomatyką Peana jest formuła, którą można interpretować jako wyrażającą niesprzeczność tego systemu, a która nie jest w tym systemie dowodliwa.

1.2 Twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności prawdy

(T) Jeśli system ***T*** jest niesprzeczny, to nie jest w nim definiowalny zbiór zdań prawdziwych tego systemu.

(T*) W żadnym niesprzecznym systemie ***T*** nie da się zdefiniować zbioru $E(\boldsymbol{T})$ jego wyrażeń prawdziwych.

1.3 Teza i twierdzenie Churcha

(C.1) Metod efektywnych jest przeliczalnie wiele.

(C.2) Istnieją zbiory liczb naturalnych, które nie są:
a) efektywnie enumerowalne;
b) rozstrzygalne.

(C.3) Funkcja n-argumentowa f jest:

(i) całkowita wtedy i tylko wtedy, gdy jej dziedziną jest zbiór wszystkich uporządkowanych n-tek liczb naturalnych, tj. gdy $D_I(f) = \mathcal{N}^n$;

(ii) obliczalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcją całkowitą i istnieje efektywna metoda obliczania wartości tej funkcji dla każdego elementu jej dziedziny.

(C.4) **(i)** Funkcji obliczalnych jest nieskończenie, lecz tylko przeliczalnie wiele;

(ii) Istnieją nieobliczalne funkcje całkowite.

(C.5) Każdy akceptowalny system arytmetyki jest nierozstrzygalny.

(C.6) Każdy akceptowalny stystem arytmetyki, którego zbiór formuł jest rozstrzygalny i istnieje efektywna metoda ustalania, co jest dowodem w danym systemie, jest niezupełny.

(C7) Klasa funkcji obliczalnych jest tożsama z klasą funkcji rekurencyjnych.

(C8) Logika pierwszego rzędu, tj. jakikolwiek system WRP (z identycznością lub bez), jest nierozstrzygalny.

3. Pojęcie modelu w rekonstrukcja teorii empirycznych

Ds.1 τ jest typem (struktury) *wtw* istnieją k, m oraz $\boldsymbol{o}_1, \ldots, \boldsymbol{o}_n$ takie, że:
(1) $\tau = <k, m; \boldsymbol{o}_1, \ldots, \boldsymbol{o}_n>$;
(2) k oraz m są liczbami naturalnymi;
(3) $\boldsymbol{o}_1, \ldots, \boldsymbol{o}_n$ są $(k+m)$-typyfikacjami.

Ds.2 Jeżeli $\tau = <k, m; \boldsymbol{o}_1, \ldots, \boldsymbol{o}_n>$ jest typem struktury, to x jest strukturą typu τ *wtw* istnieją $D_1, \ldots, D_k; P_1, \ldots, P_m$ oraz $R_1, \ldots, R_n$ takie, że:
(1) $x = <D_1, \ldots, D_k, P_1, \ldots, P_m; R_1, \ldots, R_n>$;
(2) $D_1, \ldots, P_m$ są zbiorami;
(3) dla $i = 1, \ldots, n$: $R_i \in \boldsymbol{o}_i <D_1, \ldots, D_k, P_1, \ldots, P_m>$.

(I) Formuła odnosząca się do pewnej struktury $<D_1, \ldots, R_n>$ to taka, w której oprócz symboli teoriomnogościowych występuje co najmniej jeden spośród symboli $D_1, \ldots, R_n$.

Ds.3 Jeżeli $\tau = <k, m; \boldsymbol{o}_1, ..., \boldsymbol{o}_n>$ jest typem struktury, to:

(i) Σ jest rodzajem struktury typu τ *wtw* istnieją $A_1, ..., A_s$ takie, że:
(1) $\Sigma = <k, m; \boldsymbol{o}_1, ..., \boldsymbol{o}_n; A_1, ..., A_s>$;
(2) dla $i = 1, ..., s$: A_i jest formułą odnoszącą się do pewnej struktury typu τ.

(ii) Σ jest rodzajem struktury *wtw* istnieje typ struktury τ taki, że Σ jest rodzajem struktury typu τ.

(sp) „$A_i <D_1, ..., D_k, P_1, ..., P_m; R_1, ..., R_n>$" znaczy tyle, co „formuła A_i jest spełniona w strukturze $<D_1, ..., D_k, P_1, ..., P_m; R_1, ..., R_n>$".

Ds.4 Jeżeli $\Sigma = <k, m; \boldsymbol{o}_1, ..., \boldsymbol{o}_n; A_1, ..., A_s>$ jest rodzajem struktury, to x jest strukturą rodzaju Σ *wtw* istnieją $D_1, ..., D_k, P_1, ..., P_m, R_1, ..., R_n>$ takie, że:
(1) $x = <D_1, ..., D_k, P_1, ..., P_m; R_1, ..., R_n>$;
(2) $D_1, ..., P_m$ są zbiorami;
(3) dla $i = 1, ..., s$: $A_i <D_1, ..., D_k, P_1, ..., P_m; R_1, ..., R_n>$.

Ds.5 Jeżeli $\Sigma = <k, m; \boldsymbol{o}_1, ..., \boldsymbol{o}_n; A_1, ..., A_s>$ jest rodzajem struktury, to $\boldsymbol{P}_\Sigma$ jest teoriomnogościowym predykatem odpowiadającym Σ *wtw* zakres predykatu $\boldsymbol{P}_\Sigma$ jest klasą wszystkich struktur rodzaju Σ.

Ds.6 Jeżeli $\Sigma = <k, m; \boldsymbol{o}_1, ..., \boldsymbol{o}_n; A_1, ..., A_s>$ jest rodzajem struktury, to dla $i = 1, ..., s$:

(i) A_i jest *typyfikacją* *wtw* istnieje $m+k$-typyfikacja $\boldsymbol{o}_j$ taka, że formuła A_i jest równokształtna z „$R \in \boldsymbol{o}_j <D_1, ..., P_m>$", $1 \leq j \leq n$;

(ii) A_i jest *charakteryzacją* *wtw* oprócz symboli teoriomnogościowych i symboli zbiorów podstawowych zawiera symbol jednej tylko relacji;

(iii) A_i jest *prawem* *wtw* nie jest ani typyfikacją, ani charakteryzacją.

Ds.7

(i) x jest modelem możliwym dla Σ *wtw*:
(1) $\Sigma = <k, m; \boldsymbol{o}_1, ..., \boldsymbol{o}_n; A_1, ..., A_s>$ jest rodzajem struktury;
(2) x jest strukturą rodzaju Σ;
(3) dla $i = 1, ..., s$: A_i jest typyfikacją lub charakteryzacją.

(ii) $\mathbf{M_p}(\Sigma)$ jest zbiorem modeli możliwych rodzaju struktury Σ *wtw* $\mathbf{M_p}(\Sigma) = \{x$: x jest modelem możliwym dla $\Sigma\}$.

Ds.8 $\Sigma = \langle k, m; \boldsymbol{o}_1, ..., \boldsymbol{o}_n; A_1, ..., A_s\rangle$ jest rodzajem struktury teorii $\boldsymbol{T}$ *wtw* Σ jest takim rodzajem struktury, że wszystkie formuły $A_1, ..., A_s$ są aksjomatami teorii $\boldsymbol{T}$.

Dm.1

(i) x jest modelem możliwym teorii $\boldsymbol{T}$ *wtw* istnieje rodzaj struktury $\Sigma = \langle k, m; \boldsymbol{o}_1, ..., \boldsymbol{o}_n; A_1, ..., A_s\rangle$ teorii $\boldsymbol{T}$ taki, że x jest modelem możliwym dla Σ.

(ii) $\mathbf{M_p}(\boldsymbol{T})$ jest zbiorem modeli możliwych teorii $\boldsymbol{T}$ *wtw* $\mathbf{M_p}(\boldsymbol{T}) = \{x$: x jest modelem możliwym teorii $\boldsymbol{T}\}$.

$\mathbf{M_p}$(CCP)

(i) x jest modelem możliwym **CCP** *wtw* istnieją P, T, $\boldsymbol{\mathcal{R}}$, v oraz m takie, że:
(1) $x = \langle P, T, \boldsymbol{\mathcal{R}}, v, m\rangle$;
(2) P jest zbiorem niepustym i skończonym;
(3) T jest zbiorem dwuelementowym: $T = \{t_1, t_2\}$;
(4) v: $(P \times T) \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{R}}^3$;
(5) m: $P \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{R}}$ i dla każdego $p \in P$: $m(p) > 0$.

(ii) $\mathbf{M_p}$(**CCP**) jest zbiorem modeli możliwych **CCP** *wtw* $\mathbf{M_p}$(**CCP**) $= \{x$: x jest modelem możliwym **CCP**$\}$.

Ds.9

(i) x jest modelem dla Σ *wtw*
(1) $\Sigma = \langle k, m; \boldsymbol{o}_1, ..., \boldsymbol{o}_n; A_1, ..., A_s\rangle$ jest rodzajem struktury;
(2) x jest strukturą rodzaju Σ;
(3) dla pewnego $1 \leq i \leq s$: A_i jest prawem.

(ii) $\mathbf{M}(\Sigma)$ jest zbiorem modeli rodzaju struktury Σ *wtw* $\mathbf{M}(\Sigma) = \{x$: x jest modelem dla $\Sigma\}$.

Dm.2

(i) x jest modelem teorii $\boldsymbol{T}$ *wtw* istnieje rodzaj struktury $\Sigma = \langle k, m; \boldsymbol{o}_1, ..., \boldsymbol{o}_n; A_1, ..., A\rangle$ teorii $\boldsymbol{T}$ taki, że x jest modelem dla Σ.

(ii) $\mathbf{M}(\boldsymbol{T})$ jest zbiorem modeli teorii $\boldsymbol{T}$ *wtw* $\mathbf{M}(\boldsymbol{T}) = \{x$: x jest modelem teorii $\boldsymbol{T}\}$.

M(CCP)

(i) x jest modelem **CCP** *wtw* istnieją P, T, $\mathcal{R}$, v oraz m takie, że:
(1) $x = <P, T, \mathcal{R}, v, m>$;
(2) $x \in \mathbf{M_p}(\mathbf{CCP})$;
(3) $= \sum_{p \in P} m(p)v(p, t_1) = \sum_{p \in P} m(p)v(p, t_2)$.

(ii) **M(CCP)** jest *zbiorem modeli* **CCP** *wtw* **M(CCP)** = {x: x jest modelem **CCP**}.

3.2 Ujęcie teoriomodelowe vs teoriomnogościowe

(**G**)

A1 $(\bigwedge x, y, z)\ x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$
A2 $(\bigwedge x, y)\ (\bigvee z)\ x = y \circ z$
A3 $(\bigwedge x, y)\ (\bigvee z)\ x = z \circ y$.

($\mathbf{G_s}$) x jest grupą wtedy i tylko, gdy istnieją U oraz $\circ$ takie, że:
(1) $x = <U, \circ>$;
(2) U jest zbiorem niepustym;
(3) $\circ$ jest funkcją: $(U \times U) \to U$;
(4) dla każdego $a, b, c \in U$: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$;
(5) dla każdego $a, b \in U$ istnieje $e \in U$: $a = (b \circ e)$;
(6) dla każdego $a, b \in U$ istnieje $e \in U$: $a = (e \circ b)$.

INDEKS POJĘĆ I NAZWISK

Drukiem wytłuszczonym są wyróżnione pojęcia, które oprócz bezpośrednich mają także uszczegółowienia dalsze. Symbol ⇒ odsyła do pojęcia pokrewnego, a ⇐ wskazuje, że dane pojęcie jest w indeksie uwzględnione odrębnie. W zestawieniu nie uwzględniono pojęć i nazwisk występujących wyłącznie w bibliografii.

Agazzi E. 197
Ajdukiewicz K. 44
aksjomat 10, 42–47, 49-53, 55-58, 60, 65–69, 76–79, 82, 100–104, 128, 136, 144, 146–147, 152, 155, 164–166, 174, 176, 180, 183–186, 188–190, 193–195, 210, 212–215, 218, 222, 225, 228
  definicyjny 47
  formalny 183–186, 190, 192, 195
  indukcji 147
  logiczny 47, 50-52, 58, 65–67, 152
  niezależny 10, 42, 67, 100–104, 199–200
  pozalogiczny (specyficzny, właściwy) 47, 58, 65–67, 152, 213–214
  rzeczowy (empiryczny) 183–184, 190
aksjomatyka/aksjomatyzacja 11, 57, 144, 146, 165–166, 174, 176, 183, 190, 192–197, 210, 212, 222, 225, 228
  Hilberta 44
  Hilberta-Bernaysa 76, 83
  implikacyjnego rachunku zdań 76
  implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań 76, 83, 102
  Łukasiewicza 44–45, 76, 80, 83, 102, 103
  niezależna 10, 42, 67, 100–104, 176, 199–200, 218
  Peana 44, 166, 225
  (aksjomatyzacja) przez definicję predykatu teoriomnogościowego 183, 192, 194–197 ⇒ ujęcie strukturalne
  równoważnościowego rachunku zdań 76–77
algebra Boole'a 80

alternatywa (funktor, spójnik a.) 24–25, 30, 41, 53-54, 63, 112, 121, 122, 125–128 ⇒ funktor
elementarna ⇒ postacie normalne
nierozłączna (zwykła) 24–25, 30, 53-54, 63, 112, 121, 122, 125–128
rozłączna 41, 127
arytmetyka 44, 85, 94–95, 147, 152, 157, 164–167, 171, 173–174, 176, 226
Peana 44, 95, 164, 166–167, 176
Presburgera 85, 177
Skolema 85, 177

Balzer W. 179, 182, 194, 196, 197
Batóg T. 58, 81, 83, 85, 89, 90, 145, 146, 152
Bernays P. 76, 83
Boole G. 80
Borkowski L. 11, 47, 58, 65, 77, 80, 81, 83, 93, 103, 117, 166, 172, 175
Bourbaki N. 179

Church A. 13, 95, 163, 169, 174–176, 201
ciąg 17, 35–37, 47–49, 59–66, 72–73, 86–93, 106, 108–109, 111–113, 115–118, 120, 124–126, 128, 130, 132–135, 137, 139–140, 144–145, 153–155, 158–159, 168, 170–173, 175, 178, 181, 189
nieskończony 72–73, 92–93, 108–109, 111–113, 115–118, 173
rosnący (wstępujący) 72–73, 214
skończony 35–37, 48–49, 59–66, 106, 116, 137, 170–171, 173
suma c. 36, 72–73
wyraz c. 36–37, 59, 62–64, 73, 108–109, 137, 213
zapas c. 118, 128

Dąbrowski A. 93, 167
dedukcja (dowód, wyprowadzenie) ⇒ dowód, ⇒ relacja konsekwencji
definicja 21–23, 33–34, 92, 94, 107–108, 111–112, 172, 190, 199
indukcyjna (przez rekurencję, rekurencyjna) 21–23, 33–34, 92, 94, 107–108, 111–112, 172, 190, 199
formuły (wyrażenia) KRZ 21–22, 33–34
formuły WRP 22
spełniania 111–112, 190
predykatu teoriomnogościowego ⇒ aksjomatyka (aksjomatyzacja)
denotat ⇒ funkcja denotowania/interpretacyjna
dowód 10–13, 33–41, 49-50, 54, 59–64, 66, 113–115, 125, 136–139, 155, 157, 213
pojęcie d. (dedukcji, inferencji, wyprowadzenia) 49-50, 59–62, 66, 139, 155, 213 ⇒ konsekwencja
rodzaje d. 15, 21, 33–41, 54, 59, 62–64, 113–115, 125, 136–137, 139, 157
indukcyjny 21, 33–41, 62–64, 113–115, 137, 139

rozgałęziony 54, 59
wprost/niewprost 54, 59, 125, 136, 157
założeniowy 54, 59
Duns Szkot 52, 69
działanie 20, 24–26, 30, 35–37, 47, 51, 53, 55-56, 74, 85, 87, 94–95, 101, 120, 139, 152, 173, 175–177, 195–196 ⇒ funkcja
iloczyn 20, 25–26, 53, 56, 85, 87, 94–95, 109, 139, 152, 173, 175–177, 181, 190,196, 212
liczb (mnożenie) 85, 87, 94–95, 152, 173, 175–177, 196
zbiorów 20, 25–26, 53, 56, 87, 109, 139, 173, 175, 181, 190, 212
kartezjański 20, 109, 173, 181, 190
klasy zbiorów 25–26
systemów 56, 212
suma 17, 36, 39, 50, 56, 71–73, 85, 92–95, 110, 120, 152, 170–171, 173, 175–177, 195
liczb (dodawanie) 39, 85, 94–95, 110, 120, 152, 173, 175–177, 195
zbiorów 17, 36, 50, 56, 71–73, 92–93, 170–171
ciągów 36, 72–73, 170–171
systemów 56
dziedzina 108–113, 117–120, 124–126, 136–148, 150–155, 157–161, 167–168, 170, 172–173, 184, 187–189, 193–195, 200 ⇒ model
baza (uniwersum) dziedziny 110–111
funkcji 109, 172–173
interpretacyjnej 109
języka 108–113, 117–120, 124–126, 136–141, 189
możliwa 187
relacji 184
rzeczywista (realizacja, model) 187
teorii (systemu) 110, 136–141, 189, 193–195 ⇒ model
zamierzona 188–189, 193
zawartość d. ⇒ zawartość modelu

Einstein A. 164
element/y teoretyczny/e 189, 192–193
rdzeń teoretyczny e. t. 189, 192
relacje między e. t. 193
zasięg empiryczny e. t. 189, 192
Euklides 44, 46, 104

formuła (forma, funkcja) 16–18, 20, 65, 71–72, 81–83, 85, 91–93, 98, 102, 106–109, 111–118, 123–128, 130, 132, 139–141, 144–145, 153–154, 157–159, 174, 182–184, 189–193, 207, 214, 216–217, 219, 223, 226–227 ⇒ wyrażenie, ⇒ zmienna
formuła nazwowa 16–18 ⇒ symbowe nazwowe, ⇒ wyrażenie nazwowe

odnosząca się do struktury 182, 226
otwarta 92, 157, 174
spełniona 106, 111–118, 124–128, 130, 132, 139–141, 144–145, 153–154, 158–159, 183–184, 189–193, 219, 223, 227
w strukturze (dziedzinie) 183–184, 190–193, 227
zdaniowa 16–18, 20, 65, 71–72, 81–83, 85, 91, 93, 98, 102, 106–109, 111–118, 123–128, 130, 132, 139–141, 144–145, 153–154, 157–159, 183–184, 189–193, 207, 214, 216–217, 219, 223, 227
spełniona 106, 111–118, 124–128, 130, 132, 139–141, 144–145, 153–154, 158–159, 183–184, 189–193, 219, 223, 227
w strukturze (dziedzinie) 183–184, 190–193, 227
Fraenkel A. 95, 178
Frege G.
funkcja 16–18, 23–30, 35–37, 47, 51, 55, 74, 86–88, 94, 97–102, 120, 172, 184, 195–197
argument/wartość f. 24–25, 27, 35, 37, 55, 86, 97, 100, 172–173, 181, 184, 186, 188, 190, 192, 194, 196
denotowania ⇒ f. interpretacji
dodawania 120, 173 ⇒ działanie
działanie ⇐
dziedzina/przeciwdziedzina f. 109–110, 172–173, 184, 190
energii 196
entropii 196
iloczynu ⇒ działanie
interpretacji (interpretująca) 109–111, 190 ⇒ interpretacja
dziedzina f. i. 109
interpretant (denotat) 109, 117, 190
jedno-jednoznaczna (wzajemnie jednoznaczna, doskonała) 86–88, 91, 111, 144, 146, 171–172, 176
konsekwencji 55, 99, 137, 139 ⇒ konsekwencja
liczby molowej 196
masy 181, 186, 188
matrycy 97–99
mnożenia 173 ⇒ działanie
następnika 86, 173, 175
nazwowa ⇒ formuła nazwowa
objętości 196
obliczalna 172–175, 201
Markowa 175
Turinga 175
okazująca (ujawniająca) równoliczność zbiorów 145
położenia 196
potęgowania 175
prawdziwościowa 97–98 ⇒ funktor prawdziwościowy

prędkości 181, 186, 188
rekurencyjna 94, 169, 172, 175 201
całkowita 172–173
pochodna/wyjściowa 175
składanie f. r. 175
sumy 175 ⇒ działanie
wartościująca 109–111 ⇒ wartościowanie
zdaniowa ⇒ formuła z.
funktor 11–12, 16–23, 25–36, 38–42, 45, 52-57, 59–63, 65–67, 67–72, 74–77, 81–83, 85, 89, 94–98, 102–104, 107, 112–132, 135, 138–140, 145–151, 155–161, 165, 172, 200, 209–210, 213–214, 217, 224–225
nazwotwórczy 16–17, 20
operator 16–20, 89
abstrakcji 18
deskrypcji 22
kwantyfikator 12, 17, 19, 22–23, 26, 45, 62, 65, 82–83, 85, 89, 91, 107, 112–115, 119–120, 128–129, 157, 213
ilościowy 22, 89
ogólny (duży) 12, 17, 19, 22, 59, 62, 65, 91, 112, 114–115, 157, 213
szczegółowy (mały) 17, 22, 112, 115
prawdziwościowy (spójnik p.) 11, 16–21, 25–36, 38–42, 45, 52-57, 59–63, 65–67, 69–72, 74–77, 81–82, 85, 89, 94–98, 102–104, 107, 112–119, 121–132, 135, 138–140, 145–151, 155–161, 165, 172, 200, 209–210, 213–214, 217, 224–225
alternatywy 25, 30–32, 38–42, 53-55, 63, 95–96, 112, 121–122, 125–128, 149–150, 209–210, 217
a. rozłącznej 41, 127
dysjunkcji 41
implikacji 19, 21, 26–29, 35–36, 41, 52-53, 59–62, 65–67, 70–72, 76, 98, 102–103, 112, 116–117, 122, 124, 126–127, 135, 139, 147–148, 151, 155–157, 159–161, 213–214, 224
koniunkcji 17, 20, 25, 30–32, 39–41, 52-54, 98, 104, 112, 114, 122–123, 127–129, 131, 149–150, 209–210
negacji 25, 30–31, 33–34, 38–42, 69, 73–74, 76, 81–82, 85, 94- 96, 98, 102, 104, 112, 114–115, 125, 149, 165, 209–210, 217, 225
równoważności 20, 30, 35, 38, 41–42, 56-57, 65, 67, 74–77, 112–113, 115, 118–119, 122, 124, 127–130, 132, 138, 140, 145–147, 156, 158, 172, 200, 210,
zdaniotwórczy 16–18

Gentzen G. 167
geometria 44, 46, 80, 95, 104
euklidesowa 44, 46, 80, 95, 104
nieeuklidesowa 80, 104

Gödel K. 13, 86, 95, 145, 146, 152, 163–167, 169, 174, 176, 200, 201
Grayling A.C. 9, 119
Gruender D. 197
Grzegorczyk A. 11, 58, 81, 86, 116, 117, 145, 152, 169

Hilbert D. 44, 76, 83, 166
Hintikka J. 197
Hoły-Łuczaj M. 93, 167
Hunter G. 11, 68, 73, 76, 82, 145–147, 156, 165, 166, 169, 172–175, 177

indukcja 10, 21–23, 30, 33–35, 37–41, 62–64, 92, 94, 111, 113–115, 137–140, 147, 167, 172, 177, 190, 199, 209
 definicje indukcyjne 21–23, 33–34, 92, 94, 107, 111, 172, 190, 199
 dowody i. 34–35, 37–41, 62–64, 113–115, 137–140
 pozaskończona 167, 177
 założenie (warunek) i. 34–35, 37, 40–41, 63–64, 107–108, 112, 114–115
 zasada i. 30, 33, 35, 209
  pozaskończonej 177
inferencja ⇒ relacja konsekwencji
interpretacja 44, 69, 77–80, 95, 103, 109–111, 116–118, 120, 128, 142, 148, 168, 188–191, 193–196, 200, 215–216 ⇒ funkcja interpretacyjna
 semantyczna 109–111, 116–118, 120, 128, 142, 148, 168, 188–191, 193–196 ⇒ dziedzina
  empiryczna 188, 193
 syntaktyczna 77–80, 95, 103, 200, 215–216
interpretant ⇒ funkcja interpretacyjna
izomorfizm 145–148, 179, 222
 modeli 145–148, 222
 relacja ustalająca (ujawniająca) i. 146
 relacji 179
 układów relacyjnych (struktur) 146, 179

Jadacki J. 191
Janusz R. 169
język 11, 15–23, 33, 45–46, 68, 73, 76, 81–82, 86–87, 89–90, 105–107, 117, 119, 146–148, 152, 155, 167, 169–171, 173, 176–177, 190, 197, 199–200–201, 207
 formalny (sformalizowany) 167, 190, 197
 mieszany 170
 naturalny 15–16, 81, 119, 152, 170
 niezinterpretowany/zinterpretowany 16, 170–171, 207
 reguły wyprowadzania j. 45, 68, 155
 rząd j. 105–106, 117, 146–148, 167, 171, 176–177, 200–201

składnia j. 11, 15–20, 45–46, 86–87, 199, 207
arytmetyzacja s. 87
słownik (alfabet) j. 21–23, 33, 45, 73, 76, 82, 86–87, 89–90, 106–107, 170, 173
sztuczny 170
znak j. 15
Jonkisz A. 9, 12, 179, 197, 199

kategorie syntaktyczne wyrażeń ⇒ wyrażenie
kategoryczność (systemu, teorii) 105, 127, 145–148, 168, 176, 200, 222
pojęcie k. 145–148, 200, 222
teorii (systemu) 105, 127, 145–148, 176, 222
w mocy *m* 147–148, 222
klasyczny rachunek logiczny 10, 16, 19, 21–25, 30, 33–34, 38–45, 47, 50-53, 58–61, 64–67, 70, 76–77, 80, 82–83, 87, 93–100, 102, 107–118, 112–113, 128–129, 136–137, 141, 145–156, 160–161, 167, 176–177, 189, 194–195, 199–201, 207–208, 210, 213–214, 217, 219–221, 223, 226
predykatów (kwantyfikatorów) 10, 21–23, 25, 58-59, 83, 94–95, 107, 128, 145, 147, 150–151, 155, 160, 176–177, 194, 199, 201, 207–208, 210, 217, 223, 226
WRP 10, 21–23, 25, 59, 83, 94–95, 107, 128, 145, 147, 150–151, 155, 160, 176–177, 194, 199, 201, 208, 226
z identycznością 22, 58, 147, 177, 194, 226
zdań (KRZ) 10, 16, 19, 21–23, 25, 30, 33–34, 38–45, 47, 50, 52-53, 59, 61, 65, 67, 76–77, 82–83, 94–100, 102, 107–118, 112–113, 128–129, 145, 147–151, 153, 155, 160, 199–200, 207, 210, 217, 223
Hilberta-Bernaysa 76, 83
implikacyjno-negacyjny (Łukasiewicza) 45, 53, 76, 83, 102
implikacyjny 76
równoważnościowy 76–77
z kwantyfikatorami 82–83
Koj L. 197
koniunkcja elementarna ⇒ postacie normalne
konsekwencja (funkcja, relacja k.) 10, 42–43, 48–62, 65–66, 69, 73, 82, 85, 99–100, 104, 137–139, 141–142, 144, 154–157, 161, 193, 199–200, 211, 213
pojęcie k. 10, 48-58
relacja k. 49-58, 69, 73, 82, 85, 99–100, 104, 137–138, 139, 141–142, 144, 154–157, 161, 193, 199–200, 211
matrycowej 100
semantycznej (wynikania logicznego) 154–157, 161, 200
syntaktycznej 49–62, 66, 69, 73, 82, 85, 99–100, 104, 137, 139, 154–157, 161, 199–200, 211, 213
dedukcja (dowód, wyprowadzenie) 49-50, 57–62, 66, 137, 139 , 213 ⇒ twierdzenie o dedukcji

teoria k. 10, 42–43, 53, 65
zbiór k. (zbioru wyrażeń, systemu) 49-56, 73, 82, 85, 138, 141–142, 144, 193
Koszteyn J. 13
Krajewski S. 165
Kuhn T.S. 194
Kuratowski K. 93
kwantyfikator ⇒ operator

Lagrange J. 187, 196
Lindenbaum A. 93, 163, 200
Lindström P. 167
logika 9–10, 21–23, 43–44, 50, 59, 88, 93, 97–98, 102, 105, 128, 136, 146, 148, 150–152, 155, 160–161, 163, 167, 170–171, 176, 189, 195, 199–202, 221, 222, 226
dwuwartościowa 98, 170
filozofia logiki 9, 202
formalna 10, 21, 88
historia l. 9, 43–44, 201–202
klasyczna 10, 50, 59, 93, 98, 128, 136, 146, 148, 150–152, 155, 160–161, 167, 189, 195, 199–200, 221, 223 ⇒ rachunek logiczny klasyczny
metalogika 9–10, 163
pierwszego (*n*-) rzędu 10, 21–23, 105, 146, 167, 171, 176, 201, 222, 226 ⇒ wyrażenie
trójwartościowa 98, 102
wielowartościowa 97–98, 170
Löwenheim L. 146, 147, 163, 200
Ludwig G. 179

Łoś J. 148
Łukasiewicz J. 44, 45, 76, 80, 83, 97, 102, 103

Malcew A. 145, 200
Marciszewski W. 93
Markow A. 175
matryca/e logiczna/e 97–90, 97–100, 102, 217 ⇒ funkcja
adekwatna 99, 217
klasyczne 97
Łukasiewicza 97
uogólnione 97–98
wartościowanie w m. 97–100, 217
wartościowość m. 99, 102
wartość wyróżniona m. 97–100, 102, 217
McKinsey J.J.C. 178
metalogika ⇒ logika

metoda 23–24, 38–44, 47–48, 74, 76–80, 83, 85–87, 90–98, 100–103, 113, 149, 166, 169–175, 199–200, 210, 225–226
arytmetyzacji składni (języka) 86–87, 166
cechy dziedzicznej 23–24, 74, 80, 101–103
dedukcji naturalnej (założeniowa) 43–44
efektywna 47–48, 86, 90–93, 169–175, 200, 225–226
eliminacji kwantyfikatorów 85
enumeracji 85–86, 90–93, 169, 171–172, 225
interpretacji syntaktycznej 77–80, 95, 103 ⇒ interpretacja
matrycowa (tabelkowa) 96, 98, 100, 102, 113, 200
sprowadzania do postaci normalnej 38–42, 83, 95–96, 149, 199–200, 210
zero-jedynkowa 76, 94–97
model/e 10–11, 105, 118, 127, 139, 141–148, 151–153, 160–161, 163–164, 168, 178–182, 185–197, 200–201, 221–222, 227–229
aksjomatów systemu (teorii) 143–144, 194–195, 197, 222
formuły/wyrażenia zdaniowego/zdania 142, 153, 189
izomorficzne 145–148, 222
kosmologiczny 164
stacjonarny 164
mocy *m* 147, 200, 222
nieskończony/skończony 146–147, 200
dowolnej mocy nieskończonej 147, 200
pojęcie m. 10–11, 105, 127, 141–142, 148, 152, 160–161, 163–164, 168, 178–182, 185–192, 194–197, 200–201, 227–229
w rekonstrukcji teorii empirycznych ⇒ p. m. w ujęciu teoriomnogościowym
w ujęciu semantycznym 142, 163–164, 168
w u. teoriomnogościowym (strukturalistycznym) 11, 163, 178–182, 185–192, 194–197, 201, 227–229
model częściowy 192
m. możliwy 185–190, 192, 196, 227–228
m. rodzaju struktury 187, 190, 227–228
m. teorii 182, 185, 187–188, 192, 196, 228–229
dla **CCP** 188, 229
w u. teoriomodelowym (Tarskiego) 141–142, 144, 163–164, 168, 178, 180, 188–190, 193–194, 196–197, 200–201, 221
przeliczalny/nieprzeliczalny 144–148, 200, 222
teoria m. 189, 192, 197
teorii (systemu) 142–143, 146, 160, 192–193, 200, 222
uniwersum m. 144, 168
zawartość modelu (dziedziny) 118, 139, 168
zbioru wyrażeń 142–143, 145–146, 151, 153–154, 160, 168, 180, 200, 221–222
tez systemu 142, 168, 221 ⇒ zbiór tez
Montague R. 197

Morley M. 148
Morszczyński W. 179
Moulines C.U. 179, 182, 194, 196, 197
Murawski R. 142, 169

nadsystem ⇒ system
nazwa 17, 21–22, 94, 109, 117, 190
cudzysłowowa/quasi-cudzysłowowa 22
generalna 17
indywiduowa 94, 190
jednostkowa 17, 21–22, 109, 117
Neumann J. von 178
Newton I. 184, 187
niesprzeczność/sprzeczność 10, 23–24, 42, 67–81, 83–95, 101–105, 127, 141, 143–145, 160–161, 164–167, 177–178, 200–201, 214–218, 221–222, 225
dowody n. 23–24, 74–80, 95, 101–103, 143–145, 200–201
metodą cechy dziedzicznej (absolutne) 23–24, 74–77, 80, 101–103, 200
m. interpretacji syntaktycznej (względne) 74, 77–80, 95, 101, 103
m. teoriomodelowe 143–145
pojęcie n. 68–81, 83–84, 94, 105, 127, 141, 143–145, 160–161, 164–165, 200, 214–218, 221–222, 225
semantycznej 105, 127, 143–145, 160–161, 200, 222
syntaktycznej 68–80, 81, 83–84, 94, 141, 143, 164–165, 200, 214–218, 221, 225
w sensie Gödla (ω-niesprzeczność) 164–165, 225
w s. klasycznym (negacyjna) 68–76, 81, 83–84, 94, 165, 200, 214–218, 221
w s. Posta (absolutna) 73, 75–76, 83–84, 94, 200
systemu (teorii, rachunku) 10, 42, 67–68, 70, 73–74, 76–77, 80, 83–84, 104, 145, 164–167, 177–178, 214, 215–218, 221, 225
aksjomatycznego KRZ 76–77, 80
Hilberta-Bernaysa 76
implikacyjnego 76
implikacyjno-negacyjnego (Łukasiewicza) 76
równoważnościowego 76–77
aksjomatycznego sylogistyki 80
algebry Boole’a 80
arytmetyki 80, 167, 177, 225
Peana 167, 177, 225
geometrii 80, 104
rozszerzenia systemu zupełnego (sprzeczność) 83–84, 216
teorii mnogości 178

WRP 177
z identycznością 177
zbioru formuł/zdań 68–70, 72–73, 101, 103, 214–215, 218
zupełnego rozszerzenia systemu niesprzecznego 85–93, 216
niezdaniowa koncepcja teorii ⇒ ujęcie
Niiniluoto I. 197
numer Gödlowski 86, 176 ⇒ metoda efektywna
numerał 87–88 ⇒ metoda efektywna

obliczalność ⇒ funkcja obliczalna
obraz zbioru 87, 111
w wartościowaniu 111 ⇒ wartościowanie
odwzorowanie zbioru na/w zbiór 86, 97–98, 111, 217
Olszewski A. 169, 176

paradoks 147, 165
kłamcy 165
Löwenheima-Skolema 147 ⇒ twierdzenie L.-S.
Peano G. 44, 94, 95, 164–167
pełność/niepełność 148–152, 157, 160, 177, 222–223, 226
dowody pełności 148–152
pojęcie p. systemu 148, 222–223
systemu (teorii) 148–152, 160, 177, 223, 226
arytmetyki liczb naturalnych z dodawaniem i mnożeniem (niepełność) 152, 157, 177, 226
logiki klasycznej 148–152, 160, 223
KRZ 148–152, 177, 223
założeniowego 149–150
WRP 148, 150–152, 177
Pogorzelski W.A. 58, 65, 93, 152, 168
poprawność składniowa wyrażeń (formuł) 11, 15–23, 34, 46, 49, 52-53, 56, 58, 68, 74, 80–81, 86, 107–108, 111, 116, 168, 207 ⇒ wyrażenie
sprawdzanie p. s. 18–21
Post E. 82–84, 200
postacie normalne 30–32, 38- 42, 95–96, 149–150, 209–210, 217, 223
alternatywa elementarna 30–32, 38–42, 95–96, 149–150, 209–210, 217
alternatywna p. n. 30–32, 95–96, 209–210
kanoniczna (wyróżniona) 32, 209
koniunkcja elementarna 32, 95–96, 149, 209
koniunkcyjna p. n. 30–32, 40–41, 95, 149–150, 209–210
kanoniczna (wyróżniona) 30–31, 209
sprowadzanie formuł do p. n. 38–42, 83, 95–96, 149, 210

prawda/prawdziwość 10–11, 83, 99, 105–106, 110, 117–136, 138–139, 141–148, 151–153, 157–161, 164–165, 167–169, 174, 189–191, 195, 200–201, 219–222, 225
definicja p. 118–119, 161, 167–169, 201, 225
Arystotelesa 119
klasyczna 119
Tarskiego 119, 161, 167
p. logiczna 160, 167
orzecznik prawdy 11, 99, 118, 121–122
pojęcie p. 105, 117–127, 152, 157, 160, 168, 189–191, 200
prawdziwa/e 83, 99, 106, 118–119, 124, 126–127, 142, 144–145, 148, 152–153, 157–158, 160, 164, 167, 219
funkcja (formuła) zdaniowa 83, 118, 157
wyrażenie zdaniowe 99, 118, 124, 128, 148, 152–153, 160, 219
systemu aksjomatycznego 128, 148, 152
zdanie 106, 118–119, 124, 126–127, 142, 144–145, 152–153, 158, 160, 164, 167
teoria p. 105, 141, 164, 167, 189, 201
semantyczna 105, 141
Tarskiego 141, 164, 167, 189, 201
teoriomodelowa 164, 189, 201
p. tez 128–136, 143, 146–147, 157, 160, 165, 167–168, 174, 220–222
arytmetyki 165
logiki klasycznej 128–136, 160, 167, 220–222
systemu 143, 157, 168, 174, 220, 222
teorii mnogości 146–147
twierdzenie o niedefiniowalności prawdy ⇒ twierdzenie Tarskiego
wyrażenia/zbioru wyrażeń/twierdzeń w danej dziedzinie/modelu 110, 118, 124–125, 127, 138–139, 141–142, 144, 146, 151–153, 157–160, 168, 189, 191, 195, 219
systemu w d./m. 127, 138, 141, 151
niesprzeczność systemu wyrażeń prawdziwych 141, 151
zupełność s. w. p.141
prawo 32, 40, 52, 61, 69, 103, 125–127, 184, 220
Dunsa Szkota 52, 69
Fregego 61
łączności koniunkcji 32
mechaniki Newtonowskiej 184
niesprzeczności 125–127, 220 ⇒ zasada
metalogiczne (semantyczne) 125, 220 **T6**
rozdzielności alternatywy 40
sylogizmu warunkowego 103
wyłączonego środka 126–127, 220 ⇒ zasada
metalogiczne (semantyczne) 126, 220 **T7**

Presburger M. 85, 94, 177
program Hilberta 166
przeciwdziedzina ⇒ funkcja
Przełęcki M. 194

rachunek 9–11, 15–18, 21–26, 33–34, 38, 42, 44–47, 51, 53, 58, 62, 64–67, 70, 76–77, 80, 82–83, 87, 94, 97–99, 102, 113, 119, 128–129, 136–137, 141, 148, 150–152, 154, 156, 160, 170, 176–177, 195, 210, 213–214, 217, 220–221
logiczny 9–11, 15–18, 21–26, 33–34, 38, 42, 44–47, 51, 58, 62, 64–67, 70, 76–77, 80, 82–83, 87, 94, 97–99, 113, 119, 128–129, 136–137, 141, 148, 150–152, 154, 156, 160, 170, 176–177, 195, 210, 213–214, 217, 220–221
klasyczny ⇐
predykatów (kwantyfikatorów) 22, 58, 62, 82–83, 94, 97, 128, 148, 152, 176–177, 195
z identycznością 58, 177
zbiorów 25, 45–46, 119
zdań 17, 45, 53, 76–77, 82–83, 98–99, 102, 113, 170 ⇒ klasyczny rachunek logiczny
dwuwartościowy, *n*-wartościowy 98–99, 113, 170
Hilberta-Bernaysa 76, 83
implikacyjno-negacyjny Łukasiewicza (Łukasiewicza) 45, 53, 76, 83, 102
implikacyjny 76
modalny 17
równoważnościowy 76–77
z kwantyfikatorami 82–83
reguła/y 12, 21–23. 39, 41–48, 50-54, 58–60, 62–66, 68, 76–79, 82, 102, 106, 119, 122, 128–129, 136–138, 150, 152, 155, 159–160, 165, 170, 188, 190, 207, 213, 215, 225 ⇒ prawo/a
budowania 43, 45, 53-54, 59, 119, 190
aksjomatów 45
dowodów 43, 53-54, 59
rozgałęzionych wprost 54
formuł 190
metajęzyka 119
dołączania 53, 59. 62–64, 128–129, 150, 213
alternatywy 129, 150
implikacji do dowodu 53, 59
koniunkcji 128–129
kwantyfikatora 59, 62–64, 128, 213
ogólnego (r. generalizacji) 59, 62–64, 128, 213
szczegółowego 128
równoważności 128–129

dowodzenia (dołączania nowych wierszy do dowodu, inferencji, wnioskowania, wyprowadzania) 12, 43–47, 50-51, 53, 58, 60, 68, 78–79, 128–129, 136–138, 152, 155, 160, 165, 207, 225
korespondencji 188
logiki 51-52 ⇒ prawo
modus tollens 159
negowania alternatywy 39, 42, 122
niezawodna (procedura, n. schemat) 43, 128–129, 136, 152, 160, 170
odrywania 12, 53, 59, 62–63, 76–77, 102, 128–129, 137, 213
dla równoważności 77
opuszczania 12, 39, 54, 128–129
alternatywy 129
koniunkcji 54, 128–129
kwantyfikatora 12, 128
ogólnego (dużego) 12, 128
szczegółowego (małego) 128
negacji 39
równoważności 128–129
pierwotna/wtórna systemu 59, 64–65, 77, 79, 102, 128–129, 160, 215
podstawiania 59, 66, 76–77, 102, 129, 136, 160
składni (składniowa) 45–46
słownika 21–23, 45, 82
uznawania 45
wprowadzania (definicji, terminów do systemu) 46, 106
zastępowania 46, 160
dla równości 160
dla równoważności 160
relacja/e 12, 18, 28, 90–91, 109, 112, 119–120, 180, 184, 186, 190, 193
antysymetryczna 90–91
charakteryzujące ⇒ struktura
człony r. 112
dwuargumentowa (dwuczłonowa) 109, 190
dziedzina/przeciwdziedzina r. 184, ⇒ funkcja
inkluzji (zawierania się) 12, 28, 119–120
interpretacji (interpretująca) ⇒ funkcja interpretująca, ⇒ interpretacja
izomorfizm r. ⇒ izomorfizm
r. jednoznaczna 186 ⇒ funkcja
jedno-jednoznaczna ⇒ funkcja j.-j.
konsekwencji (wyprowadzalności) ⇒ konsekwencja ⇒ reguła dowodzenia
między elementami teoretycznymi 193 ⇒ elementy teoretyczne
ograniczona do danego zbioru 18
pole relacji 184
p. systemu relacyjnego (struktury) 180
porządkująca 89–90 ⇒ zbiór uporządkowany

przechodnia 90–91
spójna 90–91
struktura relacyjna (system r.) ⇒ struktura
ustalająca izomorfizm ⇒ izomorfizm
wynikania logicznego (semantycznego) ⇒ wynikanie logiczne
Robinson J. 95
Rosser J.B. 165
rozstrzygalność/nierozstrzygalność 10, 42, 67–68, 85, 93–96, 165–166, 168–178, 199–201, 216–217, 225–226
dowody rozstrzygalności 94–95
warunki wystarczające nierozstrzygalności 94
nierozstrzygalność 94–95, 165–166, 168, 174–178, 201, 225–226
akceptowalnych systemów arytmetyki 174, 226
arytmetyki dodawania i mnożenia (a. Peana) 94, 176–177, 225
logiki 1. rzędu 175, 177, 201, 226
teorii liczb wymiernych z dodawaniem i mnożeniem 95
teorii mnogości 178
von Neumanna-Bernaysa-Gödla 178
Zermela-Fraenkla 178
WRP 94, 176, 201
system (teoria) rozstrzygalny/nierozstrzygalny 85, 93–96, 176–177, 217
s. istotnie nierozstrzygalny 85, 94–96, 176–177, 217
r. systemów 94–96, 173, 177, 216
arytmetyki dodawania (a. Presburgera) 85, 94, 177
a. mnożenia (a. Skolema) 94, 177
elementarnej geometrii euklidesowej 95
e. teorii liczb rzeczywistych 95
KRZ 94, 96, 177
podsystemów rachunku predykatów 94, 176
węższego jednoargumentowego rachunku predykatów 94
teza Churcha ⇐
twierdzenie Churcha o nierozstrzygalności ⇒ twierdzenie Churcha
r. zbioru 172, 225
warunki rozstrzygalności z. 172
równoważność
spójnik prawdziwościowy ⇒ funktor
systemów dedukcyjnych ⇒ systemy dedukcyjne
zbiorów wyrażeń ⇒ zbiory

Schumann A. 93, 167
semantyczne ujęcie teorii empirycznych ⇒ ujęcie
Skolem T. 85, 94, 146, 147, 163, 200
Sneed J. 179, 182, 193, 194, 196, 197

spełnianie 10, 105, 108–120, 124–130, 132–134, 139–142, 144–145, 152–153, 158–159, 161, 168, 183, 186–187, 189–193, 195, 200, 219, 223, 227
formuły (funkcji) zdaniowej 108–120, 183, 186–187, 191, 195, 227
przez dany ciąg przedmiotów 108–118
w danej dziedzinie/modelu 117–120, 183, 186–187, 191, 195, 227 ⇒ prawdziwość w danej dziedzinie
w danym wartościowaniu 113, 191
w wyniku podstawienia stałych za zmienne 105–106, 118
pojęcie s. 10, 105, 108–119. 142, 145, 152, 161, 168, 189–191, 200, 219
indukcyjna definicja s. dla wyrażeń logiki 1. rzędu 111–113, 117, 190, 200, 219
uogólnianie d. s. na wyrażenia logiki rzędów wyższych 117
wyrażenia zdaniowego 118–120, 124–125, 128–130, 132–134, 139–141, 153, 158–159, 189, 219, 223
logiki klasycznej 118, 128–129, 219
przez dany ciąg przedmiotów 139–141, 189
w danej dziedzinie 118–120, 124–125, 130, 132–134, 153, 158–159, 189, 219, 223 ⇒ prawdziwość w danej dziedzinie 118. 152, 189
w danym wartościowaniu 189
w wyniku podstawienia stałych za zmienne 118, 152
zdania 116–118, 126–127, 144–145, 158, 190–193
przez ciąg przedmiotów116–117, 144–145, 158
w danym wartościowaniu 117
w dziedzinie/modelu 118, 126–127, 190–193 ⇒ prawdziwość w danej dziedzinie
Stanosz B. 11
Stegmüller W. 179, 190, 193, 194, 196, 197
struktura (logiczna, relacyjna, system/układ r.) 179–187, 192, 194, 226–227
model s. ⇒ model w ujęciu teoriomnogościowym (strukturalistycznym)
rodzaj s. 183–184, 227
s. rodzaju, typu 182–183, 226
typ s. (t. relacyjny) 180, 182, 226
zakres (pole, uniwersum) s. 180–187, 192, 194, 227
charakterystyka zakresu 180–187, 192, 227
charakteryzacje 182–187, 227
(k+m)-typyfikacje 181, 184–186, 227
prawa 184, 192, 227
ograniczenia 192
podstawowe (fundamentalne) 184
powiązania 192
zbiory z. podstawowe (właściwe) vs pomocnicze 181–182, 194
strukturalistyczne (teoriomnogościowe) ujęcie (podejście) ⇒ ujęcie
Suggar A.C. 178
Suppes P. 178

sylogistyka, 44, 80–81, 103
arystotelesowska 80–81, 103
sylogizm 44
doskonały 44
symbol/e (znak/i) 12–13, 16–27, 31, 33–34, 39–41, 46–47, 49-50, 56-59, 61–62, 65, 68, 73, 76–77, 85–91, 95, 97, 104, 106–111, 113, 117–119, 132–134, 144–145, 152–155, 158, 168, 173, 180, 182, 184, 186, 190, 194, 196, 201, 210, 217, 226–227
funkcyjne (funkcji) 86, 88, 107, 109–110, 117, 145, 196
funktorowe (funktorów) 17, 20, 25, 31, 34, 40–41, 46, 73, 76–77, 90, 95, 107–109, 144, 210, 217
metajęzyka (metajęzykowe, metalogiczne) 21–22, 88, 107–108, 119
nazwowe (nazw) 22, 25, 106
operatorowe/operatorów 17, 20–21
podstawowe/pomocnicze 21, 25, 76, 86–89, 107
predykatowe 22, 25, 86, 88, 91, 106–110, 117, 119
proste/złożone 47
pozalogiczne 109–110, 117, 190, 194
relacyjne (relacji) 104, 184, 227
specyficzne (swoiste, właściwe)/niespecyficzne 46–47
stałe (stałych) 17, 22, 76, 86–87, 89, 106, 109–110, 117, 145
zmienne (zmiennej, zmiennych) 16–17, 19, 21–22, 25, 27, 34, 39–40, 77, 86–87, 89, 95, 106–109, 117, 132–134, 210, 217
indywiduowe (jednostkowe) 22, 89, 106, 108–109, 117
wolne/związane 19, 132–134
zdaniowe 16–17, 27, 34, 87, 95, 106, 217
system (teoria) 10, 21–23, 43–48, 50, 55-58, 66–68, 74–75, 77–80, 82–86, 93–94, 105, 108, 127, 132, 142, 144, 146–150, 160, 165, 167–168, 171, 173–174, 176–177, 194, 200–201, 207, 210–217, 222–223, 225–226 ⇒ rachunek
akceptowalny 173–174, 226
aksjomatyczny 43–47, 57, 194
aksjomatyzowalny 57, 194
asertoryczny/hipotetyczny 46
dedukcyjny ⇐
definicja s. 55-56, 212
iloczyn systemów ⇒ działanie
niesprzeczny 82, 93 ⇒ niesprzeczność
maksymalny niesprzeczny 82, 93
rozszerzenie s. (nadsystem) 55, 82–86, 93–94, 176, 212, 216–217
maksymalne niesprzeczne 82, 85, 93
rząd s. 10, 21–23, 105, 146–148, 167, 171, 176–177, 200–201, 207, 222, 226
s. pierwszego (*n*-) rzędu 10, 21–23, 105, 146, 167, 171, 176, 200–201, 222, 226
suma systemów ⇒ działanie

teza s. 47–48, 50, 55-56, 58, 66–68, 74–75, 77–80, 83, 94, 108, 127, 132, 142, 144, 148–150, 160, 165, 168, 174, 210–216, 223, 225 ⇒ teza
zbiór tez s. 47, 55-56, 74, 108, 210–212 ⇒ zbiór tez
wyrażenie s. ⇒ wyrażenie
zbiór konsekwencji s. ⇒ konsekwencja, ⇒ teza
system/y dedukcyjny/e 38, 42-51, 53, 55-56, 58-59, 64–65, 68–79, 81–83, 100, 102, 128–129, 136, 142, 145, 149–150, 157, 169, 165, 177–178, 192, 195–197,200, 210–212, 215–216, 218, 220, 223
aksjomatyczne 43-51, 53, 55-56, 58, 64–65, 68, 74, 76–79, 81–83, 100, 102, 128, 136, 142, 165, 192, 195–197, 200, 210–212, 215–216, 218, 220
niesformalizowane/sformalizowane 44–46, 165, 192, 195–197
przedaksjomatyczne 44–45
równoważne 64–65
aksjomatyczny 44–45, 53, 76–77, 83, 102
Hilberta-Bernaysa 76, 83
implikacyjno-negacyjny Łukasiewicza (Łukasiewicza) 45, 53, 76, 83, 102
implikacyjny 76
równoważnościowy 76–77
sylogistyki (Łukasiewicza) 44
dziedzina/model s. a. ⇒ dziedzina
typy s. d. 43–48
własności s. d. 67–104
kategoryczność ⇐
niesprzeczność ⇐
niezależność aksjomatów ⇒ aksjomat niezależny
pełność (zupełność semantyczna) ⇐
rozstrzygalność ⇐
zupełność ⇐
założeniowe (dedukcji naturalnej) 38, 43–44, 46–48, 53, 58-59, 64–65, 128–129, 136, 149–150, 160, 223
oparte na (nadbudowane nad) klasycznym rachunku logicznym 52, 66–67, 213–214

Tarski A. 11, 13, 53, 87, 94, 95, 105, 118, 119, 141, 142, 146, 147, 161, 163, 164, 167, 169, 189–191, 197, 200, 201
tautologia 52, 76, 95–96, 98–100, 102, 136, 148–151, 217, 221, 223
klasycznego rachunku logicznego 136, 221
KRZ 52, 76, 95–96, 99, 148–151, 217, 223
matrycy logicznej 98–100, 102, 217
pojęcie t. 98
teoriomodelowe ujęcie (podejście, metoda) ⇒ ujęcie
teoriomnogościowe ujęcie (podejście, metoda) ⇒ ujęcie
termin 45–46, 53, 65–66, 77–78, 102, 109–110, 117–118, 128, 152, 190, 194, 215

logiczny/ pozalogiczny (stała, symbol p.) 65–66, 109–110, 117–118, 128, 152, 190, 194
pierwotny/wtórny (zdefiniowany) systemu 45–46, 53, 77–78, 102, 215
specyficzny (swoisty, właściwy) systemu 45
teza 16, 25, 38–39, 42–44, 47-52, 54-56, 58, 60, 66–69, 74–83, 94–96, 101, 103, 108, 127–128, 132, 136, 141–144, 148–152, 155, 157, 160, 165, 167–169, 174–176, 199, 210–217, 220–223, 225
bycie tezą a prawdziwość 128, 136, 141, 143, 148, 151–152, 160, 167–168, 221–223
Churcha 169, 174–176 ⇒ twierdzenie Churcha
KRZ 16, 39, 42, 60, 66, 83, 95–96, 148–150, 160, 210
z kwantyfikatorami 83
logiczna 50-52, 54, 66–67, 160, 213–214
systemu (rachunku)
dedukcyjnego 43–44, 47-50, 55-56, 58, 66–69, 74–75, 77–83, 94–95, 101, 108, 127, 132, 142, 144, 148–150, 157, 160, 165, 168, 174, 199, 210–216, 220, 223, 225
aksjomatycznego 43–44, 47–49, 55-56, 74, 77–78, 101, 108, 210–212, 215
założeniowego 43–44
WRP 83, 150–151, 155, 160
Thomason R.H. 197
tłumaczenie 78–80, 103, 119–120, 196, 215–216 ⇒ interpretacja syntaktyczna
Turing A. 175
twierdzenie/a 27–28, 38–42, 52, 57–67, 70, 85, 91–93, 95–96, 144–148, 151–152, 156, 163–176, 199–201, 208, 210, 212–214, 216=217, 222–223, 225–226
Churcha o nierozstrzygalności logiki 1. rzędu 95, 169, 176, 226 **(C8)**
Gödla 144–145, 151–152, 164–167, 200–201, 222–223, 225
o istnieniu modelu 144–145, 222 **T7**
o niezupełności 164–167, 200–201, 225
pierwsze 164–165, 225 **(G1*)**
uogólnione 164–165, 225 **(G1)**
drugie (o niedowodliwości niesprzeczności) 165–166, 201, 225 **(G2)**
o pełności WRP 151, 167, 223 **W5**
Gödla-Malcewa 145, 200, 222
o semantycznych warunkach niesprzeczności 145, 222 **T8**
o zwartości dla teorii semantycznie niesprzecznych 145
(lemat) Kuratowskiego 93
(lemat) Kuratowskiego-Zorna 93
limitacyjne 147, 152, 163–176, 200–201, 222, 225–226
Churcha 163, 169–176, 201, 226
Gödla 163–167, 201, 225
Lindströma 167

Löwenheima-Skolema-Tarskiego 147, 163, 200, 222
Tarskiego 163, 167–169, 201, 225
(lemat) Lindenbauma 85, 91–93, 163, 200, 216 **T19**
Lindströma 167
Löwenheima-Skolema 146, 222 **T9.a**
Löwenheima-Skolema-Tarskiego 146–147, 222 **T9.b**
górne (wstępujące) 147
(hipoteza) Łosia 148
o dedukcji 57–67, 70, 156, 199, 213–214
dla klasycznych rachunków logicznych 59, 65, 213 **T11.1**, **T11.2**, **T11.1'**, **T11.2'**
dla systemów opartych na rachunku klasycznym 66–67, 213–214 **T12.a**, **T12.b**, **T12**
o finitystyczności 38, 52, 156, 210, 212
działania *CnL* 52, 156, 212 **T4'**
działań danej klasy 38, 210 **T3**
o monotoniczności działań danej klasy 27–28, 208 **L5**
o neutralności (niewyróżnianiu) praw logik klasycznej względem stałych pozalogicznych 151–152, 223 **W5**
o sprowadzalności do postaci normalnych 38–42, 210 **T4.1**, **T4.2**
o tautologiczności formuł o postaci normalnej 95–96, 217 **T20.a**, **T20.b**
o zwartości 70, 145, 214
dla niesprzeczności 70, 214 **T15.1**, **T15.2**
dla teorii posiadających model (semantycznie niesprzecznych) 145
Rossera 165
Tarskiego 94, 147, 167–168, 200–201, 225
o modelach dowolnej mocy 147, 200
o niedefiniowalności prawdy 167–168, 201, 225 **(T)**, **(T*)**
o warunkach wystarczających nierozstrzygalności 94

ujęcie (podejście, metoda) 45, 49, 141–142, 163, 178–194, 191–197, 201
metajęzykowe 45
metalogiczne 49
niezdaniowe 178
semantyczne 141–142, 163, 178, 180–194, 196–197
systemów dedukcyjnych 141–142, 163
teorii empirycznych 142, 163, 178, 180–194, 196–197
strukturalne (strukturalistyczne, teoriomnogościowe) 163, 178–181, 188–193, 195–197, 201
teoriomodelowe (klasyczne, Tarskiego) 142, 163, 180, 188–189, 191–197, 201
teoriomodelowe vs teoriomnogościowe 188–189, 191–197, 201
uniwersum (dziedzina) ⇒ dziedzina
uporządkowanie zbioru ⇒ zbiór uporządkowany

wartościowanie 96–100, 103, 109–113, 117, 124, 136, 155, 158, 170, 189, 191, 195, 217
formuły 96–98, 100, 109–113, 191
w matrycy logicznej 97–100, 217
wartościowość 98–99, 102, 217
matrycy logicznej 99, 102
rachunku 98–99, 217
wartość 69, 96–99, 97–103, 113, 127, 136, 170, 217
funkcji ⇒ funkcja
logiczna 69, 96–99, 102–103, 113, 127, 136, 170
wyróżniona matrycy logicznej 97–100, 102, 217
własność (cecha) dziedziczna (dziedziczona, niezmiennicza) 23–26, 28–30, 35–36, 74–77, 80, 102–103, 136, 199–200, 208, 215
ze względu na działanie/funkcję 23–26, 28–30, 35–36, 74–77
ze względu na klasę działań/funkcji 23–24, 28–29, 35–36, 74–75, 215
Woleński J. 11, 44, 68, 73, 82, 85, 93, 105, 119, 142, 146, 157, 161, 163, 165–169, 175, 177, 191
Wójcicki R. 193, 194, 197
wynikanie 10, 75, 122, 152–161, 159, 161, 200 , 223–224
inferencyjne (implikacyjne, syntaktyczne) 75, 122, 155–157, 159, 161, 200 ⇒ reguły dowodzenia
logiczne (semantyczne) 10, 152–161, 200, 223–224
wyprowadzanie ⇒ relacja konsekwencji, ⇒ reguła dowodzenia
wyrażenie 10–11, 15–23, 25, 32–34, 39–41, 43, 46, 49, 51-53, 56, 58, 60, 63, 65, 67–70, 73–74, 79–84, 87–88, 91–93, 95, 98, 100–108, 111–130, 133–134, 137, 139–149, 150–155, 157–161, 164–168, 171, 176–178, 180, 183–184, 187, 189, 191–193, 195, 200–201, 207–208, 214–224 ⇒ formuła
elementarne (atomiczne) 21–23, 107, 207–208
KRZ 21–22, 207
WRP 22–23, 208
funktor ⇐
kategoria składniowa (syntaktyczna) w. 16–22, 25, 105, 107, 117, 133–134, 207
nazwowe 16–22, 25, 88, 105, 117, 133–134 ⇒ formuła n.
stałe 117, 134
zmienne n. 18–22, 25, 88, 105, 117
niezależne (od zbioru wyrażeń) 81, 100–104, 218 ⇒ niezależność aksjomatów
niezinterpretowane 16 ⇒formuła
n-tego rzędu 21–23, 33–34, 40–41, 86, 105–106, 117, 146–148, 167, 171, 176–177, 200–201
KRZ 21–23. 33–34, 40–41
WRP 22–23
operator ⇒ funktor
otwarte ⇒ formuła o.

poprawnie zbudowane 11, 15–16, 19–23, 34, 46, 49, 52-53, 56, 58, 68, 74, 80–81, 86, 107–108, 111, 116, 168, 207, 218
postać normalna w. ⇒ postacie normalne
prawdziwe w danej dziedzinie 117–127, 189, 219
rozumiane szeroko/wasko 15–16
spełnione 33–34, 39–41, 51-52, 60, 63, 65, 104, 106, 111–120, 124–128, 130, 132, 139–141, 144–145, 153–154, 158–161, 183–184, 187, 189, 190–193, 195, 219, 223
przez ciąg przedmiotów 111–118, 124–125, 128, 130, 132, 139–141, 144–145, 153–154, 158–159, 189, 219, 223
zdaniowe 11, 16, 18–23, 25, 32–34, 43, 46, 52, 56, 58, 65, 67–70, 73–74, 76–77, 79–84, 87–88, 91–93, 95, 98, 100, 106, 108, 111, 113, 116–120, 122–127, 129, 137, 139, 142–146, 149, 150–155, 157–161, 164–166, 178, 180, 189, 200, 207–208, 214–217, 219–224
zdanie 20, 65, 67, 69, 81–84, 91–93, 106, 116–119, 122–127, 137, 142, 150–153, 157–161, 164–166, 178, 216, 219–220, 223–224
zmienna z. 16, 21–23, 32–34, 52, 77, 82–83, 87–88, 95, 98, 149, 207–208, 217

zasada/y 31, 126–127, 137, 139, 141, 164, 184, 187, 193, 220
dowodowe 137, 139, ⇒ reguły dowodzenia
indukcji ⇒ indukcja
interpretacji empirycznej 193 ⇒ interpretacja
Macha 164
semantyczna 31, 126–127, 141. 220
niesprzeczności 126–127, 141, 220 **T6**
s. wyłączonego środka 31, 126–127, 141, 220 **T7**
zachowania pędu (2. zasada dynamiki Newtona) 184, 187
zawartość dziedziny/modelu ⇒ model
zbiór/zbiory 10, 21, 24–29, 33–38, 42–45, 47-53, 55-58, 65–75, 77–83, 85, 88–95, 99–106, 108–113, 116–129, 131–151, 153–154, 156–160, 165, 167–176, 184, 186, 189, 191, 193, 195, 199–201, 208, 210–216, 218–223, 225–226, 228–229
aksjomatyzowalny 57, 212
skończenie 57
enumerowalny 171–172, 225
nieprzeliczalny 93, 146, 148, 170–173
obliczalny 47–48, 57, 93–94, 169, 172, 174–175, 201
przeliczalny 53, 88, 144, 146–147, 170–173, 200, 222, 225–226
pusty/niepusty 43, 47, 50, 53, 102, 108, 116–117, 124–126, 128–129, 136, 141–142, 148, 150–151, 153, 158, 160, 184, 186, 195, 220–223, 228–229
rekurencyjny 93–94, 165, 169, 172, 175–176, 225
reprezentowany w systemie (teorii) 174–176
rozstrzygalny 10, 42, 168, 171–172, 174–175, 225–226

skończony/nieskończony 25, 33–38, 45, 47–49, 51-52, 57, 66, 70–73, 92–94, 97, 106, 108–113, 116, 144, 146–147, 156, 159, 167, 169–173, 175, 186, 210–212, 214, 222, 224, 228
tez 43–44, 47-52, 55-56, 58, 66–69, 74–75, 77–83, 93–95, 99, 101, 108, 127–128, 132, 136, 141–142, 144, 148–151, 157, 160, 165, 168–169, 172, 174–176, 199, 210–216, 220, 223, 225
klasycznego rachunku logicznego 50-52, 99, 128, 136, 141, 150–151, 160
obliczalny 93, 169, 172, 174–175
rekurencyjny 93–94, 169, 175
rozstrzygalny 169, 175–176 ⇒ rozstrzygalność
metoda efektywna ⇒ metoda
systemu dedukcyjnego 43–44, 47-50, 55-56, 58, 66–69, 74–75, 77–83, 94–95, 101, 108, 127, 132, 142, 144, 148–150, 157, 160, 165, 168, 174, 199, 210–216, 220, 223, 225 ⇒ teza
uniwersalny (uniwersum) 52-53, 110–113, 117–120, 125, 128, 132, 139, 144, 168, 180, 189, 193
uporządkowany 21, 36–38, 85, 88–89, 90–91, 105, 172
dobrze 21, 36–38, 85, 88–91, 172
element pierwszy z. u. d. 90–91
liniowo 89, 91
wyrażeń/zdań/formuł niezależnych od zbioru wyrażeń 81, 100, 102–104, 218 ⇒ aksjomat/yka niezależny/a
wyrażeń równoważne 56-57, 65, 212
wyrażeń zdaniowych prawdziwych w dziedzinie 110, 118–127, 129, 131–146, 150–151, 153–154, 158–160, 168, 189, 191, 200, 219–223, 225
zamknięty (ze względu na) 24–29, 33, 35–37, 47, 49-51, 99, 101, 138, 147, 208, 211
działanie/funkcję 24–29, 35–37, 50, 99, 147, 208
minimalny (najmniejszy) zawierający dany zbiór 25–29, 35–37, 208
klasę działań/funkcji 24–29, 35–37, 47, 49, 50-51, 101, 138, 208, 211
minimalny (najmniejszy) zawierający dany zbiór 25–29, 35–37, 50-51, 208, 211
Zermelo E. 95
zmienna 16–23, 25, 33–34, 61–62, 64–65, 77, 83, 87–88, 95, 97–98, 105–108, 110, 112, 115, 117, 132, 135, 149, 157, 207–208, 213, 217 ⇒ symbol
indywiduowa 17–18, 22–23, 88, 106–108, 110, 117, 208
nazwowa 17–22, 25, 88, 105–106
wolna 16, 61–62, 64–65, 132, 135, 213
zdaniowa 16, 21–22, 33–34, 77, 83, 87, 95, 97–98, 149, 207, 217
związana 17–19, 65, 112, 115, 157
znak/i języka (językowe) ⇒ język
Zorn M. 93
zupełność/niezupełność 81–93, 141, 164, 174, 177, 216, 221, 225–226
dowody z. 83–93

pojęcie z. 81–85, 92, 141, 216
w sensie Gödla 164–165
w s. klasycznym (negacyjna) 81–85, 92, 141, 216
w s. Posta (absolutna) 82–84, 216
systemu 82–84, 164, 174, 177, 225–226
w s. klasycznym (negacyjna) 82–83, 164, 174, 177, 225–226
akceptowalnego i rozstrzygalnego systemu arytmetyki (niezupełność) 174
arytmetyki Peana (niezupełność) 164, 174, 225–226
a. Presburgera 177
a. Skolema 177
elementarnej teorii nierówności 83
KRZ (niezupełność) 177
systemu KRZ z kwantyfikatorami 82–83
WRP (niezupełność) 177
w s. Posta (absolutna) 82–84, 177
KRZ 83, 177
systemu Hilberta-Bernasysa 83
s. implikacyjno-negacyjnego (Łukasiewicza) 83
WRP (niezupełność) 83, 177
rozszerzenia systemu niesprzecznego 85–93, 216
zbioru 82, 216, 221
aksjomatów 82
formuł zdaniowych 216, 221

Książka ta jest ostatnią spośród trzech składających się na opracowanie wybranych zagadnień z logiki. Są w niej podjęte zagadnienia metalogiki rozumianej wąsko, tj. ograniczonej do syntaktyki i semantyki systemów dedukcyjnych – przede wszystkim systemów KRZ i WRP, choć zawiera także wyniki dotyczące nie tylko systemów logiki klasycznej.

W rozdziale poświęconym zagadnieniom syntaktycznym omówiono stosowane w metalogice sposoby dowodzenia twierdzeń o systemach dedukcyjnych – zarówno metody dowodzenia indukcyjne, jak i korzystające z pojęcia postaci normalnych. Syntaktyczna charakterystyka systemów dedukcyjnych, po metodologicznych uwagach o ich typach, obejmuje pojęcie konsekwencji oraz takie własności systemów, jak niesprzeczność, zupełność, rozstrzygalność i niezależność aksjomatów.

W semantycznym ujęciu systemów dedukcyjnych, osadzonym na obszernie omówionej koncepcji spełniania i prawdy, są podjęte zagadnienia związane z własnościami systemu twierdzeń prawdziwych, pojęciem modelu, niesprzecznością (rozumianą semantycznie) i kategorycznością systemu, pojęciem pełności systemu oraz z relacją wynikania logicznego (semantycznego).

Pośród zagadnień uzupełniających znalazły się m.in. wybrane twierdzenia metalogiki okazujące ograniczenia metod formalnych – K. Gödla (o niezupełności i o niedowodliwości niesprzeczności), A. Tarskiego (o niedefiniowalności prawdy) i A. Churcha (o nierozstrzygalności logiki pierwszego rzędu) – oraz metoda definiowania i stosowania pojęcia modelu w rekonstrukcjach teorii empirycznych (zwana ujęciem teoriomnogościowym lub strukturalistycznym), porównana z klasycznym aksjomatyzowaniem teorii i zapoczątkowanym przez Tarskiego ujęciem teoriomodelowym.

Zaletą książki – wpisującą się w styl całego opracowania – jest trafny wybór problemów logiki i sposób ich prezentacji, widoczny w układzie zagadnień, definicji i twierdzeń, w ich sformułowaniach zapisanych w jednolitej notacji, komentarzach i przykładach oraz w dowodach rozwiniętych w sposób zadowalający specjalistów, a jednocześnie zrozumiały dla osób wkraczających w logikę.

ISBN 978-83-7614-616-4

9 788376 146164 >

IHS Ignatianum

Fundacja Ignatianum